Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/elementa_1940

Q
4
E42
V. 23-24
1940
WARE

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN
G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGUTREDJE ÅRGÅNGEN
1940

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16^4 STOCKHOLM

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1940

Tjugutredje årgångens innehåll.

1940

Sid.
Björkeson, A. Anm. av J. Regler, Physikalische Aufgabensammlung für höhere Schule und Studium 57
Comét, S. Något om matrisräkning 145
— — Anm. av A. Örne, Förtrollade siffror 53
Edqvist, T. Elektriska rullgardinen 185
— — Anm. av K. Nielsen, Elektriciteten — saadan som vi møder den 120
— — J. Eriksen, Fysik for Realklassen 189
Ehrnst, F. Anm. av B. Nyström och Hj. Olson, Plan trigonometri för realgymnasiet 119
Englund, B. Experimentell behandling av grundämnenas periodiska system vid kemiundervisningen 223
— — Till frågan om begreppen syra och bas. Neutralisation i andra lösningsmedel än vatten 233
Eriksson, A. An Investigation of the P-Terms for Helium (ref. av gradualavh.) 246
von Friesen, S. Anm. av J. Picht, Einführung in die Theorie der Elektronenoptik 118
Funke, G. Apparat för bestämning av specifika värmeledningsförmågan för metaller 184
Gustaver, B. Kemiska notiser: 1. Om jonvandringen vid elektrolys. 2. En osmotisk cell 167
— — Meddelanden från Föreningen för matem.-naturv. underv.: Från årsmötet i jan. 1940 med bl. a. styrelseberättelse för 1939 och refererat av föredrag av: K. Andersson, Stockholms stads Lärlings- o. yrkesskolor; H. Cramér, Ur sannolikhetskalkylens utveckling; I. Bolin, Organiska konstmassor 41
— — Från mötet i okt. 1940 med ref. av studiebesök vid Radiotjänst och vid Institutet för organisk-kemisk forskning 234
Götharson, T. Anm. av Beckman-Wetterblad, Fysik för realskolan I 118
Ingelstam, E. Gamla och nya elektriska enheter II 81
Junell, R. Anm. av I. Bolin o. B. Gustaver, Lärobok i kemi för folkskoleseminarier och praktiska skolor 243

Juringius, Om lösningen till uppgift 1039 133
Larsén, T. Zur Kenntnis der Refraktion und Dispersion von Edelgasen und edelgasähnlichen Hydriden und Deutriden (ref. av gradualavh.) 66
Leander, K.-J. Vattnets volymsammansättning 229
Lind, C.-E. Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins (ref. av gradualavh.) 194
Linde, Elektrische Widerstandseigenschaften der verdünnten Legierungen des Kupfers, Silbers und Goldes (ref. av gradualavh.) 124
Lundberg, J. Ur sodans historia; I. N. Leblanc. II. E. Solvay 105, 157
— — Anm. av O. Cyrén, Syntetiska färgämnen och läkemedel 121
Lunell, E. Liniengeometrische Studien mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen mit vollständigem Zerfalle der Doppelkurve (ref. av gradualavh.) 197
Magnusson, T. Nobelpriset i fysik 1939 1
Myrbäck, K. Nobelprisen i kemi 1939 8
Nilsson, A. En apparat för virvelströmmar 24
— — Framställning av svavelkoppar 36
— — En varmluftballong 116
— — Ett par enkla bestämningar av ekvivalentvikter 186
Nordefeldt, E. Några förslag till uppgifter vid de kemiska laborationerna i gymnasiet 25
— — Förslag till enskilda arbeten i kemi 169
— — Anm. av A. Thorup, Den første Kemi (61), Rasmussen-Lund-Langvad, Hverdagslivets Kemi (121), Mann-Saunders, Practical Organic Chemistry (192), Staudinger-Kern, Anleitung zur organischen qualitativen Analyse (192) Schmidt-Allen, Fundamentals of Biochemistry with Laboratory Experiments (192), Hogness-Johnson, Elementary Principles of Qualitative Analysis (193)
Nordström, H. Anm. av H. Spencer Jones, Tallösa världar 55
Nyberg, H. Etylacetatets hydrolys 37
Pleijel, Å. Propriétés asymptotiques des functions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations (ref. av gradualavh.) 248
Reuterskiöld, J. A. Studien über 1-2-Disulfid-di-karbonsäuren, die entsprechenden Di-sulfone und deren Spaltungsprodukte (ref. av gradualavh.) 64
Ryde, F. Räta linjen utan normalformen 101
Ryde, N. Ett kärnomvandlingsförsök med på konstgjord väg accelererade projektiler 215
— — Anm. av Kosmos, bd 17, 1939 187
Starck, G. Anm. av H.-J. Fletchner, Materiens underbara värld, kemi för alla (57), W. Greiling, Kemien erövrar världen (59),

M. de Broglie, Atomes, radioactivité, transmutations (60), O. Holmqvist, Svenska gasteknikens historia I (122), S. Veibel, Kemien i Danmark I (190), G. Hägg, Kemisk reaktionslära (239), Rancke Madsen, Analytisk kemi och Künel Hagen, Systematisk kvalitativ Analyse (240), P. Lagerhjelm, Metallframställning (242).

Svensson, B. Föreningen i Lund för matem.-naturv. underv. Styrelseberättelse för 1939 52

Tallqvist, Hj. Om Mersennes tal och liknande tal 209

Tandberg, J. Anm. av Fra Fysikkens Verden (56), W. H. Bragg, Ljusets världsallt (117), Neue Wege exakter Naturerkenntnis (117), Bonniers Konversationslexikon band III (123), M. Ilin, ... och det vart ljus, Vad är klockan?, 100 000 varför (123).

Thomé, K.-E. Alkalisk hydrolys av acylerade oxisyror (ref. av gradualavh.) 61

Uhler, A. Anm. av Matematisk problemsamling för 2-betygs-, resp. 1-betygskursen vid Lunds universitet 187, 243

Vanäs, E. A. Spectrophotometric Study of Stars in Cygnus (ref. av gradualavh.) 195

Wahlgren, A. Om faktorer till talen $a^{p}+1$ 212

Wahlström, B. En anordning för demonstration av stående vågrörelse 38

Åstrand, S. Geometri för nybörjare 13

Föredrag under hösten 1939 och våren 1940 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 68, 128, 134

Föreläsningar för lärarkand. vid provårsläroverken 1939—40 208

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövingarna under 1940: jan. (75), mars—april (135), aug.—sept. (203), och nov. (254).

Provräkning i realexamen v. t. och h. t. 1940 .... 141, 259

Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v. t. och h: t. 1940 .... 142, 260

» » : Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v. t. och h. t. 1940 .... 143, 262

Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman 71, 129, 199, 250

Om lösningen till uppg. 1039 133

Gradualavhandlingar (autoreferat); A. Eriksson (245), T. Larsén (66), C.-E. Lind (194), J. O. Linde (124), E. Lunell (197), Å. Pleijel (247), J. A. Reuterskiöld (64), K. E. Thomé (61), E. Vanäs (195).

Tidskrifter, innehållsöversikt.............. 68, 127, 198, 207, 249, 264

Bokanmälningar: Örne, Förtrollade siffror; Spencer Jones, Tallösa världar; Fra Fysikkens Verden; Regler, Physikalische Aufgabensammlung für höhere Schule und Studium; Fletchner, Materiens underbara värld, kemi för alla; Greiling, Kemien erövrar världen; de Broglie, Atomes, radioactivité, transmutations; Thorup, Den første kemi.......................... 53

Bragg, Ljusets världsallt; Neue Wege exakter Naturerkenntnis; Picht, Einführung in die Theorie der Elektronenoptik; Beckman-Wetterblad, Fysik, läro- och läsebok för realskolan; Nyström-Olson, Plan trigonometri för realgymnasiet; Nielsen, Elektriciteten, saadan som vi møder den; Rasmussen-Lund-Langvad, Hverdagslivets Kemi; Cyrén, Syntetiska färgämnen och läkemedel; Holmqvist, Svenska gasteknikens historia; Bonniers Konversationslexikon, bd 3; Ilin, ». . . och det vart ljus», »Vad är klockan?», »100 000 varför» 117

Matematisk problemsamling (för 2-betyg vid Lunds univ.); Kosmos, bd 17; Eriksen, Fysik for Realklassen; Veibel, Kemien i Danmark; Mann-Saunders, Practical Organic Chemistry; Staudinger-Kern, Anleitung zur organischen qualitativen Analyse; Schmidt-Allen, Fundamentals of Biochemistry with Laboratory Experiments; Hogness-Johnson, Elementary Principles of Qualitative Analysis............ 187

Hägg, Kemisk reaktionslära; Rancke Madsen, Analytisk Kemi; Künel Hagen, Systematisk kvalitativ Analyse; Lagehjelm, Metallframställning; Bolin-Gustaver, Lärobok i kemi för folkskoleseminarier; Matematisk problemsamling (för 1-betyg vid Lunds univ.) 239

Tidskr. utkommer med fyra häften årligen (mars, juni, sept., dec.) Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16^{IV}, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Ernest O. Lawrence

Nobelpriset i fysik 1939.

Den uppfattning om atomkärnans struktur, som vi i dag äga, ha vi till mycket stor del fått genom studiet av de kärnreaktioner, som uppstå, då kärnan beskjutes med partiklar, vars massa är av samma storlek som de lättaste elementens. För att till något större antal genomtränga atomkärnans potentialbarriär måste dessa partiklar, om de äro laddade, äga en mycket stor hastighet. Deras energi måste vara av storleksordningen en million elektronvolt eller mera.[1] Om vi bortse från de α-partiklar, som emitteras vid de naturligt radioaktiva ämnenas sönderfall, så måste dessa partiklar framställas laboratoriemässigt.

För att undvika de experimentella svårigheter, som förefinnas vid acceleration med en enda hög spänning på milliontals volt, arbetade Ernest O. Lawrence energiskt vidare på den tankegången, att man kunde nå samma resultat genom att låta partikeln accelereras flera gånger under inverkan av mycket måttliga spänningsfall. Principen för den metod, som han först använde sig av, framgår av fig. 1. Från en lämplig jonkälla, t. ex. ett urladdningsrör, dragas en del joner medelst en negativ hjälpspänning (— V_1) ut genom en smal, cylindrisk bländare. Detta divergenta jonknippe fokusseras sedan vid passagen genom den andra elektroden med spänningen — V_2 ($V_2 > V_1$) till en smal stråle i cylinderns axel. Den egentliga accelerationen av jonerna sker i de i högvakuum placerade cylindrarna A, B, C, etc., av vilka varannan står i förbindelse med den ena och varannan med den andra

---

[1] 1 elektronvolt = den energi, som en enkelt laddad partikel erhåller, då den genomlöper ett spänningsfall på 1 volt.

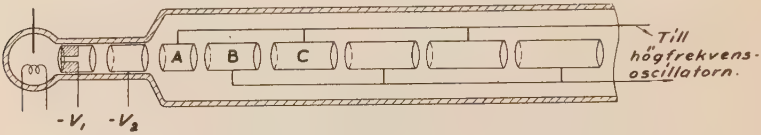


Fig. 1. Principschema för linjär acceleration av joner.

polen av en högfrekvensgenerator. En jon, som passerar från A till B, då A har en positiv och B en negativ spänning, erhåller en mot spänningsdifferensen svarande acceleration. Om den tid, som jonen sedan behöver för att passera genom B, är lika med halva svängningstiden för den högfrekventa växelspänningen, så har elektrodernas spänningar under denna tid kastat om tecken. B är nu positiv och C negativ. Jonen accelereras ånyo. Om nu längderna av cylindrarna A, B, C etc. äro riktigt avpassade, så finns det för varje frekvens hos oscillatorn en mot varje jonslag svarande spänning, som åstadkommer, att jonerna röra sig genom de accelererande elektroderna i resonans med växelspänningen. Jonerna erhålla således ett energitillskott svarande mot den pålagda växelspänningens storlek, varje gång de passera från en elektrod till en annan. Genom att välja tillräckligt många elektroder kan man på detta sätt accelerera upp jonerna till mycket höga hastigheter.

Det är emellertid tvenne saker, som medföra en begränsning av metodens användning. Växelspänningens frekvens kan ej ökas hur mycket som helst beroende i första hand på att elektrodsystemets kapacitet ej kan minskas hur långt som helst. En våglängd hos den högfrekventa växelspänningen på 20 m anses vara minimum, för att man skall få ut tillräcklig effekt till elektroderna. Och då räcker det ändå inte med mindre än en oscillator på flera tiotal kilowatt. De hastigheter, som jonerna erhålla, äro omvänt proportionella mot kvadratroten ur deras massa, varför den sträcka, som de tillryggalägga under en halvperiod av växelspänningen blir störst för joner av de lättaste elementen. Detta medför, att den apparatur, som erfordras för acceleration av lätta joner till högre hastigheter, skulle få mycket stora dimensioner. Metoden har därför huvudsakligen kommit till användning för acceleration av tyngre joner. Sålunda har man lyckats accelerera Hg^{+}-joner till en hastighet svarande mot 2,8 Mev (millioner elektronvolt). Strömstyrkan har man kunnat pressa upp till mellan 10^{-7} och 10^{-6} amp. Att detta varit möjligt, har man den lyckliga omständigheten att tacka för, att det elektriska fältet mellan accelerationselektroderna på grund av kraftlinjernas krökning kommer att utöva en fokusserande inverkan på jonstrålen. De joner, som vilja avlägsna sig från systemets axel, påverkas därigenom av krafter, som återföra dem mot axeln, till vars omedelbara närhet jonströmmen kommer att koncentreras.

De joner, som lämpa sig bäst som projektiler vid bombardemang av atomkärnorna, äro de med liten massa, i främsta rummet väte-, deuterium- och heliumjoner. Så snart de första försöken med den linjära acceleratorn visat, att den knappast kunde användas med någon större framgång för de lättare elementen, koncentrerades Lawrences intresse på möjligheten att för dessa skapa en motsvarande metod. Han kom därvid på den idén att kröka jonernas bana till cirklar genom att låta accelerationen försiggå i gapet mellan polerna till en stor magnet. Acceleratorns dimensioner komma härigenom att stanna inom mycket rimliga gränser.

Principen för denna s. k. cyklotron framgår av fig. 2. Två isolerade elektroder A och B, tillsammans bildande en låg, tunnväggig cylinder, som genom ett diametralt snitt skurits upp i två hälfter, äro monterade i en vakuumtät kammare C. Denna placeras mellan polerna till en magnet, vilka vi kunna tänka oss belägna över och under papperets plan, så att de magnetiska kraftlinjerna alltså bliva vinkelräta mot detta. Elektroderna A och B stå i förbindelse med en högfrekvensgenerator, som ger dem en växelspänning på flera tiotusental volt med en frekvens av 10 à 15 megacykler ($\lambda = 30$ à 20 m). Ovanför mellanrummet mellan A och B är vid a placerad en glödtråd, som utsänder elektroner. Dessa jonisera den gas (tryck omkring 0,001 mm Hg), som efter evakueringen införes i vakuumkammaren och vars joner man vill accelerera. Om nu elektroden A vid en viss tidpunkt har en negativ spänning i förhållande till B, så erhåller en positiv jon, som då befinner sig mellan elektroderna t. ex. vid a en acceleration i riktning mot A. Inkommen i det konstanta, elektriska fältet i A:s inre beskriver jonen under inverkan av det homogena magnetfältet en halvcirkel, vars radie (r) bestämmes av jonens hastighet (v), massa (m) och laddning (e) samt magnetfältets styrka (H). Vi ha ju ($c =$ ljushastigheten)

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{H e v}{c} \quad \text{eller} \quad r = \frac{m v c}{H e}.$$

Om tiden (T) för jonens passerande från a till b är lika med en halvperiod för växelspänningen, så har det elektriska fältet under denna tid kastat om riktning. Jonen accelereras åter men i riktning från A till B. Inkommen i B beskriver jonen ånyo en halvcirkel men denna gång med större radie beroende på den större hastigheten. För tiden T erhålla vi

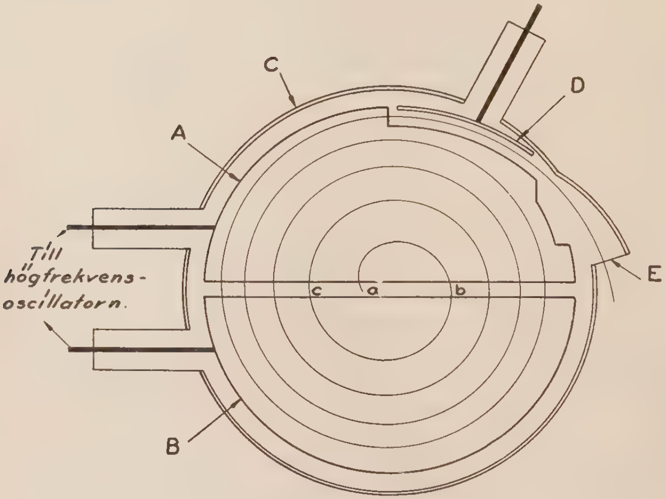


Fig. 2. Principschema för cyklotronen.

$$T = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m c}{H e}.$$

Som vi se, är T oberoende av radien r. Tiden för vägen b c måste alltså vara lika med tiden för a b; fältet har därunder ånyo kastat om riktning och jonen erhåller vid c ytterligare en acceleration, vilket sedan upprepas ända till flera hundra gånger beroende på apparaturens dimensioner. För att slutligen få jonerna att lämna accelerationsrummet har man på ett ställe vid periferien anbragt en isolerad avböjningselektrod D, som hålles på en negativ potential av omkring 10^5 volt. I det elektriska fältet mellan D och A avböjes jonstrålarna utåt för att vid E lämna cyklotronen. Till vakuumkammaren C är här vanligen ansluten en särskild liten kammare, i vilken de hastiga jonerna få träffa det preparat, som skall bombarderas.

För våglängden λ hos högfrekvensoscillatorn erhålles

$$\lambda = c \cdot 2T = \frac{2\pi m c^2}{He}.$$

Den energi, som jonen erhållit, då den nått ut till en radie R, är, uttryckt i elektronvolt,

$$V = 300 \cdot \frac{m v^2}{2e} = 150 \cdot \frac{H^2 R^2}{c^2} \cdot \frac{e}{m} = 5{,}3 \cdot 10^{24} \frac{R^2}{\lambda^2} \cdot \frac{m}{e}.$$

Liksom vid den linjära acceleratorn så ha vi även här en gynnsam fokusserande verkan av det elektriska fältet mellan elektroderna. Jonerna påverkas härigenom av krafter, som återföra dem till planet mitt i elektroderna. Krafter, som verka i samma riktning, uppkomma även i kanten av magnetfältet på grund av den där uppträdande krökningen av de magnetiska kraftlinjerna. Allt detta verkar fördelaktigt för den strömstyrka, som jonströmmen vid E kan nå upp till. Dessutom har denna jonstråle en genomskärning på endast några få mm^2, varför hela dess effekt kan koncentreras till ett relativt litet preparat.

Om vi först se närmare på data för den cyklotron, som Lawrence använde vid sitt pionjärarbete år 1930, så finna vi följande värden. Magnetfältet hade en diameter av 28 cm och kunde nå upp till en fältstyrka på 14 000 Gauss. För protoner måste man då ha en våglängd på 19 m. Lawrence lyckades med denna anordning erhålla protoner med en volthastighet på 1,2 Mev, utgörande 300 gångers multiplikation av en spänning på elektroderna av 4 000 volt. Strömstyrkan hos den erhållna protonstrålen var omkring 10^{-9} amp.

Men utvecklingen av cyklotronen har gått raskt framåt. I princip har visserligen ingenting ändrats, men det tekniska utförandet har förbättrats undan för undan. Större och större cyklotroner byggas, och i spetsen för denna utveckling står fortfarande Lawrence och hans medarbetare vid Radiation Laboratory i Berkeley. Vissa teoretiker ha gjort beräkningar, som de anse tyda på, att en övre gräns skulle förefinnas för den hastighet, som jonerna kunna erhålla i en cyklotron. Erhållna resultat synas emellertid peka på att så icke är fallet och att under alla omständigheter gränsen i så fall ligger avsevärt högre än som angivits av teoretikerna. Lawrence och hans medarbetare ha sålunda med sin senaste cyklotron, vars elektroder mäta 1,5 m i diameter, erhållit protoner med en kinetisk energi på 8 Mev och en strömstyrka av 25 μA.[1] Deutoner ha erhållits med en energi på 16 Mev och en strömstyrka på 10 μA. Det bör kanske nämnas, att oscillatorn gör av med en effekt på 60 kW. Cyklotronens vikt är 220 ton.

Fig. 3 visar en bild av cyklotronanläggningen vid Forskningsinstitutet för fysik, Vetenskapsakademien. Till höger se vi elektromagneten och till vänster därom vakuumkammaren uttagen från sin plats mellan magnetens poler. I bakgrunden till vänster aggregatet för genererande av avböjningsspänningen. Högfrekvensoscillatorn synes ej, då den är skymd av magneten.

Cyklotronen har visat sig vara ett ypperligt redskap vid studiet av atomkärnans struktur, vilket bäst bevisas därav att redan över 30-talet cyklotronanläggningar äro under byggnad eller tagits i bruk. De hastiga jonerna kunna själva direkt användas som projektiler mot den kärna, som skall undersökas, eller också låter man dem först bombardera litium-, bor- eller berylliumkärnor, i vilket fall de därvid utslungade neutronerna sedan användas som projektiler. Lawrence har beräknat, att man med den stora cyklotronen kan erhålla upp till 10^{10} neutroner per sekund. Av de resultat, som kärnreaktionerna givit, må framhållas de radioaktiva isotoperna. De övergå under utsändande av elektroner, positroner och γ-strålar till stabila kärnor med en i varje fall karakteristisk halveringstid. Detta gör, att man kan spåra dem, även när de förekomma i extremt låga koncentrationer. Detta förhållande har begagnats av såväl kemister som biologer, varvid man t. ex. erhållit mycket viktiga upplysningar beträffande cirkulationsförloppen och ämnesomsättningen inom den mänskliga organismen. Även medicinen har dragit nytta av dessa landvinningar på kärnfysikens eller om man så vill kärnkemiens område. Den mångfald radioaktiva ämnen, som man kan erhålla med cyklotronens hjälp, gör det möjligt att inom terapien avpassa den radioaktiva doseringen på ett mera ändamålsenligt sätt, än tidigare varit möjligt. Bland sensationella resultat inom detta område må nämnas, att man i Amerika med stor framgång behandlat blodsjukdomen leukemi, för vilken man förut saknat något som helst läkemedel.

---

[1] 1 μA $= 10^{-6}$ Amp.

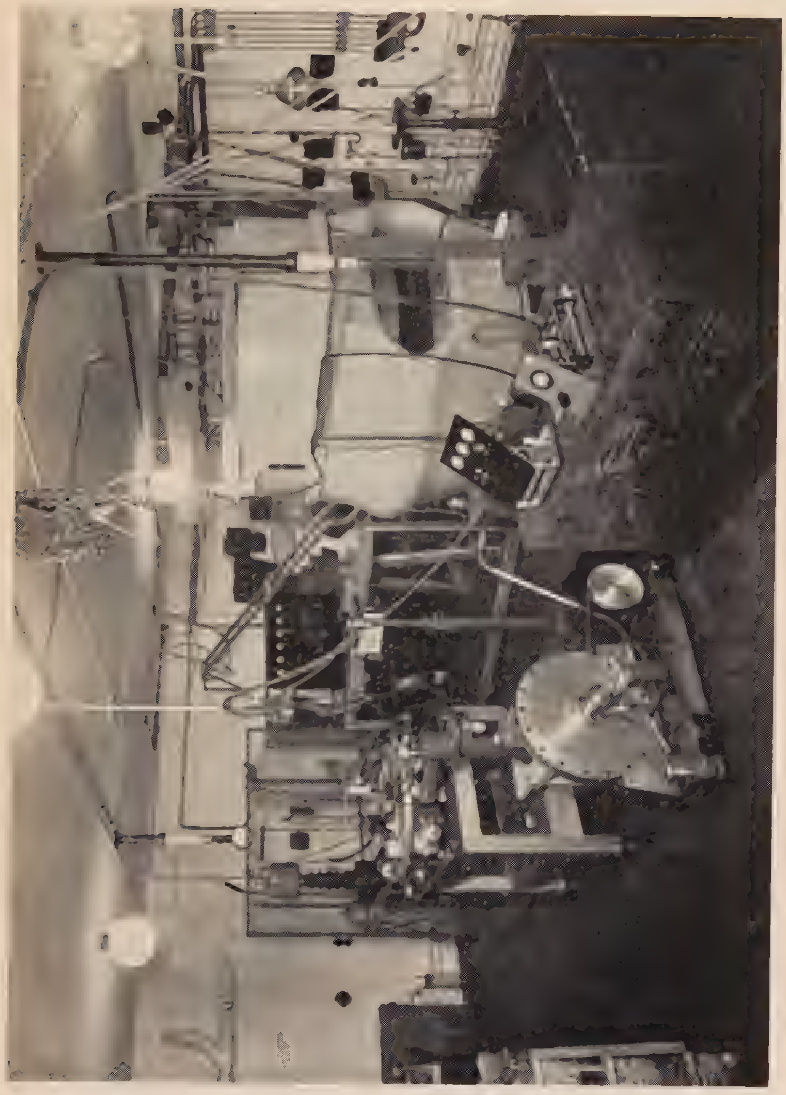


Fig. 3 Cyklotronlaboratoriet vid Forskningsinstitutet för Fysik, Vetenskapsakademien

Ernest Orlando Lawrence är född i Canton i South Dakota år 1901. Efter studier vid hemstatens universitet, i Minnesota och i Chicago blev han 1925 Doctor of Philosophy vid Yaleuniversitetet. 1927 blev han professor vid samma universitet och 1928 vid Californiauniversitetet i Berkeley. Sedan 1936 är han chef för Radiation Laboratory därstädes, vilket byggts särskilt för cyklotronarbetet och de undersökningar inom vitt skilda discipliner, som utföras i samband därmed.

Torsten Magnusson.

Richard Kuhn

Nobelprisen i kemi 1939.

Den 9 november 1939 utdelade Vetenskapsakademien icke mindre än tre Nobelpris i kemi. Det från 1938 reserverade priset tilldelades Richard Kuhn i Heidelberg, 1939 års pris delades mellan Adolph Butenandt i Berlin-Dahlem och Leopold Ruzicka i Zürich.

Som bekant existerar i Tyskland sedan 1937 en förordning, som förbjuder tyska medborgare att mottaga Nobelpris. Såväl Kuhn och Butenandt som den tyske Nobelpristagaren i medicin G. Domagk ha därför förklarat sig förhindrade att mottaga sina pris. Enligt Nobelstiftelsens stadgar skola prisen reserveras till 1 oktober 1940 men därefter fonderas.

Richard Kuhn är född i Wien 1900. Sin vetenskapliga utbildning fick han framför allt i München under Richard Willstätter, hos vilken han utförde en rad uppmärksammade arbeten, i synnerhet rörande enzymer, deras framställning och fysikaliska kemi. Kuhn blev 1926 professor vid tekniska högskolan i Zürich. Därifrån kallades han 1929 till föreståndare för den kemiska avdelningen av det nyupprättade Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung i Heidelberg.

De av Kuhns arbeten, som nu prisbelönats, behandla, liksom även Butenandts och till stor del Ruzickas, substanser av utomordentligt stor, särskilt biologisk betydelse, nämligen dels de s. k. karotinoiderna dels vissa vitaminer. Karotinoidgruppens gula eller röda färgämnen ha ju fått sitt namn efter det länge kända karotinet i moroten. Dettas kemiska natur, fastställd av P. Karrer, karakteriseras av förekomsten av ett stort antal konjugerade dubbelbindningar i molekylen (härav färgen).[1] Karotinet har ju på senaste tid fått ett extra intresse, då det visat sig vara modersubstansen till vitamin A (axeroftol). Den på sätt och vis enklast byggda karotinoiden är lycopin i tomater, nypon m. m. Lycopin har formeln $C_{40}H_{56}$, innehåller 13 dubbelbindningar och är alifatiskt. Dess molekyl kan tänkas sammansatt av 8 molekyler isopren (C_5H_8, metylbutadien), det enkla kolväte, varur åtskilliga mer eller mindre komplicerade naturprodukter kunna tänkas bildade (se nedan). Isoprenmolekylerna äro i lycopinet ordnade till en kedja, så att molekylen består av tvenne symmetriskt anordnade hälfter. Karotinet, vilket förekommer i tre modifikationer, beroende på dubbelbindningarnas läge, kan sägas vara en cykliseringsprodukt av lycopin. β-karotinets molekyl avslutas alltså i båda ändarna av en β-jononring. Ur β-karotinet kan vitamin A tänkas bildat genom oxidativ sprängning av molekylen på mitten. Åtskilliga naturliga färgämnen ha visat sig tillhöra karotinoiderna; Kuhn har isolerat och karakteriserat icke mindre än åtta stycken. I alldeles nya arbeten har han visat, att vissa karotinoider ha en dittills okänd intressant verkan. Han har nämligen funnit, att en s. k. gamon hos en grönalg är av karotinoidnatur. Gamoner äro av växters och djurs könsceller avsöndrade ämnen, som reglera växelverkan mellan de manliga och kvinnliga gameterna vid befruktningen (äggen avsöndra t. ex. ett ämne, som lockar spermatozoerna till ägget). Gamonerna äro tydligen icke alltid karotinoider: Hos sjöborren fann Kuhn ett färgämne av naftokinontyp.

---

[1] Se H. Hellström, Nobelpriset i kemi 1937, Elementa, *21*, 7, 1938.

Kuhns vitaminarbeten röra framför allt vitaminerna B_2 och B_6. B-vitaminerna äro ju för närvarande föremål för stort intresse, och vissa av dem ha redan en icke ringa medicinsk betydelse.

Kuhn kunde visa, att vitamin B_2 är identiskt med ett av honom ur mjölkvassla framställt gult färgämne, lactoflavin. Dess konstitution fastställdes ungefär samtidigt av Kuhn och Karrer. Kuhn genomförde den första syntesen av ett som vitamin B_2 verksamt ämne; syntesen av det naturliga färgämnet utfördes först av Karrer. Lactoflavinet är en glykosidartad förening mellan sockerarten ribos (märkligt nog förekommande i många biologiskt viktiga substanser, t. ex. i nucleinsyrorna) och ett dimetylderivat av isoalloxazin. Oberoende av Kuhn hade O. Warburg funnit, att det s. k. gula fermentet, en av honom i jäst upptäckt oxidationskatalysator, är sammansatt av äggvita och ett gult färgämne. Detta gula färgämne har visat sig vara en fosforsyreester av lactoflavin. Det måste då sägas vara sannolikt, att vitaminets verkan kommer till stånd därigenom att det i djurkroppen förestras med fosforsyra och i förening med det specifika äggviteämnet verkar som oxidationsenzym. För första gången har man alltså fått en om än tills vidare ofullständig, kemisk formulerbar bild av mekanismen för ett vitamins verkan. Annars vet man just icke mer, än att brist på ett visst vitamin förorsakar vissa sjukdomar.

Vitaminet B_6 kallas efter dess verkan på huden och hårbeklädnaden det antidermatitiska vitaminet. Vitaminet framställdes i ren form ur jäst av Kuhn. Andra forskare ha renframställt det ur andra material. Substansen, som fått namnet adermin, har av Kuhn visats vara 3-oxi-4,5-dioximetyl-2-metylpyridin.

ADOLPH BUTENANDT är född 1903. Han var en tid professor vid tekniska högskolan i Danzig och är nu föreståndare för Kaiser-Wilhelm-Institut für Biochemie i Dahlem.

Butenandt var en av de första, som från kemiska utgångspunkter angrep den betydelsefulla grupp av ämnen, vi kalla sexualhormoner. Hans arbeten äro på detta område fundamentala. Deras väsentligaste resultat är, att sexualhormonerna äro av samma typ (innehålla samma ringsystem av kolatomer) som vissa andra redan förut kända substanser av fysiologisk betydelse, framför allt sterinerna. Exempel på steriner äro det länge kända kolesterinet i gallan samt det i jäst m. m. förekommande ergosterinet, modersubstans till de antirakitiska vitaminet D, kalciferol. Sexualhormonerna innehålla alltså samma av tre sexringar och en femring bestående ringskelett, som sterinerna, gallsyrorna, hjärtgifterna (digitalis- och strophantusglykosiderna) och saponinerna. Skillnaderna mellan de olika hithörande ämnena är betingad genom olika vid ringsystemet fästade sidokedjor.

Butenandts arbeten röra de s. k. funktionella, i könskörtlarna bildade sexualhormonerna (i motsats till de s. k. överordnade, gonadotropa hormonerna, vilka bildas i hypofysen och via blodet sätta könskörtlarna i funktion). De funktionella sexualhormonerna indelas i tre grupper: a) de oestrogena, brunstframkallande (kvinnliga sexualhormoner, follikelhormon), b) de androgena (manliga) hormonerna, samt c) progesteron, det i corpus luteum i äggstockarna förekommande hormonet. Det brunstframkallande hormonet lyckades Butenandt 1929 utvinna i ren form ur gravidurin. Oberoende av honom utfördes isoleringen även av andra forskare. Det typiskt kvinnliga hormonet har fått namnet oestron. Sedermera ha ytterligare fyra kvinnliga hormoner med synnerligen likartad byggnad isolerats. Redan 1932 uppställde Butenandt oestronets kemiska formel, vars riktighet han sedermera fullt bevisat.

Adolf Butenandt

Leopold Ruzicka

Kemiskt ganska likartade äro de manliga sexualhormonerna, varav Butenandt framställt två i ren, kristalliserad form. Det typiska manliga hormonet kallas androsteron; dess formel skiljer sig från oestronets endast i sidokedjorna. En syntesmetod av stor allmän användbarhet har angivits av Ruzicka.

Slutligen har Butenandt (samtidigt med andra forskare) renframställt progesteronet. Han har också angivit dess struktur samt en metod för dess syntes ur kolesterin.

Det är utan tvivel egendomligt, att hormoner med så olika verkan som de manliga och kvinnliga ha en så nära lika kemisk byggnad. Allra mest egendomligt är att t. o. m. »bisexuella» hormoner med såväl androgena som oestrogena egenskaper existera.

L. Ruzicka är för närvarande knuten till den tekniska högskolan i Zürich. Tidigare var han professor i Utrecht. Han är enligt uppgift jugoslavisk medborgare och i så fall den förste jugoslaviske nobelpristagaren.

Hans nu prisbelönta arbeten behandla, som redan av det sagda framgår, delvis sexualhormonerna. Hans kanske viktigaste och mest kända arbeten röra annars de högre terpenerna, den serie av ämnen, som börjar med de vanliga terpenerna och kan anses sluta i kautschucken. En ledande tanke i hans arbeten har varit hypotesen, att alla dessa ämnen kunna anses uppkomna genom kondensation av det ovan nämnda kolvätet isopren. (Antalet kolatomer i terpenernas molekyler är alltid jämnt delbart med fem!). Möjligt (ehuru svårare) synes t. o. m. vara att förklara sterinernas och andra dithörande ämnens bildning på samma sätt.

Viktiga arbeten av Ruzicka och hans medarbetare behandla vidare sådana ämnen, vars molekyler innehålla ringar med stort antal kolatomer. Som bekant innehålla många organiska ämnen dylika ringar. Sexringar äro ju ytterst vanliga, likså femringar. Ringar med annat antal kolatomer äro däremot sällsynta, och tills för en del år sedan ansågs, att ringar med mer än åtta kolatomer överhuvud icke existerade. Ruzicka har emellertid visat, att ringar med över tio och ända upp till 30 kolatomer kunna framställas, ja att vissa av dessa s. k. polymetylener t. o. m. visa en hög stabilitet. Många ämnen av denna typ förekomma i naturen. De synas överhuvud vara karakteriserade av stark lukt. Så höra till denna grupp t. ex. zibeton i skunkdjurens sekret samt muskon i mysk. Zibeton är en cyklisk keton med 17 kolatomer och en dubbelbindning i ringen, muskon är likaledes en keton med femton kolatomer i ringen och en extra metylgrupp.

K. Myrbäck.

Geometri för nybörjare.

Reflexioner kring några nya läroböcker.[1]

Av **SIGURD ÅSTRAND.**

Den som skall skriva en lärobok i geometri står inför en mycket svår uppgift. Han skall nämligen på en gång tillgodose två olika krav, det logiska och det psykologiska.

Det förra betyder, att systemet skall vara fast och riktigt sammanfogat, att definitioner, axiom och postulat klart skiljas från åskådningar å ena sidan och från bevis å andra, samt att detaljerna fogas riktigt och oemotsägligt till varandra. Det senare betyder att stoffet grupperas och ordnas samt bjudes på sådant sätt, att ungdomen kan tillgodogöra sig det.

De två kraven äro väl icke oförenliga i princip. Optimisten förfäktar den satsen, att den mänskliga naturen av sig själv lutar åt det logiska, och pessimisten måste i alla fall medge, att han inte kan inse, varför en ung människa skulle ha lättare att lära sig något ologiskt än något logiskt. Svårigheten att förena dem är emellertid rätt stor, något som varje geometrilärare torde ha en ingående erfarenhet av.

Kravet på en fullt logisk lärobyggnad kan icke tillfredsställas i en lärobok, bland annat av det skälet att ett obestritt logiskt geometriskt system ännu icke sett dagens ljus. Det är emellertid säkert, att geometriundervisningen i stor utsträckning ansetts ha till uppgift att vara en sorts logisk uppfostran, och de allra flesta moderna lärare torde kunna vara överens om att bredvid uppgiften att ge faktiska kunskaper i geometri och träna den åskådliga föreställningsförmågan har geometriundervisningen att vara en tuktomästare för det barnsliga tänkandet till en allt högre grad av reda och klarhet. Risken att alltför mycket lägga de rent psykologiska synpunkterna till grund för geometriundervisningen ligger just i att man därigenom kan komma att förbise, att geometriundervisningen bör och skall ta sin andel i det besvärliga arbetet att föra in ungdomen i den svåra konst, som heter abstrakt tänkande, vilket arbete rent av kan betecknas som en av huvuduppgifterna för skolundervisningen överhuvudtaget.

---

[1] V. Lenander, Geometri för realskolan, Hugo Geber, Stockholm 1938, 97 s., kr. 2: 25.

J. Jensen og E. Torsting, Geometri for Mellemskolen, Jul. Gjellerup, København 1939, 117 s., d. kr. 4: —.

O. Ingebrigtsen og K. Piene, Geometri, J. W. Cappelen, Oslo 1939, 129 s., kr. 3: 60.

Nu ligger svårigheterna för en psykologiskt orienterad geometriundervisning däri, att vår kännedom om det mänskliga psykets utvecklingslagar är så osäker och i att en av de få saker vi veta med någorlunda säkerhet är att utvecklingen är underkastad synnerligen stora individuella variationer. Det kommer därför mest an på läroboksförfattarens känsla för vad som är rimligt och riktigt, när det gäller att skriva en lärobok för nybörjare i geometri. Av det förda resonemanget framgår också, att en kritik av en dylik bok från psykologiska synpunkter måste bli rätt subjektiv.

Icke desto mindre skall i det följande göras ett försök att från dylika synpunkter belysa några nyutkomna läroböcker i elementär geometri, och början göres med V. Lenander: Lärobok i geometri för realskolan. Boken omfattar hela realskolekursen och börjar alltså med det som skall genomgås i klass 1^4 eller 2^5. Författaren har bemödat sig om att låta även andra synpunkter än de rent logiska göra sig gällande, vilket betonas i förordet under anförande av såväl Poincaré som de metodiska anvisningarna för våra läroverk. Det är därför så mycket mer ägnat att uppväcka förvåning, att den första paragrafen i denna för 12- till 13-åringar avsedda del utgöres av en rad definitioner — ordet definition förekommer visserligen icke. Vid alla åldrar, men framför allt vid den ålder det här är fråga om, måste man först få arbeta så mycket med ett begrepp, att man förnimmer ett behov att skilja det ifrån andra närbesläktade, innan man kan få något intresse för en definition och därigenom möjlighet att i egentlig mening förstå densamma.

Överhuvudtaget finner jag den förberedande kursen mindre lyckad. En rad begrepp exponeras, t. o. m. begreppen bissektris och transversal — även orden användas — något enkelt bevis ges (bissektriserna till sidovinklarna äro vinkelräta mot varandra), men eleverna få mycket liten handledning till geometriskt arbete på egen hand. Framför allt torde de icke på denna kurs förvärva större förtrogenhet med användandet av de enkla geometriska instrumenten. Andan i detta avsnitt tycks mig strida mot förordet och i viss mån också mot andan i det följande.

Kursen för de närmast högre klasserna är upplagd som en bevisande geometri. Naturligtvis företer den en hel del speciella drag både i grupperingen av satserna och formuleringarna. Författaren anger, att han av pedagogiska skäl skjutit fram parallellbegreppet, så att detta rent av blivit det första, som genomgås i den egentliga geometrikursen. Vilka dessa pedagogiska skäl äro anges icke, om icke uttalandet att parallellbegreppets behandling är det svåraste i den elementära geometrien skall uppfattas som ett sådant. Hur som helst har denna svårighet lösts på ett synnerligen tillfredsställande sätt. Den vanligen använda negativa definitionen på parallella linjer, vars innehåll är svårt för eleverna att konkret föreställa sig, har ersatts med följande: »Två räta linjer sägas vara parallella, om de med en transversal bilda lika stora likbelägna vinklar». Därigenom har resonemanget så att säga förts in på papperet och eleverna ha fått en klar åskådning till grund för det fortsatta arbetet.

I kongruensläran, som placerats som andra kapitel på 3^5:s kurs grundas första kongruensfallet på »första avbildningssättets» entydighet. Men de ritningsuppgifter, som höra till detta avbildningssätt, äro till sin väsentliga del placerade efter satsen. De komma på detta vis endast att illustrera satsen och befästa den genom ett diktat vunna kunskapen. Den omvända ordningen: först ritningarna och sedan ur dem satsen förefaller att vara den naturliga.

Vid genomgången av andra kongruensfallet går det också till på detta senare sätt. Detta härledes nämligen ur det första med hjälp av en s. k. inkongruenssats och det är just denna som tages ur åskådningen med hjälp av en systematisk undersökning av olika figurer. Författaren kallar själv det grepp han här använder för föränderlig eller rörlig figur. Han betonar i förordet betydelsen av studiet av dylika figurer. Här ha nämligen eleverna framför sig åskådliga bilder av ett beroende av det slag som längre fram kommer att benämnas en funktion. Man förbereder alltså på detta sätt funktionsbegreppets införande. Dessa föränderliga figurer komma till användning på åtskilliga håll i läroboken och utgöra en av bokens speciella pedagogiska förtjänster.

Läroboken innehåller även realskolans kurs i planimetri, vilket synes vara mycket lämpligt. Den skarpa gränsen mellan geometri och planimetri måste anses både konstlad och olämplig. Den hindrar ofta svagare elever att begripa sammanhanget mellan dessa områden, och geometrisk och planimetrisk diskussion av ett och samma problem kommer då icke att betyda ett fördjupande av kunskapen utan ett förvirrande av eleven. När man som författaren ibland grundar de geometriska satserna på och ibland verifierar dem med ritningar och mätningar, förefaller det synnerligen lämpligt och naturligt att behandla de två områdena i ett sammanhang. De planimetriska övningsuppgifterna tyckas mig rätt fåtaliga, men detta är knappast av någon betydelse, då det finns gott om dylika i de flesta räkneläror.

Det är visserligen sant, att en pojke i mellanklasserna inte kan ha något utbildat sinne för det originella eller eleganta, men en känsla för dylikt ha nog de mera begåvade. Det är därför av en viss betydelse, att det finns en mängd roliga och goda detaljer på olika håll i läroboken. Den utmärkta vikningsuppgiften till illustrerandet av satsen om triangelns vinkelsumma (fig. 15) var det första som slog mig. Påpekandet att konstruktionen av en normal till en linje genom en given punkt på denna är ett specialfall av konstruktionen av en bissektris, uppritandet av en linje parallell med en given genom en given punkt utanför linjen med hjälp av en romb, införandet av termerna kordafyrhörning och tangentfyrhörning äro andra dylika smådrag. Den omsorgsfulla och roliga behandlingen av Pythagoras sats kan också nämnas liksom en del övningsuppgifter, särskilt mot slutet av boken. Den avslutande paragrafen »Praktisk-geometriska uppgifter» är utmärkt. Där finnas de av så många ungdomar bittert — om också ej medvetet — saknade tillämpningarna på det verkliga livets förhållanden. Måtte nu inte de lärare, som komma att använda boken, spara dem till sist — då hinner man ju som bekant aldrig med dem — utan utnyttja dem i tid. De innehålla något av det bästa i boken.

Man får ett mycket starkt intryck av att författaren medvetet strävat efter att anpassa sin lärobok efter det som är fattbart för elever på åldersstadium det här är frågan om. De många och rediga, ofta på olika sätt varierade figurerna vittna om det avseende han fäster vid att lärjungarna verkligen få åskådliga och klara föreställningar om satsernas innehåll. Åt samma håll syftar också de resonemang om symmetriegenskaperna hos en del figurer, som tagits med, uttryckligen icke för att utgöra någon slags genväg vid bevisningen utan för att uppfostra »det geometriska ögat». De resonerande sammanfattningarna här och där och små klargörande utredningar på många ställen ha likaledes en rent pedagogisk syftning och röja den intresserade och erfarne läraren.

En mycket radikalare omläggning av den för oss i Sverige traditionella geometriläroboken har gjorts av de danska lärarna Jensen och Torsting i deras »Geometri for Mellemskolen». Redan inledningen, vars stoff åtminstone till en del brukar återfinnas i de svenska böckernas »historiska notiser», varslar om att författarna från början sökt förvärva sig den ena av de två viktigaste bundsförvanter som en lärare kan ha, nämligen elevernas intresse. Även den andra bundsförvanten värdera de tydligtvis högt; den heter eget arbete. De första raderna i själva läroboken lyder: »Vik ihop ett stycke papper, så att det bildas en skarp kant ...». Av företalet kan man förstå, att elevernas eget arbete måste spela stor roll. Där anges nämligen, att de elever, som skola använda boken, behöva rutat papper, blankt papper, genomskinligt papper, linjal och vinkelhake — den ena av dessa försedd med millimetergradering — gradskiva och passare med både stål och blyertsspets. Användningen av genomskinligt papper i geometriundervisningen är en nyhet för mig. Betydelsen av detta vid en experimentellt betonad geometriundervisning liggger emellertid i öppen dag.

I den femte paragrafen möter man någonting, som är rätt egendomligt i en svensk lärares ögon. Där står: »Märk ut en punkt P med en passarspets i ritboken och rita en hel mängd (t. ex. 32) linjer, som alla skära varandra i P. Härigenom får man en hel blyertsyta omkring P, då två linjer, som skära varandra, icke blott ha punkten P utan ett helt stycke gemensamt. Man säger, att två sådana linjer ha dålig skärning.» I svensk geometri rör man sig i regel i det absoluta rummet, och ritningarna äro endast mer eller mindre goda symboler, som underlätta tankens arbete, eller också kanske man hoppar fram och tillbaka mellan olika betraktelsesätt. Jensen och Torsting ta bestämt parti från början. Den geometri de lära ut har ritpapperet och blyertslinjerna till verklighetsunderlag. I konsekvens härmed kallas det stycke, som en rät linje har gemensamt med den cirkel, som den tangerar, för »Røringsstycket». En övningssats lyder på följande sätt: »Rita en rät linje och drag en normal genom en godtycklig punkt A. Rita därefter cirklar med medelpunkten på normalen och radierna 1 cm, 2 cm och så vidare, som gå genom A. Mät för varje cirkel längden av 'røringsstycket'.»

Parallella linjer definieras på ett sätt som kommer rätt nära det som Lenander använder: »Två linjer kallas parallella, när de ha en gemensam normal». I detta kapitel göres för övrigt vidsträckt bruk av det genomskinliga papperet, då nämligen parallellförskjutningen här spelar en framträdande roll.

Kongruensfallen behandlas icke förrän någonstans mitt i boken, och kongruensen slutes då direkt ur triangelkonstruktionernas entydighet. En dylik placering av kongruensläran går mycket väl för sig i denna lärobok, ty de bevis, där triangelkongruensen skulle behövts, klaras upp med vikningar och resonemang om symmetri. Jag kan emellertid icke förstå, varför läran om kongruenta trianglar tagits så sent, då kongruensen på intet sätt bevisas utan får framgå ur konstruktionerna; författarna reservera sig rent av för det fall att det blir dålig skärning vid uppritandet. Svårigheten ligger ju i alla fall inte i kongruensfallen som sådana utan i de s. k. bevisen för dem.

I den danska läroboken letar man förgäves efter våra vanliga rubriker, antagande, påstående o. s. v. samt efter hänvisningar till förut genomgångna satser. Detta betyder icke, att framställningen saknar överskådlighet och reda eller brister i stringens. Kanske kan detta förhållande i stället vara ägnat att uppväcka något tvivel på att den formella exercis, som vi gärna driva på detta område, har det stora värde, som vi ofta föreställa oss. Jensen och Torsting fästa tydligen i varje fall inte så stort avseende vid denna drill utan sätta som sitt huvudsakliga mål att bibringa kunskaper om de geometriska fakta. Och metoden är densamma hela boken igenom: eleven skall under sitt eget arbete i ritboken göra så ingående bekantskap med stoffet, att detta blir hans egendom.

Överhuvudtaget är dansk geometri för begynnelsestadiet sådan den möter i denna lärobok, såväl i texten som i de där avtryckta uppgifterna för mellemskoleexamen, mycket konkretare och dessutom mera praktiskt inriktad än den svenska. Bland annat drages ingen gräns mellan planimetri och geometri. Typiskt för ett stort antal av de övsingsuppgifter som finnas i boken är den följande: »Konstruera en parallellogram ABCD, där vinkeln A är 75°, diagonalen AC är 6 cm och avståndet mellan AD och BC är 4 cm». I de flesta svenska läroböcker skulle man funnit en allmän formulering av problemet: att upprita en parallellogram ABCD, där vinkeln A, diagonalen AC och avståndet mellan två motstående sidor äro givna. Man behöver inte tveka om vilkendera formuleringen, som är lättast tillgänglig för eleverna.

Den kurs, som behandlas i den omtalade läroboken, överensstämmer rätt väl med den svenska realskolekursen, ökad med ett kapitel omfattande elementär trigonometri, vilket kapitel emellertid enligt förordet icke behöver läsas, om man icke vill. Behandlingen är fylligare än vad vi i de svenska skolorna åtminstone för närvarande kunna tänka på att ge, helst om alla ritningar skola utföras och diskuteras i klassen.

Naturligtvis kan man önska ett och annat. Det har t. ex. förvånat mig, att författarna icke direkt försöka få eleverna att känna ett behov av logiskt bevis. Man får dem icke att godvilligt lämna metoden att stödja sig på figuren, d. v. s. på den mer eller mindre klara åskådningen, och övergå till metoden med ett logiskt bevis, om man inte omsorgsfullt uppammar och understöder deras logiska instinkter. Vridningar och vikningar användas som bevismetod hela boken igenom, även sedan trianglarnas kongruens är behandlad. Jag har en känsla av att författarna lagt så mycket eftertryck på att göra kursen tillgänglig för dem som skall läsa den att uppfostran till abstrakt tänkande blivit åtminstone i någon mån försummad.

Jensen och Torsting ha skrivit en bok, som är en mycket stimulerande och nyttig läsning för en svensk geometrilärare. Det friska greppet gör att gamla saker ofta verka som nya, och det är roligt att komma fram till gamla välkända satser på helt andra vägar än man är van vid. Och så finns där många och goda övningsexempel, som med stor fördel kunna utnyttjas i undervisningen här hemma. Författarnas största förtjänst utgöres i alla fall av deras förmåga att göra stoffet konkret. Med denna lärobok i handen torde det vara möjligt för vem som helst att intressera även de matematiskt mycket medelmåttigt begåvade för geometri. Gång efter annan har jag kommit på mig själv med att beklaga, att boken inte är skriven på svenska.

Slutligen har jag fått tillfälle att gå igenom en splitterny norsk lärobok i geometri. Den är författad av Ingebrigtsen och Piene och godkänd av kyrko- och undervisningsministeriet den 4 oktober 1939. Även denna bok avviker rätt mycket från det som en svensk lärare är van vid. Jag måste lämna osagt, huruvida dessa böcker för danska och norska läsare innehålla lika mycket nytt i synpunkterna på och grupperingen av stoffet som de göra för svenska.

Ingebrigtsen och Piene ha en programförklaring i förordet. De mena, att den tid som står geometrien till buds i mellanskolans två första klasser, är alltför knappt tilltagen för att man skulle hinna att ge en experimentell grundval till de geometriska satserna före den deduktiva behandlingen av dem. »En deduktiv lärogång, som ger stort utrymme för aktivt elevarbete och lägger mindre vikt på systemets formella uppbyggnad, är det program, som vi tro bäst tillfredsställer läroplanens fordringar.» De fortsätta: »Vi välja därför att gå så direkt in på ämnet att eleverna kunna komma igång med ritningsarbetet redan de första timmarna och ta upp andra kongruensfallet först och så tidigt det är möjligt med hänsyn till elementarkonstruktionerna».

Den psykologiska svaghet, som ligger i att försöka lägga upp en kurs för 13- och 14-åringar deduktivt, gör sig märkbar egentligen endast i början. När författarna väl blivit varma i kläderna, tyckas de ha en utomordentligt fin känsla för hur man skall bygga upp och kombinera ihop stoffet, så att det hela skall bli förståeligt och intressant.

Eftersom lärogången skall vara deduktiv, måste den gå ut från några fasta punkter. Författarna våga eller vilja följaktligen icke gå ut ifrån att elevernas begrepp eller rättare sagt allmänföreställning om t. ex. den räta linjen är tillräckligt fast och säker från början, utan de skjuta in en definition för att klargöra begreppet. Den lyder: »Vi tänka oss, att vi stöda linjalkanten i två punkter, som ligga stilla, och att vi kunna låta linjalen rotera omkring dem. Vi säga då att kanten är rätlinjig, om även alla andra punkter på den ligga stilla.» Jag kan icke tro att denna definition lägger något till den föreställning om vad en rät linje är, som eleverna i själva verket arbeta med, men den kan säkert krångla till saken för en del nybörjare. Undersökningen av en vetenskaps grundbegrepp kommer psykologiskt — och historiskt! — först långt fram i utvecklingen. De allmänföreställningar, som sammanhänga med grundbegreppen, äro tillräckligt konkreta och tillräckligt överensstämmande från den ena människan till den andra för att tillåta, att systemet bygges upp på dem. Det är först sedan man hunnit rätt långt i detta systembyggande, som ett verkligt behov av att granska och klargöra grundvalarna uppstår.

Den tid man spar genom att lita till elevernas allmänföreställningar kan användas till empirisk geometri. Ty denna är — jag talar alltjämt ur psykologisk synpunkt — oundgängligen nödvändig om kunskaperna skola få en fast grund i verkligheten. Att Ingebrigtsen och Piene sträva efter att få en deduktiv lärogång hindrar emellertid icke att de vid många tillfällen lämnat behörigt utrymme åt de induktiva synpunkterna, en sak, som jag skall återkomma till nedan.

Lärogången i stort kan utläsas ur innehållsförteckningen. Efter en inledning på 15 sidor, uppdelad på ett avsnitt om räta linjen och ett om plan och planfigurer följer ett kapitel på mer än 65 sidor om de viktigaste planfigurerna. Detta är uppdelat på följande underavdelningar: cirkeln, vinkeln, parallella linjer, speciella fyrsidingar, reguljära polygoner och samband mellan sidor och vinklar i trianglar. Härefter kommer geometriska orter (14 sidor), ytmätning (16 sidor) och likformiga trianglar (16 sidor). Man lägger särskilt märke till att cirkeln behandlas mycket tidigt, vilket ur flera synpunkter förefaller förmånligt.

Några rader ur förordet skola anföras, då de innehålla en betydelsefull synpunkt för uppläggningen av kursen. Där står: »Kapitlet geometriska orter tages upp senare som en rekapitulation av känt stoff från en ny synpunkt. Vi anse det vara en fördel, att detta begrepp blir väl förberett genom en funktionell tankegång i de föregående kapitlen, genom diskussion av variabla figurer och övningar i konstruktioner av punktrader.» Under min skoltid gjorde funktionssynpunkten sitt intåg i det svenska gymnasiet, vilket bland annat tog sig uttryck i att Möllers algebra byttes ut mot modernare läroböcker. Nu skall denna synpunkt beaktas redan i realskolan, det betonas av alla de tre läroböcker, som det är tal om här. För en gångs skull är denna vandring av gymnasiesynpukter ned i realskolan icke enbart av ondo; den är kanske rent av psykologiskt rimlig. En fjortonåring torde ha mera sinne för dylika sammanhang än för syllogismer.

För att illustrera, hur Ingebrigtsen och Piene lägga upp sin lärogång i detalj, skall jag redogöra för deras behandling av romben; den tar knappt en sida. Efter definitionen följer: »Den är en parallellogram (enl. 53 a), alltså halvera diagonalerna varandra. Den ger också ett nytt exempel på sats 39, alltså äro diagonalerna också vinkelrätta mot varandra och halvera rombens vinklar. Vad kan man då säga om rombens symmetri? Bevisa också, att avstånden mellan två och två motstående sidor äro lika stora. Rita en romb endast med linjalen; du går ut ifrån att linjalens kanter äro parallella.» Sedan följa fyra övningsuppgifter. Den första består av konstruktionsuppgifter, då sida, diagonaler eller vinklar äro givna i centimeter resp. grader. I den andra äro två sträckor a och b givna; de placeras så att de skära varandra mitt itu under räta vinklar; man skall bevisa, att deras ändpunkter bilda en romb. Den tredje lyder: »Konstruera en romb, där en diagonal är en given sträcka a och omkretsen är $3a$. Kan omkretsen vara mindre än $3a$?» Till slut kommer en uppgift, som går ut på att inskriva en cirkel i romben. Som av ovanstående framgår är texten starkt koncentrerad och deduktivt betonad. Den är i allmänhet icke uppställd på för oss traditionellt sätt med antagande och påstående. Dylika uppställningar förekomma dock emellanåt, särskilt i fråga om omvändningar av satser. En annan typisk avvikelse från det hos oss vanligaste är, att alla rombens olika egenskaper äro sammanförda på ett ställe. I en euklideiskt uppställd lärobok blir det lärarens uppgift att ur de olika satserna plocka tillsammans en bestämd figurs olika egenskaper. De ovan anförda övningsexemplen vilja tydligtvis göra eleven förtrogen med rombens egenskaper. Funktionssynpunkten kommer fram i den tredje övningsuppgiften och det i den form, som i förordet benämnes variabla figurer.

Boken innehåller ett mycket stort antal övningsuppgifter och en del stycken till fri läsning, båda inarbetade i texten och tillsammans upptagande inemot halva sidantalet. Övningsuppgifternas svårighetsgrad är rätt varierande, en del äro mycket lätta, en del äro rätt svåra. Men de tyckas vara omsorgsfullt ordnade så att alltid de enklaste komma först.

Den deduktiva synpunkten kommer fram däri att övningsuppgifterna i stor utsträckning äro tillämpningar på det genomgångna — jämför de ovan anförda uppgifterna till romben. Den induktiva synpunkten kommer fram i en del uppgifter som förbereda satser, som först långt senare bli föremål för systematisk behandling. Som illustration till det sagda kan anföras en övningsuppgift till stycket 14. Jag skall citera övningsuppgiften i sin helhet, då jag finner dess formulering mycket karakteristisk. Den lyder: »Märk ut A och B på avståndet 5 cm från varandra. Finns det punkter, som ha lika stora avstånd från A och B? Ja, det finns många sådana punkter. Avstånden från A och B kunna till exempel vara 5 cm. Bestäm dessa punkter. Avstånden kunna vara 6 cm. Bestäm också dessa punkter. Bestäm flera punkter, som (var för sig) ha lika stora avstånd från A och B och märk dem med en tydlig prick. Vad är det minsta detta avstånd kan vara?» Teorien för mittpunktsnormalen utredes sedan först i stycket 79.

Överhuvudtaget tyckas övningsuppgifterna vara utomordentligt omsorgsfullt och väl valda. Formuleringarna avvika från vad vi äro vana vid bland annat genom sitt speciella och konkreta innehåll. På denna punkt visa de mycket stor överensstämmelse med Jensens och Torstings uppgifter. Rätt ofta bestå de av flera sammanhängande uppgifter på det sätt, som man känner igen från de norska examensuppgifterna. Då äro de emellertid också formulerade så, att eleverna knappast ha någon svårighet att hålla isär de olika problemen. Som exempel kan jag anföra uppgiften 337, som lyder: »Givet en likbent triangel ABC, där $AB = 7$ cm och $AC = BC = 12{,}5$ cm. Konstruera och beräkna normalen från C till basen AB. Konstruera normalen från A till BC och leta reda på likformiga trianglar i figuren. Beräkna med hjälp härav normalen från A och de delar, vari den delar BC. Kontrollera svaren medelst mätning.»

Författarna skilja skarpt och principiellt mellan att rita och att konstruera. Med det senare uttrycket menas naturligen att figurerna skola utföras endast med passare och linjal. För ritningarna förutsättes att eleverna ha tillgång till gradskiva och minst en vinkelhake. Författarna lägga tydligen stor vikt vid att figurerna bli tydligt och noggrant utförda. Ibland kan man finna en liten anmärkning till en övningsuppgift: är ritningen väl utförd, ligga de sökta punkterna i en rät linje? Då mått nästan alltid uppges för ritningarna, är det en enkel sak för läraren att kontrollera att figurerna äro riktiga, en sak som är av stor betydelse, när det gäller att i större utsträckning driva denna ritning som klassundervisning. En aktiv geometriundervisning är omöjlig om man icke gör det.

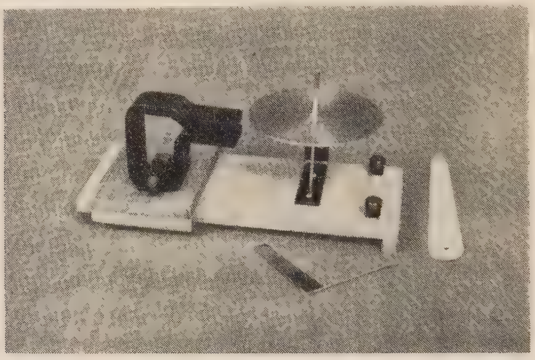
Likaledes lägga författarna an på att uppfostra det geometriska ögat. En metod består i att uppgifterna, speciellt en del ortproblem, formuleras så att det gäller att till en början försöka att efter ögonmått peka ut, var de sökta punkterna ligga och först därefter konstruera dem.

Styckena till fri läsning består till största delen av historiska notiser, roligt, klart och kortfattat formulerade. På slutet finnes ett avsnitt om likformig avbildning och på andra håll en del trevliga ritningsuppgifter, vilka tydligen äro avsedda att genomarbetas av särskilt intresserade elever. Båda dessa saker bidraga till att göra boken rolig. Detta gör också en del inskjutna resonemanger och praktiska övningsexempel. Några exempel på praktiska uppgifter äro: beräknandet av bildstorleken på näthinnan hos människan, jämförelse mellan storleken hos Breievatnet i Stavanger och Lungegårdsvatnet i Bergen och uppritning av de olika ljussektorerna från fyrarna Holmengrå och Lilla Torungen.

Stoffet i Ingebrigtsens och Pienes lärobok är alldeles för stort för att vi i en svensk skola skulle hinna med det. I Norge ha de väl icke heller så gott om tid men boken är utom för realskolan avsedd för de två första gymnasieklasserna. Att läsa boken är emellertid ett mycket givande studium och den borde icke saknas i något svenskt läroverksbibliotek — en sak som för övrigt lika mycket gäller om de övriga två här omtalade böckerna. Jag kan icke undgå att finna, att den norska lärobokens största förtjänst är densamma som den danskas: den ger en så konkret framställning av stoffet. Dessa två böcker beteckna ett stort steg mot en psykologiskt riktigare geometriundervisning. De ha faktiskt hunnit en bra bit mot målet att göra undervisningen om grundegenskaperna hos de plana figurerna både förståelig och intressant.

En apparat för virvelströmmar.

En kopparskiva med 10 cm diameter är försedd med en 2,5 mm axel, som lagrats i en U-formad bygel. En magnet med kort luftgap är monterad på en släde, som kan skjutas fram längs fotplattan, så att kopparskivan löper mellan magnetens poler. Bygeln och därmed skivans medelpunkt är ansluten till en klämskruv. I den andra klämskruven kan en släpborste fästas, så att den ligger an mot skivans periferi. En visare av celluloid kan trädas på skivans axelskruv. Släpborste och visare synas i fig. på bordet framför, resp. till höger om fotplattan.



Försök 1: Man sätter fart på skivan genom att rulla axelns gummiklädda ända mellan fingrarna och skjuter omedelbart fram magneten. Skivan stannar efter ungefär 5 sekunder. Man flyttar undan magneten och sätter ånyo fart på skivan. Den går åtminstone 90 sekunder. — Anordningen är bekvämare än Waltenhofens pendel. Med apparaten visas direkt, hur bromsen i elektriska energimätare fungerar.

Försök 2: Släpborsten påmonteras, magneten skjutes fram, så att dess luftgap befinner sig mellan skivans medelpunkt och borstens kontaktpunkt, en spegelgalvanometer anslutes till klämskruvarna, och skivan sättes i gång. Man påvisar, att en induktionsström uppkommer och att dess styrka beror av rotationshastigheten samt av magnetens läge (fältets styrka), likaså att ström uppkommer, om skivan får stå stilla men magneten flyttas.

Försök 3: Man skjuter fram magneten, träder celluloidvisaren på skivans axelskruv och drager hastigt undan magneten. Skivan vrider sig 25° à 50° efter magneten. — Med detta försök visar man vridfältet. Det är enklare än att använda en roterande magnet. — Apparaten tillverkas av Rudolph Grave A/B, Stockholm.

Alfred Nilsson.

Några förslag till uppgifter vid de kemiska laborationerna i gymnasiet.

Av EINAR NORDEFELDT.

De i skolstadgan föreskrivna laborationsövningarna i kemi utnyttjas möjligen ej på alla håll så effektivt som önskligt är. Det torde finnas en och annan lärare, som låter laborationerna i alltför stor utsträckning nedsjunka till ett tämligen monotont konstaterande av de experimentella fakta som omtalas i läroboken. Man låter eleverna utföra fällningsreaktioner och liknande i provrör i avsikt att verifiera bokens uppgifter, analysera enkla salter enligt ett förelagt schema, framställa några metallsalter enligt föreskrift samt utföra några ytterst enkla organiska reaktioner, ofta blott provrörsmässigt och utan att isolera produkterna eller kontrollera deras existens i någon kvantitativ mening. I synnerhet bland privatister, men även i alltför stor utsträckning bland komplettanter, har jag träffat personer, vilkas erfarenhet av laborationer stå på denna enkla nivå eller lägre.

Det torde kunna ifrågasättas, huruvida dylika experiment, som vanligen blott ha till ändamål att meddela eleven isolerade fakta och sakuppgifter, ej borde — i större utsträckning än som nu vanligen sker — i stället utföras under *lektionerna* av läraren eller av någon för varje gång på förhand utsedd elev. Dessa experiment innebära ju i sig själva ej mer stimulans än t. ex. uppräknandet av ett lands städer eller av data i historien. Deras berättigande torde huvudsakligen bestå i att de utgöra underlag för lärarens utredningar samt stödpunkter för elevernas uppbyggande av kursens stomme. De intressera ej nämnvärt eleven. Denne ålägges t. ex. att enligt viss föreskrift i provröret blanda tvenne lösningar för att konstatera att en enligt uppgift vit fällning bildas — men kan detta fenomen egentligen stimulera vare sig hans forskningslust, initiativkraft eller fantasi? Giva dylika försök någon träning åt hans logiska sinne? Även analysövningarna — som dock bruka åtminstone bland de yngre mottagas med intresse, emedan de vädja till tävlingslust och detektiva instinkter nedsjunka snart till kokboksarbete, där det egna initiativet är avkopplat och där inga nya kemiska kunskaper förvärvas.

För mig har därför länge stått som en brist hos många av de vanligen förekommande laborationsförsöken att de äro allför enkla och ointressanta för att kunna giva eleverna andlig näring och stimulera deras intresse för kemien. De äro dessutom alltför korta för att kunna uppbygga logiska tankekedjor och medgiva ej varierande tydningar, varigenom de skulle vinna i värde. De stå ej heller i tillräcklig kontakt med elevernas erfarenhetsområden ur det dagliga livet, varför de få något artificiellt och passivt över sig. De ha ej någon uppgift mer än stundens.

En laborationsuppgift, som föreläggès eleven, bör vara av sådan art, att han finner arbetet värt att utföra. Antingen bör därför uppgiften ha för eleven ett påtagligt *vetenskapligt* intresse, orsakat av att han under lektionerna iakttagit och diskuterat ett fenomen eller en fråga, som därvid av honom befunnits vara av vikt för hans vidare framträngande i kemien, eller bör uppgiften intressera eleven ur rent *praktisk* synpunkt, varvid bör observeras, att elevens intressepunkt ingalunda alltid sammanfaller med lärarens. Stundom kan eleven behöva lösa vissa förberedande uppgifter, innan han vunnit den förtrogenhet med teori och praktik, som han behöver för att angripa huvuduppgiften, men tillräcklig motivering måste vid alla uppgifterna föreligga, så att eleven finner dem värda att bearbeta.

Under senare år har jag sökt tillämpa dessa synpunkter på laborationsuppgifter inom gymnasiet — i regel entimmeslaborationer, ehuru dubbeltimmar torde vara lämpligare — varigenom en del av dessa kommit att i viss mån avvika från de vanligen förekommande, medan däremot andra äro välkända. Dels av denna orsak och dels emedan några av uppgifterna som skolförsök torde vara nya, kunna de måhända intressera en och annan av mina kolleger, varför de här i korthet framläggas. Uppgifternas ordningsföljd behöver ej vara den som här föreligger. Några av dem har jag använt även i realskolan.

Enär eleverna redan före laborationsårets början vid åtskilliga tillfällen under lärarens experiment iakttagit den olika effekten hos koncentrerade och hos utspädda syror och baser, upptages till behandling begreppet normalitet. De få veta, att en 1-normal syra vid neutralisering lämnar 1 gram H-joner per liter och en 1-normal bas 17 gram OH-joner per liter samt att vid neutralisering gäller regeln: volymen gånger normaliteten hos syran = volymen gånger normaliteten hos basen. Även begreppet surhetsgrad behandlas så pass, att de något förstå indikatorns roll och varför metylorange användes vid bestämning av ammoniak men fenolftalein[1] vid starkare baser. De få nu som uppgift att medelst titrering bestämma *normaliteten hos några utspädda och koncentrerade syror*, varvid även någon elev kan från hemmet medföra matättika, vars styrka bestämmes. Omräkning till gram per liter och till procent övas. I byretten användes 1-normal natriumhydroxid.

Nu äro eleverna beredda att praktiskt tillämpa sin kunskap och få till uppgift att bestämma halten *citronsyra i en citron*, medförd från den affär, där hemmets varor bruka inköpas. Någon elev får fördenskull först undersöka, hur många milliliter 1-normal bas som fordras att neutralisera 1 gram fast citronsyra, som löses i litet vatten i en titrerkolv. Citronerna tudelas, bitarna vägas på brevvåg, saften ur en bit per elev urkramas noga med citronpress och titreras, varefter mängden och därur halten syra lätt beräknas. Om eleven därefter först slickar i citronskalet och sedan smakar på titrerkolvens innehåll, finner han till sin överraskning hur grundligt surheten försvunnit.

Nästa gång bestämmes *normaliteten hos utspädda och koncentrerade baser*. I samband härmed bestämmes normaliteten hos en mättad lösning av kalciumhydroxid, vilken omräknas till gram per liter, varigenom även en *löslighetsbestämning* utförts. Härvid kan någon elev få som uppgift att undersöka, huruvida en i värme mättad kalklösning har samma koncentration som en i köld mättad. Av kalkvattnet är lämpligt att taga 200 ml, av de övriga utspädda baserna 10 ml, av de koncentrerade 5 eller 2 ml. I byretten användes 1-normal syra, t. ex. saltsyra, som eventuellt kan beredas av överblivna och förorenade syrarester.

Vi övergå nu till att undersöka vårt dricksvatten. Rent, dvs. destillerat vatten vore olämpligt för oss att dricka, enär blodet behöver salter, som delvis tillföras oss med vattnet men som saknas i destillerat vatten. Viktigast är koksaltet, som i liten mängd brukar finnas i många orters dricksvatten. I Stockholm kan Mälarens salthalt variera efter strömförhållandena, och det intresserar eleverna att finna deras *dricksvattens koksalthalt*. Denna bestämning utföres genom titrering av 200 ml dricksvatten med 0,1 n silvernitratlösning och med kromatjon som indikator. Eleverna få veta, att sedan de tillförda silverjonerna bundit förefintliga kloridjoner, ingå de därefter tillkommande silverjonerna förening med kromatjonerna, varvid vätskan färgas smutsbrun, visande att titreringen är färdig. Koksalthalten omräknas till gram per liter och brukar i Stockholm ligga omkring 0,06 g. I samband härmed pröva eleverna sitt *smaksinnes känslighet* för koksalt genom att tillföra mer och mer av en saltlösning till en bägare vatten, tills de nätt och jämnt börjar känna saltsmak, då de avsmaka en tesked härav. Genom titrering av 10 ml ur denna blandning bestämma de sitt smaksinnes känslighet, och genom att därefter jämföra sina på svarta tavlan uppskrivna värden — som variera kraftigt kring 3 g per liter — få de uppfattning om vilka som äro finsmakare och således kunna tänka sig en framtid som mästerkockar! Slutligen få de bestämma *koksalthalten i sin urin* (eleverna äro uteslutande gossar) genom att titrera 10 ml härav, spädda med litet destillerat vatten. Denna varierar naturligtvis efter den intagna födans saltmängd — en intresserad elev kan här studera olika maträtters inverkan och hur lång tid saltet kvarblir i kroppen — men brukar normalt hålla sig vid 6—8 g per liter. Genom att dessa försök utgöra undersökningar på eleverna själva bruka de väcka deras livliga intresse.

---

[1] Det bör för eleverna påpekas, att ordet ej uttalas ftalajn utan ftale-in, jämför protein.

Liksom silverjoner utfälla vissa negativa joner, t. ex. kloridjoner, kunna omvänt vissa negativa joner, såsom rodanidjoner, utfälla silver. Som exempel härpå få eleverna bestämma *silverhalten i en tioöring,* som de offra på vetenskapens altare. För att vinna tid få de härvid växla till sig på förhand vägda mynt, som de i titrerkolven lösa i minsta mängd koncentrerad salpetersyra under uppvärmning, varunder de bruna gaserna och lösningens blå färg diskuteras. Sedan ferrijon som indikator tillförts i ej för ringa mängd, titreras med 0,1 n rodanidlösning, tills en svagt rödbrun färgskiftning av ferrirodanid börjar visa sig. Ur reaktionsformeln beräknas därefter silvermängden och ur slantens vikt silverhalten, som är 40 procent. Genom övertitrering finna eleverna ofta ett någon procent för högt värde. Alla silverfällningar tillvaratagas av läraren för att senare överföras till silvernitrat.

Antingen i detta sammanhang eller sedan eleverna blivit mer övade i noggrann vägning, få de erfara, att analyser kunna utföras ej blott titrimetriskt utan även gravimetriskt. Eleven väger en 25-öring, som löses i litet koncentrerad salpetersyra, lösningen spädes med destillerat vatten och fälles med saltsyra, varefter blandningen värmes till nära kokning under omröring, så att silverkloriden blir grovflockig och faller samt snabbt kan tvättas med ett par dekanteringar, varefter den får torka på filtrum för att nästa gång vägas. Härur beräknas legeringens silverhalt, som är 60 procent. Denna bestämning av *silverhalten i en 25-öring* avslutas med att eleverna blanda sin silverklorid med litet pottaska och soda på en bit träkol samt därur med blåsrör eller blästerlåga framställa en smält silverkula. Om de i denna insticka änden av en bit järntråd och låta kulan stelna, kunna de med en smula händighet förfärdiga en vacker liten kråsnål, som de sedan bära i rockuppslaget såsom medlemmar av kemistsamfundet Silverklubben!

I samband med legeringar få eleverna bestämma *kopparhalten i mässing*. Dylik plåt sönderklippes i bitar av 1—3 grams vikt, som efter vägning lösas i koncentrerad salpetersyra, varefter med natriumhydroxid i tillräckligt överskott kopparn utfälles som hydroxid men zinken förblir i lösning som zinkat. Blandningen värmes under omröring till nära kokning, och den bildade kopparoxiden tvättas genom upprepade dekanteringar, får torka på filtrum samt glödgas i degel. Efter vägningen beräknas mängden och halten koppar. Metoden är enkel men brukar ej ge noggranna värden.

Efter denna förövning göres kvantitativ analys av *kopparvitriolkristaller* med avseende på *kopparhalt, sulfathalt och vattenhalt*, och i samband härmed diskuteras vattnets betydelse för kristallers form och färg, varvid Werners teorier kunna nämnas. Kopparhalten bestämmes såsom nyss, sulfathalten genom fällning med varm bariumnitratlösning samt fällningens tvättning och vägning, vattenhalten genom upphettning av kristallpulver vid ett par hundra grader till konstant vikt. De erhållna analysvärdena jämföras med de ur formeln beräknade. Genom att därefter på det nästan vita, vattenfria sulfatet hälla några droppar vatten, finna eleverna, hur den blå substansen återbildas under värmeutveckling — ett reagens på vatten!

Järnhalten i ett ferrisalt, t. ex. järnalun, bestämmes genom fällning med ammoniak, glödgning och vägning som oxid. — *Fosforhalten i benaska* eller i rent kalciumfosfat intresserar blivande läkare och biologer samt bestämmes genom att provet löses i utspädd salpetersyra och fälles med ammoniummolybdat, varefter ur den tvättade och torkade fällningens vikt och formel (se någon handbok) fosforhalten beräknas.

Vi övergå nu till ett par försök med uppsamling och mätning av gaser. Som förövning väljes uppgiften att bestämma *syrehalten i kaliumklorat* gravimetriskt. Ett svårsmält provrör beskickas med en knivsudd brunstenspulver — som strax förut glödgats för att befrias från fuktighet — och väges. På ett litet blankt papper uppväges noga 1—2 gram kaliumklorat, vilket lämpligen på förhand utföres av någon elev. Kloratet hälles i provröret, och blandningen värmes försiktigt, så att syrgasen ej river med sig brunstensdamm. Efter några minuters upphettning väges röret, och med ännu en kraftig upphettning och vägning kontrolleras, att allt syre avgått. Syrehalten beräknas och jämföres med det teoretiska värdet. Därefter göres huvudförsöket, varvid bestämningen sker volumetriskt, då ett nytt provrör med innehåll förbindes med en vattenfylld kolv, liknande en sprutflaska. Ur denna trycker gasen ut sin lika volym vatten, som genom en slang rinner ned i en bägare och mätes, varvid naturligtvis nivåerna måste hållas i samma höjd. Vid beräkning frångrages på vanligt sätt vattenångans tryck. Experimentet blir en god övning i tillämpning av gaslagarna. Att det är syrgas i kolven konstateras med en glimmande sticka.

Som återstående försök på gasers mätning väljes bestämning av *magnesiums och zinks ekvivalentvikt.* På bottnen av en liten kolv med trattrör och avledningsrör — eventuellt en liten tvättflaska — placeras det vägda magnesiumbandet, rullat kring en liten glaspinne för att ej lyftas upp av vätgasblåsorna. Kolven och avledningsröret fyllas helt med vatten, litet koncentrerad saltsyra tillföres genom trattröret, och vätgasen uppsamlas i ett stort vattenfyllt provrör, försett med en skjutbar tråd eller gummisnodd för att utmärka nivån. Vid användning av zink (granulerad) går reaktionen långsammare men kan påskyndas med några droppar kopparsaltlösning. Även alumin [1] kan användas, om metallbiten före nedläggandet gnides med sublimatlösning. I samband med dessa försök kan diskuteras förflyttningen av valenselektroner från metallatomen till syrans vätejoner. — Uppgiften kan utvidgas och angripas från annan synpunkt genom att lösa ett gram zinkoxid, kopparoxid eller kvicksilveroxid i 30—40 ml 1-normal saltsyra samt återtitrera överskottet syra med 1-normalt alkali och med metylorange som indikator. Enär härav erhålles syrets vikt i oxidpreparatet, beräknas omedelbart zinkens vikt samt härav lätt den mängd zink som fordras att binda 8 gram syre, dvs. ekvivalentvikten. — Vid kopparoxid kan man även reducera med vätgas eller lysgas, kvicksilveroxiden kan kvantitativt sönderdelas genom upphettning.

Som förstärkning till teorien om elektronförflyttningar studeras därefter de även i och för sig intressanta och i praktiken viktiga mätmetoderna jodometri och manganometri. Kloratomens och jodatomens konkurrens om elektroner — då den senare förlorar, kan påpekas det större avståndet från kärnan till valenselektronen — illustreras genom bestämning av *klorvattens styrka medelst jodometri*. Ur jodidjoner och klorvatten bildas jodatomer, vilka titreras på vanligt sätt med 0,1 n tiosulfat och med stärkelse som indikator. Lämpliga mängder äro 20 ml klorvatten och 1—2 ml halvnormal jodidlösning. Då mot en volym 0,1 n tiosulfat svarar lika volym 0,1 n jod, blir beräkningen lätt. Tiosulfatets roll som elektrongivare bör förklaras. Klorhalten beräknas i gram per liter. — Enligt samma princip bestämmes *svavelvätevattens styrka*, varvid 20 ml härav försättes med stärkelselösning och 5—10 ml 0,1 n jodlösning. Härvid upptaga en del av jodatomerna elektroner från sulfidjonerna och bilda jodjoner, och resten titreras med 0,1 n tiosulfat. Resultatet uttryckes i gram per liter.

---

[1] I analogi med t. ex. benämningarna cer och tor (i stället för cerium och torium) användes ordet alumin, vilket föreslagits från ingeniörshåll. I detta sammanhang kan påpekas, att man numera allmänt uttalar orden argon, neon, krypton etc. med (lång) tonvikt på sista stavelsen samt platina med tonvikt på i och att oxidul varken skrives eller uttalas oxidull (jämför klorur). Även kalomel och gluten torde snart vara så försvenskade, att tonvikten kan läggas på sista stavelsen.

Manganometrien, som grundar sig på att manganatomen i permanganatjonen upptar 5 elektroner[1] och blir färglös, finner tillämpning i den välkända bestämningen av *järnhalten i ett ferrosalt*, t. ex. järnvitriol eller Mohrs salt, varvid uppvärmning påskyndar reaktionen. Förutom denna bestämning få eleverna enligt samma metod bestämma *lösligheten hos ammoniumoxalat vid olika temperaturer*, varur löslighetskurvan erhålles. Oxalatlösningarna hållas vid t. ex. 0, 20, 40, 60 grader medelst provisoriska vattenbad (bägare, bleckmuggar), och man tillser, att de äro mättade genom att kristaller finnas kvar även efter grundlig omröring. Prov upptagas med (varma) pipetter — 20 ml av de kalla, 5 resp. 2 ml av de varma — försättas med utspädd svavelsyra och titreras i värme, varefter resultatet uttryckes i t. ex. gram per 100 ml och uppsättes grafiskt. Eleverna böra observera, att oxalatjonerna efter avlämnande av elektronladdningarna bilda koldioxid, som bortgår i gasform. I detta sammanhang kan lämpligen begreppet löslighet och t. ex. glaubersaltets löslighetskurva samt lösningsmedlets roll och inverkan diskuteras. —

Vi börja nu komma över till den fysikaliska kemien, och här väntar oss en intressant undersökning: *mätning av reaktionshastigheten mellan zink och saltsyra vid varierad koncentration.*

---

[1] Härav inse eleverna omedelbart, att mot två molekyler permanganat svara tio molekyler ferrosalt, varigenom man vid reaktionsformelns härledande och koefficienternas bestämmande kan undvika det på sina håll tyvärr ännu kvarlevande berzelianska skrivsättet K_2O,Mn_2O_7 och FeO,SO_3.

temperatur, ytstorlek och katalysator. Den låter oss studera en kemisk reaktion i gång, ej blott slutresultaten som i de föregående fallen. Den är dynamisk, där de föregående varit statiska, presens där de andra varit perfektum. Den fordrar en dubbeltimme eller två entimmeslaborationer, så framt man ej delar upp undersökningen på olika laborantgrupper. Den alstrade vätgasen ledes från reaktionskolven till övre änden av en kranlös byrett, vars nedre ände med en slang är förbunden med en tratt, innehållande vatten, vars yta hålles i nivå med vattenytan i byretten. Med lämpliga tidsintervall, mätta i sekunder eller minuter, antecknas det i gasbyretten inträngande vätets volym, och då byretten blir fylld härav, tömmes den hastigt genom att reaktionskolven öppnas ett ögonblick, så att undersökningen kan fortsättas tillräckligt länge. Genom att pricka in tiderna och volymerna i ett antal diagram erhålla eleverna intressanta uppslag att begrunda. Syran kan tagas 2 n, 4 n, 6 n, temperaturen 20, 40, 50 grader (syran värmes på förhand, kolven står i varmt vatten), den granulerade zinken tages ena gången grovkornig, andra gången finkornig, och som katalysator tages några droppar kopparkloridlösning, varvid eleverna ur experimentet böra kunna avgöra, huruvida det är kopparjonerna eller den utfällda kopparmetallen som pådriver reaktionen.

En annan undersökning inom den kinetiska kemien är bestämning av *etylacetats hydrolyshastighet under inverkan av olika syror,* varvid till en kolv med 4 g rent acetat sättes 80 ml 0,5 n syra och hydrolysen får försiggå vid 25 grader eller högre (termostat). Reaktionen följes genom att med några minuters tidsintervall avpipettera 2 ml av blandningen i en 50 ml mätkolv och späda till märket samt titrera med 0,1 n barium- eller natriumhydroxid. Slutvärdet tages efter ett par dygn, varunder kolven ej behöver stå i termostat. — En likartad undersökning, som eleverna bruka få utföra i samband med de organiska laborationerna, är bestämning av *reaktionskonstanten vid hydrolys av bensoldiazoniumklorid,* vilken i utspädd lösning förlöper monomolekylärt. Kloriden framställes genom att i köld, högst plus 5 grader, blanda en lösning av 2,3 g anilin i 8 ml konc. saltsyra med en lösning av 1,73 g natriumnitrit i 50 ml vatten och späda till 500 ml, som fördelas bland laboranterna. I en fraktionskolv vid 35 grader (termostat), innehållande några sandkorn, bildas härav fenol, saltsyra och kvävgas, vars volym efter omskakning avläses i en tillkopplad enkel gasbyrett några gånger med tio minuters mellanrum, varefter hydrolysens slutvärde erhålles genom kolvens placering i kokande vatten några minuter och återförande till temperaturen 35 grader. Genom gasvolymernas insättande i formeln för en monomolekylär reaktion erhålles reaktionskonstanten, så framt man ej nöjer sig med att upprita diagrammet över sambandet mellan gasvolym och tid.

Bestämning av *molekylvikter* utgör en viktig del av den fysikalisk-kemiska kursen och måste experimentellt studeras, vartill tre timmar kunna anslås. Vid användning av *kokmetoden* kan som kokkärl användas ett stort provrör med insatt termometer och med luftkylt glasrör som återflödskylare, varvid först med mikrolåga bestämmes lösningsmedlets egen kokpunkt med användande av ett par små oglaserade porslinsskärvor som koksten. Lämpligen kan undersökas fenol, naftalin och bensoesyra, lösta i koltetraklorid. — Vid användning av *frysmetoden* är vatten ej lämpligt, bl. a. emedan försöket då fordrar is och tar lång tid, varför blott ett par elever bruka få arbeta med detta, medan de övriga använda smält urinämne som lösningsmedel, vilket ger arbetet större snabbhet och ökad noggrannhet, enär konstanten här är 21,5 mot blott 1,86 hos vatten. Köldbadet ersättes härvid med ett värmebad, t. ex. en bägare eller kjeldahlkolv innehållande glycerin eller konc. svavelsyra, för att nå urinämnets smältpunkt, som ligger omkring 133 grader, om det är rent. Som substans kan tagas kaliumklorid, kaliumbromid och kaliumjodid, vilka på förhand pulveriseras och sammansmältas med urinämnet, lämpligen i proportionerna 1 på 25, så att blandningen blir homogen, varvid temperaturen ej bör stiga över 140 grader. Med dessa blandningar fyllas smältpunktkapillärer, som fästas vid termometern med gummiringar. Sedan även ett rör med rent urinämne fästs där, nedsänkes samlingen i kolven, och innehållet värmes långsamt med mikrolåga, så att smältpunkterna kunna antecknas, varefter som kontroll även stelningspunkterna iakttagas. Medan en ovan laborant kan få nöja sig med att använda och iakttaga blott ett salt, kunna de mer skickliga således samtidigt bestämma tre salter. Försöket, som fordrar blott de enklaste hjälpmedel, kan även visas som demonstrationsförsök i projektion. — Som annan tillämpning på denna metod kan bestämmas fryspunktnedsättningen i vattenlösningar av 1 n och 0,1 n kaliumklorid och härur saltets *»dissociationsgrad»* beräknas. — Vid användning av *gasvolymmetoden* kan även en enkel apparatur användas, om man ej fordrar noggrannhet, nämligen kjeldahlkolvar eller fraktionskolvar, nedsänkta i kokande vatten i hela sin längd och försedda med ett smalt avloppsrör för den utdrivna luftvolymen, som uppsamlas i ett vattenfyllt mätrör eller provrör på vanligt sätt. Som substans kan användas eter, aceton och kloroform.

Atomviktbestämningar kunna i detta sammanhang utföras. Härvid bestämmes först molekylvikten hos kaliumklorid genom att iakttaga den kvarvarande vikten efter upphettning av en känd mängd kaliumklorat, varifrån man vet att tre atomer syre avgått. Genom att därefter omsätta en känd mängd av kaliumkloriden med överskott av silvernitrat och väga den erhållna silverkloriden erhålles den senares molekylvikt. Slutligen löses en känd mängd silver i salpetersyra och fälles med överskott av saltsyra, varefter ur den erhållna silverkloridens vikt beräknas atomvikten för *silver* samt därur och ur kaliumkloridens molekylvikt även atomvikterna för *klor* och *kalium*.

Inom den organiska kemien kunna försöken väljas inom en ganska vid marginal alltefter elevernas standard och den disponibla tiden. Vanligen börjar jag med framställning av *myrsyra medelst katalys,* varvid oxalsyra värmes med glycerin till nära hundra grader i en fraktionskolv, då den bildade mellanprodukten glycerylmonoformiat hydrolyseras och myrsyra frigöres under återbildning av glycerin, som således verkar katalytiskt. Som kontroll på att destillatet är myrsyra värmes det med koncentrerad svavelsyra, och den bildade kolmonoxiden antändes. — Efter eventuell syntes av några *estrar* studeras cykliska föreningar genom framställning av *nitrobensol* på vanligt sätt — där man kan betrakta svavelsyran som katalysator — som renas i separertratt och omdestilleras. Ur denna framställes med tenn och saltsyra *anilin,* som avdestilleras med vattenånga. — Vid framställning av *pikrinsyra* — som eleverna få smaka på — kunna några elever få försöka nitrera med enbart koncentrerad eller rykande salpetersyra och de övriga med en blandning av denna syra och svavelsyra, varigenom den senares nödvändiga roll påtagligt framgår och bör diskuteras. — Bland obetydligare uppgifter kunna nämnas prov på födoämnens halt av enkelt och sammansatt *socker* samt av *stärkelse* ävensom på *trähalt* i papper med respektive Fehlings lösning, hydrolys med syra, jodlösning och saltsyra-floroglucin. — Undersökning av de egna kroppsvätskorna intresserar eleverna i hög grad, varför en *urinundersökning* alltid mottages med stark förväntan. Först bestämmes då surhetsgraden kolorimetriskt genom att med lämpliga indikatorer (metylrött och bromtymolblått) indränka pappersremsor, vilka man själv lätt kan förfärdiga eller eventuellt inköpa (Nybergs pH-skala från Grave). Därefter bestämmes fri syra genom titrering med 0,1 n natriumhydroxid, varigenom erhålles mängden 0,1 n syra per liter urin. Koksalthalten bestämmes med silvernitrat och kromatindikator (eventuellt efter urinens avfärgning med blodkol). På kalcium och fosfat prövas med ammoniumoxalat och molybdenlösning, på socker med Benedicts eller Alméns-Nylanders reagens och på äggvita genom kokning med koksaltlösning samt efterföljande tillsats av ättiksyra, då äggvitan förblir olöst. Sambandet bör diskuteras mellan den av eleverna intagna födans art (salt mat, basisk och sur kost) och de erhållna analysvärdena, som därvid lämpligen uppskrivas på svarta tavlan.

För att ge eleverna någon uppfattning om arbetsmetoderna inom den väldiga industri som *färgämnesframställning* numera utgör, få de framställa den vackert röda färgen Sudan I och undersöka dess färgande förmåga på olika tygmaterial. Fördenskull diazoteras anilin till bensoldiazoniumklorid, som kopplas med betanaftol. Lösning I, bestående av 2,5 ml anilin i 25 ml konc. saltsyra, lösning II av 2 g natriumnitrit i 15 ml vatten samt lösning III av 3,5 g betanaftol löst i minsta mängd natriumhydroxid kylas med is till under fem grader, varefter lösningarna I och II sammanhällas, då salpetersyrlighet bildas (den sönderfaller vid temperaturer över fem grader), som diazoterar anilinet. I blandningen nedläggas lappar av ylle, bomull, natursilke och konstsilke, och lösning III tillsättes langsamt under omröring och fortsatt kylning, varvid en kraftig, röd fällning av färgämnet uppkommer. Sedan lapparna upptagits och sköljts, bedömes färgens lämplighet för de olika fibermaterialen. Reaktionsformlerna studeras och strukturformlerna uppritas.

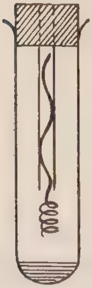
Nikotinhalten i olika tobakssorter eller tobaksmärken — som eleverna medföra hemifrån — bestämmes antingen i samband med titrering av basers styrka eller vid kursen i organisk kemi. Ur 4 cigarretter eller 2 cigarrcigarretter eller 1 cigarr eller motsvarande kvantitet piptobak, tuggtobak eller snus frigöres nikotinbasen, sedan den söndersmulade tobaken vägts, genom omröring några minuter med ca 40 ml 20-procentig natriumhydroxid, varefter 2—3 strukna teskedar gipspulver inröres för att göra massan fastare. Nikotinet extraheras med 40 ml bensin eller toluol och filtratets volym mätes och blandas med ungefär sin halva volym lackmushaltigt vatten, som titreras med 0,1 n syra till svagt röd färg, som ej åter får bli blå efter en stunds omskakning (nikotinet diffunderar nämligen tämligen långsamt ned i vattnet). Ur det enbasiska nikotinets molekylvikt 162 beräknas nu dess mängd i titrerkolven, varefter ur filtratvolymen och tobaksvikten erhålles nikotinhalten. Försöket utföres på en timme och ger tillräckligt noggranna värden för att intressera även elevernas fäder, som väl vanligen äro de som bruka konsumera de analyserade tobakssorterna.

De laborationsuppgifter som här i korthet omnämnts bruka eleverna på det fyraåriga realgymnasiet medhinna, medan på det treåriga samt på latingymnasiet många strykningar måste göras, framför allt bland de sist nämnda uppgifterna. Vanligen arbetar varje elev ensam med sin uppgift, stundom ledes laborationen av någon elev, som på förhand utfört och satt sig in i arbetet. Teorier och resultat behandlas i sammanfattande form på en följande lektion, varefter eleverna skriva redogörelser — stundom på maskin — som granskas, rättas och återlämnas och vilkas innehåll de skola kunna referera mer eller mindre väl alltefter den betygsnivå på vilken de stå.

Ibland utbytes en eller annan av uppgifterna mot någon mer aktuell — man tänke t. ex. på gasskyddets och brandsläckningens kemiska behandling!

Framställning av svavelkoppar.

Ett vanligt provrör 15 mm · 15 cm förses enligt figuren med en borrad kork med ett rätt smalt 10 cm långt glasrör. Den ena ändan av en 1 mm koppartråd av 20 cm längd lindas i 4 varv kring en blyertspenna. Avståndet mellan varven är 1—2 mm. På trådens raka del göras ett par små böjningar, så att den kan instickas i glasröret utan att glida ur detsamma. Ett par ärtstora bitar stångsvavel nedläggas i provröret och korken isättes. Koppartråden skall vara 2 cm från provrörets botten. Hela systemet tareras, varvid det bör upphängas lodrätt.



Provröret upphettas raskt. När svavelångorna nått något över koppartrådspiralen, börjar den glöda av det vid reaktionen utvecklade värmet. Man avbryter då upphettningen. Glödningen fortsätter några sekunder. Man iakttager, att svavelblomma avsatt sig högst upp i provröret, att isblomliknande kristaller av svavel bildas längre ner och att det tjockflytande svavlet vid avsvalnandet blir tunnflytande, innan det stelnar. Vidare finner man, att vikten är oförändrad. Spiralen är vackert kristallglänsande över hela ytan, blågrå och spröd.

Försöket är lätt att göra och ger tillfälle till åtskilliga intressanta iakttagelser. Man kan inleda kemilaborationerna i klass 4^5 eller 3^4 med detta försök.

Alfred Nilsson.

Etylacetatets hydrolys.

Som experimentellt underlag vid behandlingen av massverkans lag och för bedömandet av olika syrors styrka synes det vara lämpligt att låta lärjungarna i högsta ringen utföra en laboration av den art rubriken anger. Nedan angivna utprövade förfaringssätt utgör en ganska radikal förändring av det, som Frank Taylor anger i sin bok »Elementary Practical Physical Chemistry».

Behövlig materiel per laborationsgrupp:

Erlenmeyerkolv rymmande 200 ml 0,1 n syra försedd med gummipropp och blyring.

Byrett à 50 ml för 0,05 n NaOH (fenolftalein). Titrerkolv à 100 ml.

Pipett à 20 ml för provtagning ur reaktionsblandningen.

Bägare för NaOH-lösningen och för byrettens inställning.

Vattenbad med termometer, trefot, brännare (ev. gemensamt för flera laborationsgrupper).

Preparatrör à 10 ml med kork för förvaring av den ev. före laborationens början avmätta eller invägda kvantiteten etylacetat (4 ml motsvarar 3,6 g enligt Chem. Kal.).

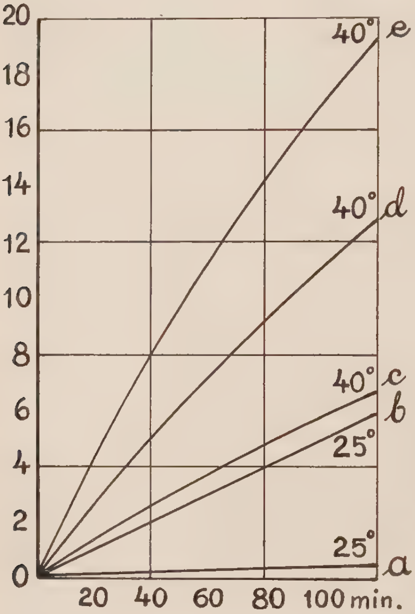
Beträffande etylacetatet erinras om att dess kokpunkt är 77° C, dess sp. v. 0,90 och löslighet vid vanlig temperatur 8,7 g per 100 g vatten (Chem. Kal.) samt om dess eldfarlighet.

Laborationsgruppen antages bestå av två lärjungar, varav den ena sköter provtagningen och temperaturkontrollen, den andra titreringarna och tidtagningen.

Utförandet:

Vid laborationens utförande under en timma måste kolvarna med 200 ml av resp. 0,1 n syror i god tid före densammas början ha blivit nedställda i vattenbadet för uppnående av den för försöket lämpliga temperaturen 40° C. Behövliga portioner etylacetat böra även ha blivit avmätta före laborationen, som börjar med att lärjungarna med pipett få överföra 20 ml av syran från erlenmeyer- till titrerkolven. Efter temperaturkontroll hälles etylacetatet till syran och tidpunkten härför fixeras. (Kvarvarande etylacetat i röret uppgår endast till ca. 1 à 2 % av de här använda vikterna 3,6 g resp. 1,8 g.) Innan kolven återföres till vattenbadet, bör den kraftigt omskakas.

Under tiden till nästa provtagning — om 10 min. — titreras det uttagna provet av ursprungligen närvarande syra med 0,05 n NaOH-lösning (1 à 2 droppar fenolftalein). Förbrukad volym noteras för tiden noll. För att noggrannare fixera reaktionstiden bör man nu ånyo avmäta samma volym av natronluten i den tömda titrerkolven och efter tillsats av fenolftalein hålla den beredd att mottaga nästa prov för vars titrering det visar sig åtgå en något större volym natronlut än förut beroende på den genom hydrolys bildade ättiksyran. — Under en laborationstimme bör 3 à 4 sådana titreringar hinna verkställas.



Etylacetatets hydrolyshastighet.

Ordinatan anger ml 0,05 n $NaOH$ på 20 ml prov:

a. 3,6 g i 180 ml H_2O
b. 3,6 g i 180 ml 0,1 n HCl
c. 1,8 g i 180 ml 0,1 n H_2SO_4
d. 3,6 g i 180 ml 0,1 n H_2SO_4
e. 3,6 g i 180 ml 0,1 n HCl.

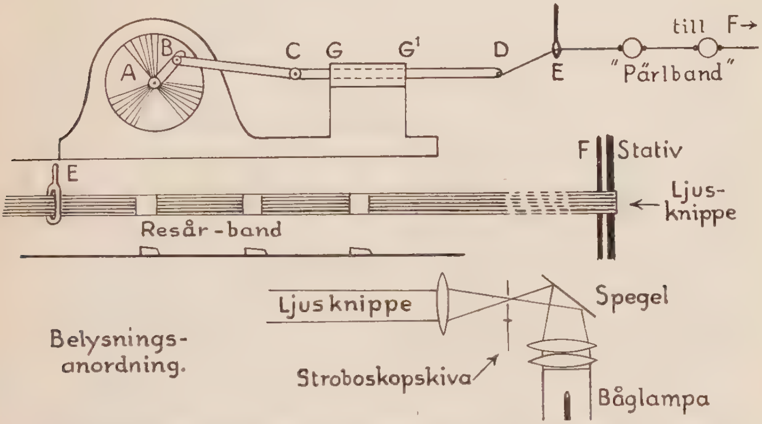
Givetvis är det önskvärt att titrering även verkställes å prov av reaktionsblandningen efter några dagar, dvs sedan jämvikt inträtt. Genom att någon laborationsgrupp får arbeta vid annan temperatur resp. annan etylacetatkoncentration och genom sammanställning inför klassen av allas resultat ökas givetvis laborationens värde ur de inledningsvis angivna synpunkterna. Inverkan på reaktionsförloppet av temperatur, etylacetatkoncentration m. m. belysas av kurvorna i figuren.

Herman D. Nyberg.

En anordning för demonstration av stående vågrörelse.

Vid försöken att få en tydlig bild av partikelrörelsen vid stående longitudinell vågrörelse fick förf. den idéen att söka använda gummiband eller gummisnodder såsom svängande materia. Det vackraste resultatet hittills har uppnåtts med en rund, silkesspunnen snodd av klenaste slag, tillgänglig i varje sybehörsaffär.

På en c:a 2,5 m lång dylik snodd uppträdes successivt ett 40-tal av de ytterst tunna och lätta, ihåliga, genomborrade glaspärlor (matta, »opaliserande»), som kunna inköpas t. ex. hos Buttericks i Stockholm för en mycket billig penning; diameter c:a 9 mm. På ömse sidor om varje pärla göres en enkel knut, så att pärlan ej glider fram och åter. Pärlornas hål behöva före påträdandet ibland vidgas, vilket göres försiktigt med en mycket klen, rund nålfil; somliga få f. ö. kasseras. Avståndet mellan pärlorna bör vara c:a 5,5 cm; trevligast om avstånden äro ungefär lika. Då pärlorna ej äro så starka, bör en viss försiktighet iakttagas. Pärlbandet förvaras i en tätt slutande burk, varigenom elasticiteten bättre bevaras.



Som impulsgivare användes lämpligen en »vev-skiva», monterad på axeln till en elektromotor med variabelt varvtal; en »rotationsmaskin» kan även användas. Vid den modell som användes för dylika försök vid Realläroverket å Norrmalm i Stockholm (modell: C. Rendahl) kan slaglängden varieras genom att vevstaks»leden» B kan fästas på olika avstånd från motoraxeln (A i fig.) i en skåra i skivan. Stången CD får sin fram- och återgående rörelse riktad horisontellt genom gejdern GG_1.

I öglan D fästes ett stycke snöre, som föres genom en på ett stativ fästad »styr-ögla» (E) av mässingstråd. I snöret fastgöres gummisnodden. Man bör ej draga själva snodden genom öglan, då den lätt slites ut vid rörelsen. Snodden spännes (ej *för* hårt) till ett annat stativ F längs laborationsbordet. Jag brukar belysa pärlbandet med ett parallellt eller något divergent strålknippe från en liten båglampa, placerad utanför F. Genom denna belysning framträda de halvgenomskinliga pärlorna som små lysande glödlampor. Nödvändig är belysningen icke, men den gör försöket till en verklig »ljus-fest», som präntar sig in i åskådarnas minne.

I. Motorn sättes i rörelse, och pärlbandet uppdelar sig i tydliga svängningsmax. och min. Normalt erhålles 1 $^1/_2$ våglängd.

Vid de lysande pärlornas snabba fram- och återgående rörelse framträda »amplituderna» som lysande band av olika längd. Genom att lämpligt avpassa slaglängd samt snoddens spänning och längd (mycket lätt inställt; finjustering av snoddspänningen kan ske genom höjning, sänkning eller vridning av styröglan E) kan rörelsen bringas att bli praktiskt taget horisontell och amplituderna att avtaga från 8—9 cm i svängningsmaxima kontinuerligt mot minima, där pärlan praktiskt taget står still.

II. Ännu instruktivare blir försöket, om man belyser bandet med en stroboskopskiva i mörkt eller halvmörkt rum, varvid partiklarnas rörelsefaser kring max. och min. vackert kunna studeras.

III. Mycket lustigt är att belysa stroboskopiskt i ljust rum. Amplituderna synas då som i I som skarpt avgränsade lysande band (i rumsbelysningen), och inuti dessa band synes dessutom den skenbart långsamma rörelsen hos de glimmande pärlorna.

IV. Genom att minska trådens spänning successivt och genom variation av varvtal och slaglängd kan man få fram vågrörelser av de mest skiftande slag. Lätt framställd är en sammansättning av transversell och longitudinell vågrörelse. Partiklarna röra sig i tydliga ellipser (eller spiraler) av varierande storlek. Vid dessa vågrörelser uppdelar sig pärlbandet lätt i en mängd halv-vågor.

V. Givetvis kan man även få fram stående *transversell* vågrörelse. Bäst är då att »styra» rörelsen till vertikalplanet genom att låta snodden, en bra bit från vardera ändan, gå genom en lång och smal ögla av grov mässningstråd (6 cm × 3 mm inv. mått), ställd vertikalt, så att snodden rör sig fritt upp och ned i densamma. Bäst är då även, om man ställer motorn så, att »slaget» blir vertikalt.

Anm. Sedan detta skrevs, har svårighet att erhålla lämpliga pärlor uppstått. Gott resultat har då även ernåtts med ett svart resårband, c:a 7 mm brett. På detta har med syndetikon (eller med »nål och tråd») fästs små vita papperslappar av bandets höjd, 5—6 mm breda på c:a 7 cm avstånd från varandra. För att de bättre skola synas vid belysning längs bandet, ha de vikts dubbla eller tredubbla vid ena fästet, så att de »luta» litet mot strålknippet (se fig.). Vanliga vita pärlemoknappar, fastsydda på bandet, ge också ett gott resultat. Då bandet är »styvare» än snodden, kan det ej spännas fullt så hårt, åtminstone icke vid användning av den mycket svaga motor som förf. använt. Sannolikt kan man med en kraftig motor erhålla ännu vackrare resultat.

B. Wahlström.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Årsmötet den 4—5 januari 1940.[1]

Den 4—5 januari höll föreningen sitt ordinarie årsmöte i Stockholm. Första dagens förhandlingar voro förlagda till Stockholms stads Lärlings- och Yrkesskolor, Polhemsgatan 35—37—39. Mötet öppnades kl. 10.15 av ordföranden, lektor T. Wetterblad, som hälsade de till ett 60-tal uppgående mötesdeltagarna välkomna. Sedan protokollet från årsmötet 1939 upplästs och godkänts, föredrogs styrelseberättelsen (se sid. 50) och revisionsberättelsen. Styrelsen och skattmästaren beviljades ansvarsfrihet. Till ordf. omvaldes lektor T. Wetterblad, och likaså omvaldes hela den avgående styrelsen. Förteckning över styrelsen återfinnes i styrelseberättelsen. Till revisorer utsågos överlärare E. Hedfors, omvald, och rektor M. Kolmodin, nyvald efter byråchef E. Göransson, som undanbett sig återval. Revisorssuppleanter blevo adjunkt V. Carlsson, omvald och adjunkt S. Comét, nyvald efter rektor Kolmodin.

Ordet överlämnades så åt direktör KONRAD ANDERSSON, som lämnade en kort redogörelse för

Stockholms stads Lärlings- och yrkesskolor,

deras organisation och arbetssätt.

Yrkesskolorna började sin verksamhet år 1912 och erhöllo sin nuvarande organisation genom stadgan av år 1919. Större delen av verksamheten är sedan två år tillbaka förlagd till det ståtliga byggnadskomplexet vid Polhemsgatan, vars uppförande har dragit en kostnad av nära 3 millioner kronor. Skolan omfattar dels yrkes- eller verkstadsskolor, dels lärlingsskolor och slutligen kurser för äldre elever. Lärlingsskolorna äro avsedda för elever med förvärvsarbete. Kurserna äro 2-åriga och pågå tre kvällar i veckan med tre timmar varje gång under 39 arbetsveckor per år. Eleverna vinna inträde direkt från folkskolan, och undervisningen gäller som ersättning för fortsättningsskola. Två kvällar i veckan meddelas teoretisk undervisning, den tredje ägnas åt praktiskt verkstadsarbete. Verkstadsskolorna äro dagskolor med c:a 45 timmars undervisning i veckan, och kurserna vara 1 till 4 år. De äro öppna för elever, som genomgått lärlingsskola, och äro således ett slags påbyggnad på denna. Verkstadsskolorna avse hantverk och industri och omfatta ett 20-tal olika yrken, både manliga och kvinnliga. I flera yrken ha eleverna tillfälle att efter avslutad kurs avlägga gesällprov. Den praktiska undervisningen meddelas av yrkesmän och bedrives med mindre grupper, omfattande 8 till 16 elever. Den teoretiska undervisningen i såväl lärlings- som yrkesskolorna skall till $^2/_3$ utgöras av yrkeslära och verktygslära, till minst $^1/_5$ av yrkesekonomi och till högst $^1/_5$ av yrkes- och arbetslagstiftning. Lärarna i de teoretiska ämnena äro väl kvalificerade, i regel ingenjörer. Inom varje yrke eller yrkesgren finns en nämnd av fyra personer, som tillser, att undervisningen bedrives efter yrkeslivets krav och med modern utrustning. Obemedlade och mindre bemedlade elever kunna erhålla statsstipendier med ett belopp av intill 45 kr. per månad. Dessutom erhålla eleverna efter 3 månader s. k. flitpengar, som utgå med 2 kr. per vecka under 1:a året, och därefter med 4 kr., 10 kr. och 20 kr. under resp. 2:a, 3:e och 4:e året. Fördelningen av flitpengarna sker dock till en del efter elevernas arbetsprestationer. En märklig bestämmelse är, att eleverna inte antagas definitivt förrän efter en prövotid av 4 till 8 veckor, varefter de lämpliga eleverna få fortsätta eller event. hänvisas till något annat, för dem mera passande yrke, och de icke lämpliga avvisas. Antalet elever är under innevarande läsår c:a 800 i verkstadsskolorna, 400 i lärlingsskolorna och 1 200 i kurserna för äldre.

---

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnas i Elementa *16,* 226, 1933; *17,* 46 och 113, 1934; *18,* 42 och 47, 1935; *19,* 36, 1936; *20,* 42 och 133, 1937; *21,* 47, 1938; *22,* 45, 113, 1939.

Verkstäderna mottaga övnings- och beställningsarbeten från allmänheten, och den årliga produktionen har ett värde av tillsammans $^1/_2$ million kronor.

Målet för undervisningen är att ge eleverna en allsidig yrkesutbildning och därjämte träning till yrkesskicklighet. Eleverna få utföra alla inom yrket förekommande arbeten.

Efter föredraget gjorde mötesdeltagarna en rundvandring genom de olika verkstäderna och laboratorierna med dir. Andersson och överlärare Hedfors som ciceroner. Arbetet pågick för fullt i de stora, ljusa och hygieniska lokalerna. Till varje verkstadsavdelning hör ett kakelklätt tvättrum och omklädningsrum. Vi vandrade genom snickeriverkstaden med dess moderna arbetsmaskiner och utsugningstrummor för spån, tapetserareverkstaden, målarverkstaden m. fl. Den bilmekaniska verkstaden, som har en golvyta av 800 m², är utrustad med ett tvättrum med hydraulisk lyftanordning samt utsugningsrör för de giftiga avgaserna från motorerna. Efter avslutad kurs här få eleverna avlägga körkortsprov. Vidare besågs svetsningsverkstaden, den mekaniska verkstaden, smidesverkstaden, plåtslageriet och kopparslageriet med golv av ekkubb, samt rörmokareverkstaden med demonstrationsanläggningar (badrum, varmvattensystem m. m.). Mycket intressanta voro avdelningarna för elektriker, finmekaniker och urmakare. Eleverna ha tillverkat flera verkligt märkliga saker, t. ex. en slags chiffermaskin, som med en anordning av kugghjul och hävstänger »slår sönder» ett chiffermeddelande till oigenkännlighet och följaktligen även otydbarhet. Enda möjligheten att tyda chiffret är att på en annan, exakt likadan och lika inställd apparat veva chiffret baklänges lika många varv. I instrumentverkstaden tillverkas olika slags precisionsverktyg och t. o. m. tonfilmapparater. Ytterligare kan nämnas den fotografiska avdelningen, bokbinderiverkstaden, det perfekt utrustade skönhetsinstitutet och herr- och damfrisörsalongerna. Skolan har även en förstklassig och väl utnyttjad gymnastiksal samt egen matsal för eleverna, där mötesdeltagarna efter den tröttande rundturen på drygt två timmar intogo en efterlängtad lunch.

Under lunchpausen demonstrerade fil. mag. A. NILSSON från Gävle en del fysikaliska apparater, bl. a. en ny elektricitetsmaskin (se Elementa *1939*, 176). Förevisningen av apparaterna och de vackra försöken väckte stort intresse.

Klockan 15.30 samlades man åter i hörsalen för att tillsammans med Biologilärarnas förening diskutera det enskilda arbetet i läroverk och flickskolor. Inledningsanförandet hölls av lektor TORSTEN WETTERBLAD, varefter följde diskussionsinlägg av rektor LILLY TENGNÉR, rektor I. SEFVE, undervisningsrådet R. LUNDBLAD, lektor F. BORG och ett slutanförande av lektor WETTERBLAD. Diskussionen är utförligt refererad i Tidning för Sveriges läroverk nr. 1 1940, varför läsarna hänvisas till detta referat.

Fredagen de 5 januari fortsatte årsmötet i Tekniska Museet på norra Djurgården. Deltagarantalet var denna dag c:a 80. Den första punkten på föredragningslistan var ett föredrag av professor HARALD CRAMÉR över ämnet

Ur sannolikhetskalkylens utveckling.

Föredragshållaren påpekade inledningsvis, att sannolikhetskalkylen och den därmed intimt sammanhängande matematiska statistiken under de senaste decennierna utvecklats till en lärobyggnad av den största betydelse, såväl rent vetenskapligt sett som med hänsyn till de användningar, den matematiska teorien för dessa saker fått på en mångfald av olika områden. Skilda meningar ha emellertid framställts rörande sannolikhetskalkylens egentliga väsen och uppgift. Vissa filosofiskt inriktade författare se i denna en allmän teori för sådana slutledningar, där man icke opererar med logiskt tvingande argument utan med vad som med ett vagt uttryck benämnes »sannolika skäl». Utan att förneka betydelsen av en sådan teori, om det över huvud vore möjligt att utforma den på ett rationellt sätt, ville föredragshållaren för sin del uppdraga väsentligt snävare gränser för den matematiska sannolikhetskalkylens uppgift och arbetsområde. Den uppfattning, som numera rätt allmänt torde omfattas av på detta område verksamma matematiker, torde kunna kort sammanfattas så, att *sannolikhetskalkylens uppgift är att ge en matematisk teori för en bestämd klass av iakttagbara företeelser,* på samma sätt som exempelvis geometrien eller den teoretiska mekaniken fyller denna uppgift för var sin klass av företeelser. En sådan teori är i och för sig en rent abstrakt matematisk lärobyggnad, där de olika satserna på rent matematisk väg härledas ur ett system av grundläggande axiom. Teoriens satser kunna emellertid prövas med ledning av erfarenheten om de verkligen iakttagna företeelserna, och det är utfallet av denna prövning som avgör, i vilken mån teorien fyller sin uppgift att motsvara våra iakttagelser.

Den grupp av företeelser, som det är sannolikhetskalkylens uppgift att på detta sätt matematiskt bearbeta, kan helt allmänt sägas omfatta de företeelser, där en *statistisk lagbundenhet* kan konstateras. Inom ett stort antal olika områden av både vetenskaplig och praktisk verksamhet förekommer det, att vissa försök eller vissa iakttagelser upprepas ett stort antal gånger under sådana förhållanden, att de relevanta omständigheterna hållas konstanta från försök till försök, men att de olika försöken trots detta visa från varandra väsentligt skilda resultat. Ett antal kast med en vanlig tärning ge till resultat en serie varierande poängtal, även om varje kast utförts under så lika omständigheter som möjligt. En serie försök för att bestämma värdet av en fysikalisk konstant ger likaledes, trots noggrant fasthållande vid en konstant försöksmetodik, som resultat en serie olika värden. Låt oss nu vid en sådan serie av försök inrikta vår uppmärksamhet på en bestämd »händelse», t. ex. att tärningen visar poängtalet sex eller att det observerade värdet på den fysikaliska konstanten faller mellan 2,5 och 2,6. För varje försök iakttaga vi, om denna »händelse» inträffar eller ej. Det statistiska *relativa frekvenstalet* för den ifrågavarande händelsen är kvoten mellan antalet av de försök, då händelsen inträffat, och hela antalet försök i serien. Ett sådant relativt frekvenstal blir tydligen lika med noll, om händelsen över huvud icke inträffat vid något av våra försök, och lika med ett, om den inträffat vid alla försök i hela serien. I alla andra fall ligger frekvenstalet mellan noll och ett. Med dylika statistiska frekvenstal har man att göra på ett stort antal olika områden. Den typ av statistisk regelbundenhet, som i detta sammanhang är av intresse, består däri, att man ofta kan konstatera en tendens hos de relativa frekvenstalen att närma sig konstanta gränsvärden, i den mån som antalet försök i serien växer. Det är företeelser av detta slag, som i sannolikhetskalkylen göras till föremål för matematisk behandling.

I särskilt påfallande grad visar sig en dylik statistisk regelbundenhet vid de enkla hasardspelen med kort, tärningar o. d. Det är därför också helt naturligt, att det blev en analys av förhållandena vid sådana spel, som gav anledning till sannolikhetskalkylens uppkomst. Detta skedde vid mitten av 1600-talet, då hithörande frågor diskuterades av ett antal franska matematiker, främst Pascal och Fermat. Längre fram utvecklades den nya läran genom Jacob Bernoulli och de Moivre till en omfattande matematisk teori för hasardspel. Ungefär samtidigt — vid början av 1700-talet — började en rationell befolkningsstatistik och ett därpå grundat livförsäkringsväsen att utbildas, och det visade sig snart, att den matematiska teorien för hasardspelen kunde få viktiga användningar även på dessa områden. Snart uppkommo även andra användningar, t. ex. på teorien för observationsfel vid fysikaliska och astronomiska mätningar. Denna utvidgning av teoriens användningsområde skedde emellertid utan erforderlig fördjupning av de grundläggande begreppen.

I det berömda arbetet »Théorie analytique des probabilités» sammanfattade Laplace resultaten av 1700-talets forskning på detta område och förde samtidigt den matematiska teorien vidare. Genom Laplace bragtes sannolikhetskalkylen i fruktbärande förbindelse med andra delar av matematiken, och vissa av honom utvecklade matematiska hjälpmetoder ha sedermera fått stor betydelse på andra matematiska områden. Med avseende på grundbegreppen stannade Laplace emellertid på en tämligen otillfredsställande ståndpunkt. Den enkla hasardspelsteorien var för honom principiellt tillämplig på vilka användningsområden som helst, något som stundom tager sig drastiska uttryck särskilt i den för övrigt mycket intressanta filosofiska inledningen till hans stora verk.

Under 1800-talet utvecklades framför allt de olika användningarna av sannolikhetskalkylen på ett ständigt växande antal vetenskapliga och praktiska områden. I rent matematiskt avseende visa sig däremot vissa tecken till stagnation efter den hastiga utvecklingen under 1700-talet. Grundbegreppen i den av Laplace uppbyggda teorien gjordes till föremål för en i många avseenden fullt befogad kritik, men den i anslutning härtill förda diskussionen om en revision av grundbegreppen gick tills vidare mest i förvirringens tecken.

Först under vårt sekel har ökad klarhet vunnits i fråga om sannolikhetskalkylens grunder, varjämte samtidigt den rent matematiska delen av ämnet inträtt i en helt ny utvecklingsfas. Prof. Cramér avslutade sitt i hög grad fängslande föredrag med en kort framställning av några av de viktigaste grundtankarna i denna nya utveckling, vilken bland annat karakteriseras av att sannolikhetskalkylen träder i nära förbindelse med mängdteorien, varvid särskilt läran om s. k. additiva mängdfunktioner visar sig ha viktiga användningar inom sannolikhetskalkylen.[1]

Efter föredraget följde en demonstration av Foucaults pendelförsök. Som bekant är försöket ej lätt att utföra. På grund av diverse felkällor råkar pendeln gärna i elliptiska svängningar. Nu gick emellertid allt mycket bra. Deltagarna grupperade sig i museets trapphus runt det inhägnade område, där den 11,5 meter långa pendeln var upphängd. Förankringstråden brändes av, pendeln började svänga, och svängningsplanet vred sig i rätt riktning, d. v. s. motsatt jordens rotationsriktning.

I en av hallarna för tillfälliga utställningar intogs härefter gemensam lunch, ordnad av museets egen restaurang.

Tekniska Museets intendent, Torsten Althin, ledde sedan en rundvandring genom museet, och det må vara nog sagt, att intendenten var en högst fängslande ciceron och att deltagarnas behållning av förevisningen blev den allra bästa. Museet är utomordentligt intressant. Det rika materialet är mycket åskådligt ordnat. Många maskiner kan den besökande själv sätta igång och se, hur de fungera, en anordning som i hög grad torde ha bidragit till att museet blivit en älskad plats för vetgirig ungdom. Alla och en var, ung och gammal, har mycket att inhämta här, inte minst en lärare. Det är utsiktslöst att i ett kort referat kunna ge en föreställning om vad museet har att bjuda på. En särskild artikel i Elementa om museet vore välkommen.

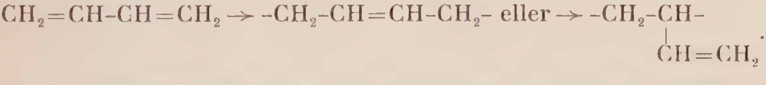
---

[1] Den för ämnet intresserade hänvisas till följ. arbeten av prof. Cramér: Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, Stockholm 1927 samt »Random variables and probability distributions», Cambridge Tracts in Mathematics, N:o 36, Cambridge 1937.

Efter rundvandringen samlades man kl. 15.30 åter i föreläsningssalen, där dr Iwan Bolin talade om

Organiska konstmassor.

Föreläsningsbordet var »dukat» med en färgrik samling av olika materialprov, huvudsakligen tillverkade av de senaste konstämnena, sasom bakelit, mipolam, pollupas och plexiglas. Föredragshallaren påpekade, att han måste inskränka sig till att förevisa dessa material med uteslutande av de äldre, mera kända tillverkningarna av olika cellulosaprodukter. Materialen gå i handeln under en mångfald olika namn, ty varje firma, som tillverkar konstmassor, använder specialnamn på sina produkter. Då man började framställa konstmassor, utgick man först från de råämnen, som naturen själv frambringar. Sådana naturliga substanser äro t. ex. gummi och cellulosa. Den kemiska industrien kom dock snart underfund med, att man av enkla organiska råämnen kan framställa syntetiska konstmassor. Dessa bildas antingen genom s. k. *kondensation,* varvid råämnets molekyler reagera med varandra under — i regel — avskiljande av vatten, eller *polymerisation,* då omättade molekyler förena sig med varandra till större, s. k. makromolekyler, genom att dubbelbindningar gå upp och de fria valenserna sammansluta sig. Kondensationsprodukter äro t. ex. *bakelit,* som erhålles genom inverkan av formaldehyd på fenol,[1] *galalit* av formaldehyd och kasein, samt *pollupas* av formaldehyd och urinämne. Polymerisationsprodukter äro t. ex. *syntetisk kautschuk,* som framställes av flera omättade, enkla kolväten eller derivat av sådana, t. ex. butadien och klorbutadien, samt *plexiglaset,* som är en polymerisationsprodukt av metakrylsyreester. Vid polymerisation av butadien, för att taga ett exempel, öppnas butadienmolekylernas dubbelbindningar enligt följande formel:



$$\mathrm{CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2} \rightarrow \mathrm{-CH_2{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}}\ \text{eller} \rightarrow \mathrm{-CH_2{-}\underset{\displaystyle CH{=}CH_2}{\underset{|}{CH}}{-}}.$$

---

[1] Ett laboratorieförsök att framställa bakelit kan utföras på följande sätt: 50 g fenol, 50 g 40 $^{0}/_{0}$-ig formalin och 1 ml konc. ammoniak upphettas under någon timme i en rundkolv på vattenbad under återflödskylare. Upphettningen fortsättes, tills innehållet i kolven delar upp sig i två skikt, ett oljeskikt och ett vattenskikt. Oljan skiljes från vattnet och upphettas i en fraktionskolv på vattenbad, tills den blir klar. Bortkokandet av den ringa mängd vatten, som finns kvar i oljan eller hartset och gör detta grumligt, bör helst ske vid förminskat tryck. För detta ändamål slutes fraktionskolven med en kork, och sidoröret förbindes med en vattensugpump. Den erhållna bakeliten stelnar vid avsvalning till en rödgul, klar massa. Kärlen kunna rengöras med sprit.

Då de fria valenserna sammansluta sig, uppstå långa, s. k. trådmolekyler. De kunna ha en längd av ända till 0,001 mm. En massa, bestående av dylika trådmolekyler, är vanligen löslig i organiska lösningsmedel. Ju mer förgrenade molekylerna äro, desto beständigare är produkten. Innehålla molekylerna fortfarande dubbelbindningar, kunna dessa genom lämpliga tillsatser tvingas att öppna sig, så att trådmolekylerna bindas vid varandra medelst bryggor till ett rymdgitter. Detta kallas att härda materialet, som därigenom blir olösligt i lösningsmedel och även värmebeständigt. Polymerisaten kunna bildas av antingen ett enda råämne eller av två eller flera sådana och kallas då ett blandpolymerisat. Makroföreningarna utmärka sig för hög molekylvikt, från 10 000 till 1 000 000. I kemiskt avseende utmärkas de även därav, att reaktionsförmågan är inskränkt till molekylernas ändgrupper. En mycket obetydlig mängd av ett främmande ämne kan därför väsentligt förändra materialets karaktär och egenskaper. Möjligen ligger däri orsaken till att hormoner och vitaminer kunna verka i så små mängder i den levande organismen. Äggviteämnena i denna äro nämligen makroföreningar med mycket stor molekylvikt och böra således kunna förändras av mycket små mängder främmande ämnen.

Polymerisations- och kondensationsreaktionerna kunna åstadkommas genom upphettning av materialet med lämpliga katalysatorer. Man kan vidare öva inflytande på förloppet genom tillsats av s. k. regulatorer och aktivatorer. Därigenom kan man i hög grad variera konstmassornas egenskaper, och numera kan man framställa konstmassor med nära nog vilka önskade egenskaper som helst.

Kautschuk är ett naturämne och har nackdelen att vara temperaturkänsligt och lösligt i lösningsmedel. År 1839 upptäckte amerikanaren Goodyear metoden att härda eller vulkanisera kautschuk i hetta genom tillsats av svavel. Naturkautschuk är uppbyggt av kolvätet isopren, som är metylbutadien, $CH_2 = CH - C(CH_3) = CH_2$. Försök att framställa syntetisk kautschuk av isopren gjordes i Tyskland före och under världskriget 1914—1918, men den s. k. metylkautschuken var dyr och hade ej heller så värdefulla egenskaper. Numera framställas flera olika slag av syntetisk kautschuk, i Tyskland *buna*, i Amerika *neopren* och *tiokol* samt i Ryssland *sovpren*, som är exakt samma material som neopren. Buna erhålles genom polymerisation av butadien vid närvaro av natrium, därav namnet. Den är slitstarkare och i flera avseende överlägsen naturkautschuk. Neopren och sovpren erhållas genom polymerisation av klorbutadien, $CH_2 = CH - C(Cl) =$

$= CH_2$. Tiokol är ett s. k. emulgationspolymerisat och fås genom inverkan av natriumpolysulfider på etylendiklorid. Alla de syntetiska kautschuksorterna äro beständiga mot olja och bensin och användas därför till framställning av bensinslangar. Man kan även tillverka bildäck av syntetisk kautschuk, vilka utmärka sig för stor slitstyrka, men äro dyrare än däck av naturkautschuk.

Gruppen $CH_2 = CH-$ kallas *vinyl,* och flera vinylderivat användas med fördel till framställning av konstmassor. Sådana vinylderivat äro vinylklorid, styrol eller vinylbensol samt akrylsyra, $CH_2 = CH - COOH$. Av vinylklorid erhålles genom polymerisation *mipolam* och av metylakrylsyreester det organiska glaset eller s. k. *plexiglas.* Samtliga råämnen för de nu nämnda produkterna buna, neopren, mipolam och plexiglas, kunna framställas syntetiskt av acetylen, som i sin tur kan fås syntetiskt av kol, kalk och vatten.[1]

De egenskaper, som göra de flesta moderna konstmassor så användbara, äro hårdhet, beständighet mot kemikalier, vatten och lösningsmedel, en viss grad av värmebeständighet, t. ex. obrännbarhet, samt isolationsförmåga mot elektricitet. De kunna bearbetas mekaniskt och man kan såga, svarva och hyvla dem samt borra i dem. Många äro klara och genomskinliga och kunna färgas i vilken önskad färg och nyans som helst. Bakelitprodukterna äro dock alltid mörka och oftast genom tillsats av fyllnadsämnen ogenomskinliga. Alla ha låg spec. vikt och en del kunna erhållas i porös form. Plexiglaset är vattenklart och splitterfritt men tål liksom mipolam ej högre temperatur än c:a 80°. Då blir det mjukt och kan skäras. Vissa bakelitprodukter framställas genom hoppressning av lager av väv eller trä med bakelitmassa. De äro så hårda, att man kan använda materialet till kugghjul och andra föremål, som utsättas för stark mekanisk påfrestning. Metoderna att framställa föremål av konstmassor äro mycket varierande. Råämnet kan erhållas i form av ett pulver, som kan pressas till den önskade formen, varefter polymerisationen och härdningen utföres. Pulvret kan även lösas och lösningen sprutas ut, varvid lösningsmedlet avdunstar, och de erhållna föremålen härdas. Genom pressning kan man utföra massproduktion av olika föremål, från knappar, som kunna manglas och strykas, till höljen för radioapparater och bilkarosserier. Av mipolam kan man tillverka rör med en vidd, varierande från 1,5 mm till 15 cm. Rören kunna bockas i värme och skarvas på så sätt, att den ena röränden utvidgas och den andra trädes in i den, varefter hopfästningen sker med en särskild klistermassa av samma konstämne. Dessa mipolamrör äro beständiga mot syror och baser, bensin och oljor och i hög grad okänsliga mot skilda andra lösningsmedel. De kunna även uthärda avsevärda tryck. De ha därför fått användning i flera kemiska industrier i stället för rör av metall, glas, keramik, ebonit och gummi. De ha även den fördelen framför sådana rör, att de äro genomskinliga, så att man ser vätskans läge i röret.

---

[1] Jmfr PAUL NYHLÉN, Synteser på basis av acetylen, Elementa *21,* 221 (1938).

De organiska konstmassorna äro ännu nya och tämligen oprövade och priserna äro ännu så länge rätt höga. De äro inga ersättningsämnen i den bemärkelsen, att de ersätta andra, bättre material, som det råder brist på. De äro nya material och ha bättre och värdefullare egenskaper än de förut använda materialen, såsom trä, kautschuk och metall. Säkerligen komma de att i framtiden få en alltmer ökad användning och därmed kommer sannolikt priserna på dem att sjunka.[1]

Efter föredraget hade mötesdeltagarna tillfälle att bedriva enskilda studier i museet och därmed var årsmötet år 1940 avslutat.

BROR GUSTAVER.

Styrelseberättelse för år 1939.

Styrelsen har under året bestått av 19 personer, varav följande även tillhört arbetsutskottet: lektor T. WETTERBLAD, Stockholm, ordf., lektor A. UHLER, Stockholm, v. ordf., lektor B. GUSTAVER, Stockholm, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. SANDÉN, Stockholm, och adjunkt S. ÅSTRAND, Stockholm. Övriga medlemmar i styrelsen ha varit: fil. lic. I. BOLIN, Stockholm, lektor K. DAHR, Göteborg, lektor E. G. HJALMAR, Stockholm, lektor C. LÖNNQVIST, Södertälje, rektor G. MIKAELSSON, Stockholm, rektor A. NORDHULT, Stockholm, rektor P. G. PERSSON, Malmö, lektor EVA RAMSTEDT, Stockholm, professor M. RIESZ, Lund, lektor G. STARCK, Stockholm, överste H. STENDAHL, Stockholm, fil. lic. B. SVENSSON, Lund, rektor B. SÖDERBORG, Stockholm och adjunkt B. WAHLSTRÖM, Stockholm.

Föreningen höll den 9—10 januari sitt ordinarie årsmöte i Stockholm. Referat över årsmötet har tillställts föreningens samtliga medlemmar i form av särtryck ur Elementa, marshäftet 1939.

---

[1] Om konstmassorna föreligger en riklig litteratur. Följande verk kunna rekommenderas: F. PABST, Kunststoff-Taschenbuch, Berlin 1939; WILHELM HUNTENBURG, Chemie der organischen Kunststoffe, Leipzig 1939; KURT BRANDENBURGER, Im Zeitalter der Kunststoffe, Berlin 1938.

Vårsammanträde hölls den 12 april i Stockholm å Kungl. Ingenjörs- och Artillerihögskolan. Referat från vårsammanträdet finnes i Elementa, junihäftet 1939.

Den 30 oktober anordnade styrelsen en studieutfärd till Agas anläggningar å Lidingön för föreningens Stockholmsmedlemmar. I utflykten deltogo 15 personer.

Styrelsen har under året haft 4 och arbetsutskottet 3 sammanträden. Vid arbetsutskottets sammanträde den 11 februari behandlades en skrivelse från Kungl. Skolöverstyrelsen med begäran, att styrelsen måtte avge yttrande över 1936 års lärarutbildningssakkunnigas betänkande. Till att utarbeta förslag till yttrande utsågos herrar UHLER, WETTERBLAD och GUSTAVER, representerande ämnena matematik, fysik och kemi. Förslaget till skrivelse godkändes med vissa ändringar på styrelsesammanträde den 20 mars (bil. 1).

Vid detta sammanträde meddelade ordföranden, att Skolöverstyrelsens begäran om anslag för att bereda lindring åt institutionsföreståndare vid läroverk, där ny- och ombyggnad av naturvetenskapliga institutioner äger rum, avstyrkts av Statskontoret och ej heller upptagits i propositionen angående lärarlöner. Tillsammans med motsvarande funktionärer i Biologilärarnas förening hade därför ordföranden och sekreteraren utarbetat en motion i ärendet, som sedan också framlades i Riksdagen av dr Nordenson. Motionen blev dock avslagen.

Vid arbetsutskottets sammanträde den 13 juni beslöts att sända en skrivelse till Kungl. Skolöverstyrelsen med anhållan att denna hos Kungl. Maj:t måtte begära anslag till en fortbildningskurs i kemi för lärare vid de allmänna läroverken under sommaren 1940.

På styrelsesammanträde den 22 november beslöts att avsända en skrivelse till Kungl. Skolöverstyrelsen med önskemål rörande undervisningen i matematik och fysik vid de allmänna läroverken (bil. 2).

Medlemsantalet i föreningen har under året ökat från 449 till 568, huvudsakligen genom tillskott från kommunala och enskilda flickskolor samt folkhögskolor. Under året ha 6 medlemmar avgått på egen begäran och 5 genom döden.

Föreningens avdelning i Lund hade vid årsskiftet 191 medlemmar.

Stockholm den 31 december 1939.

TORSTEN WETTERBLAD.
Ordförande.

/ BROR GUSTAVER.
Sekreterare.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Sektionen för matematik, fysik och kemi.

Styrelseberättelse för verksamhetsåret 1939.

Under verksamhetsåret 1939 har som ordförande för föreningen i dess helhet fungerat rektor P. G. Persson, Malmö, och som sekreterare och kassör fil. lic. Börje Svensson, Lund. Styrelsen för föreningen i dess helhet utgöres av de båda sektionsstyrelserna, och inom sektionen för matematik, fysik och kemi har som ordf. fungerat rektor P. G. Persson, som vice ordf. rektorerna E. Hernqvist, Halmstad och K. Parck, Eslöv och som sekr. fil. lic. Börje Svensson.

Övriga styrelseledamöter inom sektionen ha varit läroverksadjunkt T. Edqvist, Malmö, rektor H. Holmgren, Skurup, lektor A. Jönsson, Malmö, professor J. Koch, Lund, rektor H. Körner, Lund, lektor A. Leide, Lund, docent T. Larsén, Lund, professor K. Lundmark, Lund, docent O. Lundquist, Lund, rektor F. Montén, Malmö, lektor H. Nordström, Växjö, rektor S. Sjöberg, Lund, lektor Bernhard Svensson, Lund. Arbetsutskottet har utgjorts av ordf., vice ordf., professor J. Koch och sekreteraren.

Under året ha hållits två sammanträden: vårsammanträde den 19 febr. å Tekniska Läroverket i Malmö och höstsammanträde den 4 nov. å Lunds Universitets Fysiska institution. Vid vårsammanträdet höll meteorolog Gustav Gyllström, Malmö, föredrag över »Väderlekstjänst för modern trafikflygning» och civilingenjör K. H. Larsson över »Moderna hjälpmedel för blindflygning och navigation». I samband med dessa föredrag blevo deltagarna i tillfälle att under sakkunnig ledning se Bulltofta flygstation och den därtill hörande verkstaden. Vid vårsammanträdet antogs stadgar för den med en biologisk sektion utvidgade föreningen, som enligt stadgarna har till uppgift att verka för främjande av undervisning i matematik och naturvetenskap. Medlemmarna äro enligt stadgarna fördelade på två sektioner, av vilka den ena omfattar skolämnena matematik, fysik och kemi och den andra skolämnet biologi med hälsolära.

Vid höstsammanträdet föreläste professor J. Koch över »Några experiment med ultrakorta Hertzska vågor» och assistent Börje Svensson demonstrerade »Undervisningsexperiment i fysik». I samband med dessa demonstrationer erhöllo deltagarna i sammanträdet en kortfattad duplicerad handledning för försökens utförande. Dessutom demonstrerades av institutionens tjänstemän några nya laboratorieförsök: »Bestämning av jonisationspotential» av docent O. Lundquist, »Bestämning av elektronladdningen» av docent T. Larsén samt »Gravitationskonstanten» av amanuens Eve Staffansson. Under ledning av fil. mag. E. Hansson gavs tillfälle att närmare taga del av de experiment, som utförts av professor J. Koch.

Under året har styrelsen sammanträtt två gånger, varvid förutom programmen för sammanträdena Lärarutbildningssakkunnigas betänkande behandlats och varöver yttrande avgivits till Skolöverstyrelsen. I styrelsens yttrande påpekades bland annat önskemålet av en exempelsamling i matematik och för att tillfredställa detta behov ha fil. mag. Karl-Erik Fröberg, fil. mag. Malte Johansson, amanuens Eve Staffansson och assistent Börje Svensson utgivit en problemsamling i anslutning till undervisningen i matematik vid Lunds universitet.

Under tiden 7—19 augusti anordnade Skolöverstyrelsen en fortbildningskurs i fysik vid Lunds Universitets Fysiska Institution varvid huvudsakligen den plan följdes, som styrelsen i skrivelse till Skolöverstyrelsen 1938 preliminärt föreslagit.

Medlemsantalet i sektionen var vid årets början 201 och vid årets slut 191.

Lund den 6 febr. 1940.

P. G. Persson.

/ Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Anders Örne, *Förtrollade siffror.* Några fritidsexperiment med talserien. Wahlström & Widstrand, Stockholm 1939, 219 s. (varav 184 s. text), kr. 7: 50, inb. kr. 10: —.

Enligt förordet avser förf. närmast att åt läsaren giva en nöjsam fritidssysselsättning. Denna skulle bestå däri, att läsaren, som endast behöver kunna de fyra enkla räknesätten och äga »en smula intresse för vackra talbilder», helt enkelt sätter sig att räkna. Kan verkligen den s. k. lekmannen vänta sig något nöje därav? Ja, får han föreliggande bok i sin hand, skulle jag tro, att han oemotståndligt lockas att försöka. En viktig orsak därtill är den entusiastiska ton, vari boken är hållen; man konstaterar vilket nöje, det berett förf. att skriva den. Framförallt torde likväl sakinnehållet vara det, som mest intresserar.

En kort redogörelse: Boken har 4 avdelningar. I avd. I, »Underbara tal», behandlas tal, sådana som 142 857, vilka vid vissa räkneoperationer ge i ett eller annat avseende märkliga resultat. Det är i detta avsnitt av boken, som siffrorna göra skäl för epitetet »förtrollade», ty förklaringar till lagbundenheterna lämnas ej här. Just häri torde en god del av tjusningen ligga. Läsaren får många tillfällen till självverksamhet genom talrika övningsuppgifter. Förf. är mycket samvetsgrann med att uppdela alla förekommande tal, så långt sig göra låter, i faktorer. Överhuvudtaget går begreppet primtal som en röd tråd genom hela boken. I denna avd. lägger man särskilt märke till kapitlen om »Hur stora tal utläsas» och »Hur många olika tal kunna skrivas med ett givet antal siffror?».

I avd. II kommer så »Gåtans lösning» genom de periodiska decimalbråken. Här förekommer många »nyttiga» saker, t. ex. i kapitlen »Räkning med potenser», »Periodiska decimalbråk» och »Undersökning av tals delbarhet».

Avd. III, »Strödda iakttagelser angående särskilda tal», är mera inhomogen, som även rubriken antyder. Här tillämpas de i avd. II funna reglerna för delbarhet m. m.

Avd. IV, »Tal, primtal och talbeteckningssystem», redogör först för hur begreppet tal uppkommit och hur talsystemet successivt har utvidgats. Efter ett kap. om »Primtal» följer en redogörelse för olika talbeteckningssystem. Positionssystemets innebörd exemplifieras särskilt med de system, där 8, 4 resp. 12 valts som bas. I 12-systemet utför förf. ett stort antal räkningar, som torde komma att intressera, bl. a. därför att de anknyta till avd. I.

I ett bihang lämnas decimalbråksutvecklingar av allmänna bråk, vidare primtalstabell och tabell för tals upplösning i faktorer.

Trots att förf. på s. 131 säger, att vi noga skola »akta oss att söka strikt bevisa de få allmänna satser, som vi råka tangera», får jag dock göra några anmärkningar; detta med tanke på att skolungdom, som läser boken, kanske finner ett och annat, som ej riktigt stämmer med vad som inpräntats i skolan ...

s. 78 ff.: Att $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^0 = 1$ och $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ äro definitioner, framgår ej tillräckligt klart.

s. 80, rad 29: »Logaritmen blir — — ett bråktal — —». Förf. borde här skrivit irrationellt tal (dylika tal omnämnas på s. 142).

s. 142, rad 15 ff.: »Kvadratrötter — — äro exakta tal endast i de fall, då talet under rottecknet är kvadratiskt — —». Beror på vad man menar med tal.

s. 142, rad 23 ff.: »För alla de övriga talen — — utgör kvadrat- — — roten ett brutet tal». Ej korrekt, ty »brutet tal» betyder väl »bråk»?

s. 141: Förf. definierar noll först som limesvärde, sedan på annat sätt. Motsatt ordningsföljd vore väl bättre.

s. 85—86: Den roliga förklaringen till att antalet siffror i perioden ej kan vara större än $(n-1)$, då man utvecklar $\frac{1}{n}$ i decimalbråk, kunde gärna ha medtagits.

Boken rekommenderas till envar. Matematiklärare kunna ur densamma bl. a. få impulser till roande och nyttiga räkneövningar för sina elever. Det brukar alltid gå ett sus genom klassen, då den får multiplicera 12345679 med 18. Vilken förvåning bör då ej en multiplikation uppväcka (s. 70), som till resultat ger

999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999?

Stig Comét.

H. SPENCER JONES, *Tallösa världar.* Alb. Bonnier, Stockholm 1939, 221 s., kr. 7: 50.

Av de nu aktiva engelska astronomerna är det väl huvudsakligen Eddington och Jeans, som hittills ägnat sig åt att göra den moderna astronomiens resultat tillgängliga för en bredare allmänhet. Då två av den teoretiska forskningens målsmän här fört pennan, är det naturligt, att de med förkärlek valt att behandla teoretiska problem, varvid även frågor av rätt spekulativ natur gärna ventileras. Det är därför av stort intresse, när nu en representant för den observerande astronomien gripit sig an med uppgiften att teckna en bild av världsalltet, grundad på astronomisk iakttagelse. Spencer Jones är chef för Greenwichobservatoriet och som sådan innehavare av den förnämliga titeln Astronomer Royal, vilket borgar för framställningens vederhäftighet.

Författarens plan är att göra början hemma, med vår jord och dess drabant, månen, och sedan fortsätta utåt i rymden. Efter en redogörelse för vårt solsystems medlemmar ägnas ett kapitel åt det fascinerande spörsmålet, om det finns liv i andra världar. Vi få sedan göra bekantskap med stjärnor av olika slag, mer eller mindre liknande vår sol, och lära oss, hur man bestämmer deras avstånd, lyskraft, massa och temperatur. I nästa kapitel behandlas frågan om stjärnornas fördelning i rymden, med andra ord, strukturen hos den byggnad vi benämna vårt stjärnsystem. Hur en sådan stjärnvärld ter sig för en avlägsen yttre iakttagare, därom få vi slutligen en föreställning genom studium av de spiralformade nebulosorna.

Så långt ha vi kunnat stödja oss på astronomiska observationer, vilkas resultat kunna anses skäligen välgrundade. De båda sista kapitlen äro däremot mera spekulativa. Här behandlas först problemet om stjärnornas ålder och utveckling, varefter författaren gör ett försök att i korta drag teckna en bild av världsalltets förflutna och av dess kommande öde.

Förutom av illustrationer i texten åtföljes framställningen av ett trettiotal i allmänhet utmärkta planscher. Särskilt fäster man sig vid ett par förnämliga reproduktioner över olika partier av månytan. Författarens stil är klar och medryckande, och översättningen har gjorts med tillbörlig omsorg. Som totalomdöme kan sägas, att boken utgör en förträfflig vägledning för alla, som önska orientera sig inom astronomien av i dag.

Helge Nordström.

Fra Fysikkens Verden, Tidsskrift utgitt av Fysikkforeningen i Oslo. 1:a årg. 1939 h. 1—4. Expedition: J. C. Gundersens tryckeri, Oslo, kr. 7:— per år.

Strax innan de ödesdigra molnen började skockas över Norden och krigets lavin kom i gång hävdade sig dess andliga odling på ett vackert sätt, som vi må hoppas skall bli bestående: I det gamla kulturlandet Norge startades en tidskrift för fysik. Tidskriften är avsedd att vara »halvveis populær», dvs. den skall kunna läsas av fysiklärare och studenter, ingenjörer och läkare, delvis även av elever på realgymnasiet. Den skall innehålla översiktsartiklar både från den rena och den tillämpade fysiken jämte uppsatser, som ha intresse för den högre skolundervisningen i fysik och kemi. Dessutom skall det finnas plats för originalarbeten, som icke direkt passa i utländska vetenskapliga tidskrifter. Vi skulle alltså i Sverige kunna jämföra den både med »Kosmos» och »Elementa».

Den nu föreliggande första årgången, som omfattar 4 häften, inledes med en uppsats: »Hvad vet vi om atomkjernene» av en i synnerhet på detta område särdeles kompetent forskare, Egil A. Hylleraas, som även är redaktör för tidskriften. Fortsättningsvis behandla olika författare bandspektra, högspänningsanläggningar, radio, kosmisk strålning, elektronoptik, katodstrålerör, mesotronen m. m. jämte skolproblem inom fysik och kemi, bokrecensioner och tidskriftöversikt. Professor V. Bjerknes har bidragit med en utmärkt biografi över Heinrich Hertz, delvis på basis av personlig bekantskap med den store banbrytaren. De senaste nobelpristagarna i fysik och kemi presenteras ävenledes, och det på ett briljant sätt.

Vi önska varmt att den nya tidskriften, som börjat så bra, må kunna trotsa de ödesstormar, som svepa över västerlandet, att dess framtid blir ljus och att den får läsare och medarbetare från hela Norden.

John Tandberg.

JOSEF REGLER, *Physikalische Aufgabensammlung für höhere Schule und Studium.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1939, 129 s. RM. 6: 30.

Exempelsamlingen är avsedd att användas vid högre skolor, tekniska fackskolor och vid den lägre akademiska undervisningen. Den innehåller 510 uppgifter på områdena mekanik (fasta kroppars 112, vätskors och gasers 62), värmelära (87), optik (108) och elektricitetslära (141). Uppgifterna äro av två slag, dels sådana av beskrivande art i viss mån påminnande om de frågor som under en följd av år gavs som sista uppgift i studentexamens skriftliga prov i fysik, dels vanliga räkneexempel. Den förra typen är utmärkt med E, den senare med M 1 eller M 2. Beteckningen M 1 anger att lösningen kräver endast elementära matematiska kunskaper under det att M 2-uppgifterna lättare behandlas med tillhjälp av något högre matematik. Varje uppgift åtföljes av en plan för dess lösning, men några sifferresultat finnas ej angivna. I slutet av boken finnes ett mycket detaljerat sakregister, som angiver på vilka sidor i samlingen problem på olika områden återfinnas.

En flyktig granskning av boken synes visa, att författaren i enlighet med sitt uttalande i inledningen undvikit problem, där den huvudsakliga uppgiften är att insätta siffror i fysikaliska formler, eller sådana, där de matematiska svårigheterna sätta de fysikaliska i bakgrunden. »I varje problem bör den fysikaliska tankegången vara den förhärskande.» Trots att åtskilliga av problemen falla inom områden utanför vår gymnasiekurs torde denna samling genom sin rikedom på idéer och uppslag vara av värde för våra fysiklärare och genom de korta, klara och ofta allmänt hållna anvisningarna för uppgifternas lösning även för dem som studera ämnet fysik. *A. Björkeson.*

HANS-JOACHIM FLECHTNER, *Materiens underbara värld, kemi för alla.* Svensk bearbetning (originalets titel: Die Welt in der Retorte) av fil. dr. Ole Eklund. Natur och Kultur, Stockholm 1939. 239 s., 16 planscher, ett hundratal bilder. Pris kr. 7: 50, inb. kr. 10: —.

Boken har i början liksom Ostwalds »Die Schule der Chemie» formen av ett samtal mellan en kemist och ett par icke alltför klyftiga ungdomar, som göra de lämpliga frågorna, men denna tröttsamma fiktion förmår förf. lyckligtvis inte uppehålla mer än ett par tiotal sidor, varefter framställningen blir regelrätt docerande. I detta populära arbete måste naturligtvis framställningen vara åskådlig och livfull. Åskådligheten eftersträvas först och främst genom anbringandet av piffiga, journalistiska rubriker, som i allmänhet äro ett oting och i detta fall hava det felet, att de camouflera ett innehåll, som i flertalet fall inte är det minsta piffigt, utan i själva verket en ganska torr läsning. Under rubriken »Broar till andra stranden» följer på tre sidor en snabbpresentation av kol-, kväve- och syregruppens element, under rubriken »Förhäxade element» en på 2 1/2 sidor sammanträngd framställning av de radioaktiva serierna, för att endast nämna ett par exempel.

Till åskådligheten skola också bilderna bidraga. De äro ett kapitel för sig. De sakna förklarande underskrifter, och i texten refereras ej heller till dem. Bredvid notisen, att beryllium ingår i smaragd, synes sålunda bilden av en fetlagd man, som tittar på eller genom ett litet obestämbart föremål. Den som kan detta förut, förstår, att det är fråga om Nero och den mytiska smaragden, men den, som inte känner till saken ...? Vattnets tre aggregationsformer illustreras av en man, som på axeln bär något, som skall föreställa ett isblock, men lika väl kunde vara en trästock, av en dam, som tömmer en slaskhink, och av närbilden av en lokomotivcylinder i arbete, som släpper ut ett rök(dim)moln! Gasmolekyler återges som små dansande eller hoppande mänskliga(?) figurer, elektriska laddningar av små figurer, som svänga flaggor med plus eller minus (varför i all rimlighets namn inte med enbart plus- eller minustecken?), kemiska föreningar av dansande par. Reduktionen av kopparoxid illustreras av en gangster (väte), som med revolver i hand berövar en herre (koppar) hans feta plånbok (syre). Naturligtvis saknas inte heller soldater, varken väldisciplinerade eller — märkvärdigt nog — mindre väldisciplinerade. Många av dessa bilder äro faktiskt så krångliga, att även den sakkunnige får fundera en stund på deras innebörd (t. ex. »brudköpet» sid. 50). Rec. bestrider utan tvekan lämpligheten av dessa grova makroskopiska bilder som illustrationer av subtila molekylära förlopp. I många fall äro de direkt oriktiga. Att illustrera salthydrolys och starka syrors neutralisation genom tillsats av ett salt av en svag syra med bilden av dambyte mellan två dansande par (»Changez les dames», sid. 174) är alldeles missvisande och i strid med förf:s egen framställning i texten.

På 170 sidor införes läsaren med hjälp av dessa larviga bilder och en text, som ömsom är läroboksmässig, ömsom hurtfriskt ledig, i läran om grundämnen, blandningar, föreningar, atomer och molekyler, det periodiska systemet, atombyggnad, radioaktivitet, lösningar, kemiska formler, och några väsentliga sakliga anmärkningar kunna inte göras mot framställningen, om man bortser från de förgrovande bilderna. Men med lättnad möter man på de sista 60 sidorna en enkel, saklig, av normala, kemiska formler belyst bildfri framställning, dels av molekylstruktur, dels av den organiska kemiens allra viktigaste ämnen.

Det vore orättvist att frånkänna arbetet varje förtjänst; det finns gott om sådana, men de ligga alla på ett traditionellt plan; den originalitet, som utmärker boken, kan tyvärr ej räknas den till förtjänst.

G. Starck.

WALTER GREILING, *Kemien erövrar världen,* översättning och bearbetning av B. Gustaver. Natur och Kultur, Stockholm 1939. 319 s., 20 planscher. Pris kr. 9: —, inb. kr. 11: 50.

I ett förord, där översättaren med avväpnande öppenhjärtighet höjer arbetet till skyarna, betecknas det som en roman med stoffet hämtat från kemien, och häri kan man ju gott instämma. Det är således den tekniska kemiens snabba och dramatiska utveckling under 150 år, som skildras, och det skall oförbehållsamt erkännas, att det sker på ett fängslande sätt. Särskilt har förf. lyckats framhäva sambandet mellan de olika industrigrenarnas utveckling och hur behoven inom en fabrikation skapar nya fabrikationer. Det ekonomiska kulisspelet tillmätes stort utrymme. Det mindre dramatiska förarbetet för teknikens utveckling, det vetenskapliga forskningsarbetet, kommer givetvis i skymundan; det ligger ju inte heller inom arbetets ram. Sålunda avfärdas Habers undersökning av ammoniakjämvikten på några rader, medan de tekniska svårigheter, som mötte och bemästrades av Bosch, skildras på ett par sidor.

Boken innehåller massor av tidsuppgifter och tekniskt-historiska detaljer, om vilkas riktighet rec. ej kan uttala sig. En del flagrant felaktiga framhävanden av påstådd tysk prioritet ha på ett stillsamt sätt av översättaren korrigerats i noter. Härför är man tacksam, även därför att det garanterar de opåtalade uppgifternas riktighet. Även den antisemitism och anglofobi, som numera kännetecknar objektivt tyskt författarskap, hava av översättaren utmönstrats eller mildrats. Översättningen är gjord med verklig sakkunskap och språkligt oklanderlig, ja utmärkt. Den formella anmärkning, som nu följer, riktar sig också mot originalet. Förf. har en stark benägenhet att skildra förflutna tilldragelser med verbet i presens, naturligtvis i avsikt att åstadkomma en »livfull» framställning. Sporadiskt brukad är en dylik stil försvarlig; brukad till övermått som här, verkar den hektisk, onödigt jagande och i längden tröttsam. Den tröttar också förf., som rätt vad det är och alldeles inkonsekvent faller ned i verbformen för förfluten tid.

Planscherna utgöra fotografiska och mycket verkningsfulla, strödda bilder från olika industriella områden. De framhäva gott de två karakteristiska dragen i nutidens kemiska industri, de jättelika dimensionerna och den raffinerade precisionen, och utgöra också ett värdefullt tillskott till de kemiska institutionernas bildförråd.

Titeln »Kemien erövrar världen» kunde, läst på annat sätt än förf. förmodligen har menat, ge anledning till ganska bittra reflexioner. Men det skall icke hindra, att boken rekommenderas.

G. Starck.

MAURICE DE BROGLIE, *Atomes, radioactivité, transmutations.* Bibliothèque de Philosophie scientifique, Flammarion, Paris 1939. 269 s., 17 fig. i texten. Pris hft. kr. 2: 35.

Åter en populär bok, men mycket olik de här ovan refererade. Med en suck av lättnad återgår man till denna lågmälda, försynta framställning av ett aktuellt ämne, en framställning, som avstår från alla de yttre åthävor, som just på detta område ligga så frestande nära till hands. Innehållet är uppdelat på följande kapitel: Materiens atomstruktur; Det naturliga systemet och grundämnenas släktskap; Elektriskt laddade korpuskler och deras banspår; Några synpunkter på de nyare fysikaliska teorierna; Atommodeller; Naturlig radioaktivitet; Klassifikation av de stabila, naturliga atomkärnorna; Upptäckten av atomens sönderdelning och omvandling; Atomens beståndsdelar; Kärnkemi, artificiell radioaktivitet; Kosmiska strålar; Allmänna synpunkter på atomkärnans struktur; Avslutning.

Denna framställning av atomteoriens utveckling fram till våra dagar är måhända ej så lättfattlig, att den kan rekommenderas som läsning för vem som helst, men den kräver ganska små förkunskaper och avstår helt från matematiska hjälpmedel. Förf. går också anmärkningsvärt långt i sin återhållsamhet beträffande även de hjälpmedel, som den brukar anlita, som vänder sig till en läsekrets utanför fackmännens; hela illustrationsmaterialet utgöres av några få diagram, några få tabeller. Inte en enda apparat, inte en enda atommodell finnes avbildad. Men denna brist bör ej avskräcka läsaren; den uppväges mer än väl av framställningens beundransvärda klarhet och elegans, som gör det till en njutning att fördjupa sig i arbetet.

Med följande ord avslutar förf. sin återblick på utvecklingen och sin blick på framtiden: »Det är i själva verket för tidigt att allvarligt diskutera de utsikter, som en näraliggande framtid skall komma att bjuda på ett så nyligen uppodlat fält. De senast förflutna fem eller sex åren hava medfört betydande och överraskande upptäckter; de hava låtit oss tränga fram på ett område, som är så nytt, att vi kunna räkna med ytterligare framsteg av oanad art. Intresset för dessa frågor blir därigenom endast större; om denna bok har kunnat giva sina läsare en om ock bristfällig uppfattning därav, har den nått sitt mål: att göra dem beredda att följa den framtida utvecklingen av en så löftesrik vetenskap.»

Det råder väl intet tvivel om att förf. verkligen har nått det sålunda angivna målet.

G. Starck.

A. Thorup, *Den første Kemi.* Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag, København 1939, 109 s.

Boken är avsedd att användas i folkskolor, examensfria mellanskolor och andra ungdomsskolor samt i den första lantbruksundervisningen och är uppbyggd kring 162 lätta experiment, som utföras med enklaste apparatur och några få vanliga kemikalier. Med ölkapslar som deglar, rakklinga som egg för vågbalans, cykelpump som lysgasretort, skokrämsburkar, tändsticksaskar, stålpennor, syltglas, handfat, tefat etc. utföras grundläggande försök och undersökningar inom vardagslivets och lantbrukets områden. Här studeras luft, vatten, baser, syror, salter, födoämnen, matlagning, konservering, rengöring, bränslen, eldsläckning och jordbruk. Man experimenterar med tobaksrök, vichyvatten, bläck, ärter, sockerbetor, rödbetor, mjöl, svinfett, ägg, vattenpest, stallgödsel, kokar tvål, tvättar och bleker, gör lemonad, deg och sprit, kärnar smör och bereder ost till smörgås, kokar potatis, steker kött etc. med en viss hurtfriskhet, som emellertid stundom medför att sakuppgifter och slutsatser bli något felaktiga. Författaren har lyckats mindre väl i den kemiska behandlingen än i den pedagogiska, som på många håll visar ett gott praktiskt handlag.

Einar Nordefeldt.

Gradualavhandlingar.[1]

Karl Erik Thomé, *Alkalisk hydrolys av acylerade oxisyror* med särskild hänsyn till inverkan på tvåvärda katjoner. Disp. i Lund 17 maj 1939. Opponenter: docent E. Schjånberg, amanuens T. Nilsson.

Reaktionshastighetskoefficienten för en acylerad, enbasisk oxisyras (ex. CH_3COOCH_2COOH) alkaliska hydrolys följer vid låga jonstyrkor i lösningar, som blott innehålla envärda katjoner, Brönsted-Debye-Hückels ekvation

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$$\log k = \log k_0 + z_A z_B \sqrt{\mu},$$

där k är den bestämda hastighetskoefficienten, k_0 är en konstant, z_A och z_B de reagerande jonernas valenser och μ jonstyrkan som vanligt definierad $\frac{1}{2}\sum c_j z_j^2$. Denna ekvation beskriver hastighetskoefficientens ändring med reaktionslösningens jonstyrka och är giltig för reaktioner, som försiggå mellan joner. Giltigheten av denna ekvation för en reaktion av ovannämnda slag och under ovannämnda villkor har visats av La Mer, Kiss m. fl. Vid högre jonstyrkor erhålles sämre överensstämmelse. Sker reaktionen däremot i närvaro av tvåvärda katjoner, gäller ekvationen icke längre, utan abnormt stora hastighetskoefficienter erhållas, orsakade av de tvåvärda katjonerna. Det visar sig, att kalciumjoner ha speciellt stor hastighetsökande verkan, och denna verkan förstoras i oerhörd grad, om den reagerande acylerade oxisyran är flerbasisk. Den hastighetsökande verkan, som tvåvärda katjoner utöva, skiljer sig vid dessa reaktioner betydligt från den hastighetsökande verkan, som tvåvärda katjoner i allmänhet ha på hastigheten av jonreaktioner.

Förf. har i sitt arbete undersökt den alkaliska hydrolysen av fjorton enbasiska, tre tvåbasiska och två trebasiska acylerade oxisyror. Av dessa äro flera nyframställda eller framställda enligt nya syntesmetoder. Giltigheten av Brönsted-Debye-Hückels ekvation under ovannämnda förhållanden har konstaterats för samtliga syror. Det har även lyckats att genom jämförelser av till oändlig utspädning extrapolerade hastighetskoefficienter draga vissa slutsatser angående konstitutiva faktorer, som inverka på reaktionshastigheten. Sådana äro de i den acylerade oxisyran ingående syrornas styrka, steriska hinder kring reaktionstället, avståndet mellan reagerande grupp och karboxylgruppen samt syrans basicitet. Innehåller emellertid reaktionslösningen tvåvärda katjoner, som kalcium- barium- eller strontiumjoner, orsakas hastighetsökningar, som visa sig vara beroende dels av katjonens natur dels av den acylerade oxisyrans, vilket framgår av följande tabell ($\mu = 0{,}0150$).

	k_{NaOH}	$k_{\mathrm{Ba(OH)_2}}$	$k_{\mathrm{Ca(OH)_2}}$
acetylglykolsyra (enbas.)	2,06	2,44	2,91
acetyläpplesyra (tvåbas.)	0,095	0,280	1,29
acetylcitronsyra (trebas.)	0,001	0,045	2,10

Särskilt effekten av kalciumjon på hastigheten av den trebasiska syrans hydrolys bör observeras.

Avvikelser från Brönsted-Debye-Hückels ekvation förekomma nästan alltid, då flervärda joner införas i reaktionslösningen, beroende på att Debye-Hückels uttryck för en jons aktivitetskoefficient under dessa förhållanden mycket snart förlorar sin giltighet. Dessa avvikelser äro emellertid icke av en sådan storlek som de här konstaterade, och framförallt ha icke två joner med samma valens så olika verkan som barium- och kalciumjoner i detta fall (se tab.). Med anledning härav misstänker förf., att andra hastighetsändrande faktorer utöver jonstyrkans ändring förefinnas. För undersökning av hur det förhåller sig härmed hålles reaktionsmediets jonstyrka konstant genom att i varje försök en stor mängd neutralsalt (NaCl) tillsättes, så att jonstyrkan blir 3,00. Hydrolyserna utföras med alkali i närvaro av barium- strontium- och kalciumklorid. Några av resultaten för de förut citerade syrorna anföras här nedan.

	Varierande mängd syra och alkali			Tillsatt mängd $CaCl_2$ i ekv/lit			
				0,01	0,02	0,03	0,04
acetylglykolsyra	4,19	4,20	4,19	4,30	—	4,40	—
acetyläpplesyra	0,83	0,83	0,80	1,01	1,23	1,48	1,67
acetylcitronsyra	0,0152	0,0157	0,0151	0,235	0,448	0,671	0,913

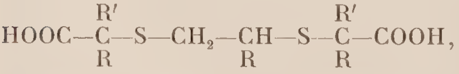
Av tabellen framgår, att vid samtliga syror hastighetskoefficienten i saltlösning är oberoende av de reagerande jonernas begynnelsekoncentrationer. Vid tillsats av tvåvärda katjoner t. ex. kalciumjoner fås vid enbasiska syror en obetydlig ökning av reaktionshastigheten, vid tvåbasiska och trebasiska en utpräglad ökning, som dock är mindre än i utspädd lösning (se föreg. tab.). I koncentrerad saltlösning är hastighetsökningen vid tillsats av tvåvärda katjoner direkt proportionell mot koncentrationen av denna katjon.

En sådan hastighetsökning kan förklaras genom antagandet av en komplexbildning mellan den reagerande syraanjonen och den tvåvärda katjonen, vilket är identiskt med att dessa salter äro ofullständigt dissocierade. Därigenom uppstår en jon med ett mindre antal negativa laddningar, vilken reagerar fortare än motsvarande syraanjon. Det är också väl känt från andra undersökningar, att exempelvis kalciumcitrat, kalciumlaktat m. fl. äro ofullständigt dissocierade. Genom att taga hänsyn till denna ofullständiga dissociation har författaren härlett ett uttryck för hastighetsökningen vid konstant jonstyrka, då tvåvärda katjoner äro närvarande i reaktionslösningen. Förhållandena i utspädd lösning äro omöjliga att fastlägga i en formel, eftersom effekten av tvåvärda joner här sammansättes, dels av att de tvåvärda jonerna verka mera aktivitetsändrande än som beräknas enligt Debye-Hückels aktivitetsuttryck, dels av att de tvåvärda katjonerna åstadkomma ett ofullständigt dissocierat salt och att dettas dissociationsjämvikt dessutom ändras med jonstyrkan i lösningen.

J. A. REUTERSKIÖLD, *Studien über 1-2-Disulfid-di-karbonsäuren, die entsprechenden Di-sulfone und deren Spaltungsprodukte.* Disp. i Upsala $^8/_2$ 1939. Opponenter: docent ERIK SÖDERBÄCK och fil. lic. INGVAR HEDLUND.

Avhandlingen omfattar två delar, dels en preparativ och analytisk studie över 1-2-di-sulfid-di-karbonsyror samt deras oxidationsprodukter 1-2-di-sulfon-di-karbonsyror, dels en reaktionskinetisk studie över spjälkningen av 1-2-di-sulfon-di-karbonsyror i alkali. De termodynamiska 1:a och 2:a dissociationskonstanterna för dessa tvåbasiska syror äro bestämda. Bestämningarna tillåta en beräkning av avstånden mellan laddningarna hos resp. syrors anjoner samt en jämförelse i detta hänseende mellan de båda klasserna av kemiska substanser. Reaktionshastigheterna vid spjälkningen i alkali äro bestämda medelst olika metoder, vilket tillåtit en jämförelse mellan alkylgruppernas inverkan pa spjälkningshastigheten, likaså en jämförelse mella de funna hastighetskonstanterna och de ur dissociationskonstanterna beräknade laddningsavstånden för 1-2-di-sulfon-di-karbonsyrorna.

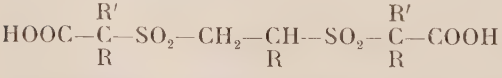
Di-sulfid-dikarbonsyrorna äro av formen:



$$HOOC-\underset{R}{\overset{R'}{C}}-S-CH_2-\underset{R}{CH}-S-\underset{R}{\overset{R'}{C}}-COOH,$$

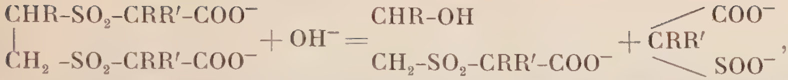
där R och R' = H eller CH_3; R kan vara = R'. Syrorna ha i allmänhet framställts ur alkylenhalogenider och α-merkaptosyror eller ur alkylenmerkaptaner och α-halogensubstituerade syror i alkalisk lösning.

Di-sulfon-dikarbonsyrorna äro av formen:



$$HOOC-\underset{R}{\overset{R'}{C}}-SO_2-CH_2-\underset{R}{CH}-SO_2-\underset{R}{\overset{R'}{C}}-COOH$$

och ha erhållits ur de föregående genom oxidation med permanganat i neutral lösning. Dessa di-sulfon-di-karbon-syror spjälkas i alkalisk lösning enligt reaktionsformeln:



(1)

då 1-oxy-2-sulfon-α-karbonsyror och sulfin-α-karbonsyror erhållas. Sulfin-α-karbonsyrorna ha isolerats som strontiumsalter genom fällning ur neutral vattenlösning med aceton. Samtliga syror: sulfinättiksyra, sulfin-α-propionsyra och sulfin-α-isosmörsyra avspjälka i sur lösning svaveldioxid, varvid motsvarande fettsyra bildas samt dessutom ringa mängder kolsyra. För noggrann samtidig bestämning av koldioxid och svaveldioxid ha särskilda analysmetoder utarbetats. Svaveldioxidavspjälkningen hos sulfinättiksyran har undersökts kinetiskt, varvid hastigheten visade sig vara proportionell mot vätejonkoncentrationen.

Dissociationskonstanterna för 1-2-di-sulfid-di-karbonsyrorna äro betydligt mindre än de för di-sulfon-di-karbonsyrorna funna, dessa senare syror äro c:a 30 ggr starkare än de förra. Laddningsavstånden ha visat sig vara större hos di-sulfid-di-karbonsyrorna än hos di-sulfon-di-karbonsyrorna. Dessa avstånd ha i stora drag visat sig tämligen överensstämma med de för plana konfigurationer beräknade avstånden, och dissociationskonstanternas inbördes storlek är i överensstämmelse med alkylernas I-effekt. Di-sulfon-di-karbonsyrornas plana konfigurationer, som ju motsvara de mindre avstånden, finna sin förklaring i det större dipolmomentet hos sulfongruppen i förhållande till dipolmomentet hos sulfidsvavel.

Spjälkningen i alkalisk lösning undersöktes vid 0° C, dels på alkalimetrisk väg, dels medelst en särskild utarbetad potentiometrisk metod, avsedd för små hydroxyljonkoncentrationer och relativt stort överskott av 1-2-di-sulfon-di-karbonsyra. Metodiken vid de alkalimetriska bestämningarna har förbättrats för ernående av större noggrannhet. Det visade sig, att den bimolekylära hastighetskonstanten stiger något med sjunkande hydroxyljonkoncentration, samt att reaktionen vid mycket ringa alkalikoncentration är bimolekylär inom ett stort koncentrationsintervall ($10^{-3}-10^{-5}$ med avseende på OH').

Etylen-bis-sulfon-α-isosmörsyra visar den märkliga egenskapen att reagera betydligt snabbare vid reaktionens början än senare, d. v. s. värdet på hast. konst. faller. Avbryter man reaktionen efter c:a 20 % omsättning, får man samma gång och samma numeriska värde på konstanten efter förnyad igångsättning.

Neutralsaltverkan vid spjälkning av etylen-bis-sulfon-ättiksyran i alkali har undersökts ned till jonstyrkan 0,008 medelst den potentiometriska metoden. Det visade sig, att den bimolekylära reaktionskonstanten följer Bröndsteds lag: $K = K_0 \frac{f_1 f_2}{f_3}$ upp till jonstyrkan 0,05, varvid det för f_3 beräknade värdet överensstämde med det av Bjerrum för 3-värd citration funna värdet (f_1 för OH′ ber. enl. Bjerrum, f_2 för syrans tvåvärda anjon ber. enl. B:s förenkling av Debye-Hückels formel, ur titreringskurvan för etylen-bis-sulfonättiksyra). Reaktionen sker således genom stöt mellan hydroxyljon och syrans tvåvärda anjon.

Vid högre temperatur, 100° C i sur vattenlösning, avspjälka 1-2-di-sulfon-di-karbonsyrorna koldioxid och en ringa mängd svaveldioxid. Mycket stora skillnader i reaktionshastigheten för koldioxidavspjälkningen konstaterades hos dessa syror. Den inbördes ordningen med avseende på denna hastighet konstaterades vara i överensstämmelse med alkylernas I-effekt; dessutom faller hastigheten med stigande vätejonkoncentration.

För den samtidigt med koldioxidavspjälkningen förlöpande avspjälkningen av svaveldioxid är den inbördes ordningen med avseende på hastigheterna för de olika syrorna i stora drag densamma som vid spjälkningen vid 0° C. Svaveldioxiden kan antagas härröra från sulfinsyra bildad på liknande sätt som i formel (1).

TAGE LARSÉN, *Zur Kenntnis der Refraktion und Dispersion von Edelgasen und edelgasähnlichen Hydriden und Deutriden.* Lund 1939. Disp. vid Lunds Universitet 16 maj 1939. Opponenter: docent NILS RYDE och fil. mag EVE STAFFANSSON.

Avhandlingen omfattar undersökningar över refraktion och dispersion hos ett antal under den i titeln angivna ämnesgrupperna fallande gaser, nämligen argon, klorväte, bromväte, svavelväte, tungt klorväte (DCl), tungt bromväte (DBr), tungt svavelväte (D_2S), tung metan (CD_4) och tungt väte (D_2).

Första kapitlet ger en allmänt orienterande översikt över forskningens nuvarande ståndpunkt på detta område speciellt beträffande de problemställningar, som uppställa sig vid ovannämnda gaser, nämligen frågan om vilka av dessa gasers absorptionsområden, som besitta det avgörande inflytandet på dispersionsförloppet i det synliga och ultraviolett, d. v. s. ha största oscillatorstyrkan.

Andra kapitlet innehåller beskrivning av de experimentella anordningarna och en sammanställning av siffermaterialet. Mätningarna av brytningsindex och dispersion äro utförda med en Jamins interferentialerfraktometer med kvartsoptik enligt Puccianti-Koch's metod och sträcka sig från det synliga till 2300 Å i ultraviolett. Värdet av brytningsindex angives vid 20° och 760 mm Hg, vilket erhålles direkt av mätningarna, samt vidare de för 0° och

760 mm Hg och för idealt normaltillstånd beräknade. Vid renframställning och förvaring av gaserna har största möjliga vikt lagts vid att undvika sönderdelning av de renade gaserna; vissa av substanserna t. ex. bromväte sönderfaller ytterst lätt. Försöksresultaten äro i diagram jämförda med från annat håll föreliggande mätningar.

Tredje kapitlet innehåller först en kortfattad översikt av teorierna för dispersion med såväl de klassiska som de kvantteoretiska formlerna. Därefter följer diskussion av de funna resultaten, varvid de ur dispersionsformlerna beräknade egenvåglängderna och oscillatorstyrkorna behandlas. Ädelgasernas absorption faller dels på serier av diskreta linjer börjande med resonanslinjerna och dels på ett vid dessa seriers gräns anslutande kontinuum. I motsats mot vad fallet är vid t. ex. alkalimetallerna befinnes kontinuet besitta den betydligt övervägande oscillatorstyrkan. Detsamma befinnes även gälla vid motsvarande hydrider, varvid även läget och intensiteten av egenfrekvenserna visa tydliga analogier med ädelgaserna. Vid utbyte av lätt väte mot deuterium inträder i allmänhet en sänkning av absolutvärdet för brytningsindex och även en förändring i dispersionskurvan. Orsaken härtill är huvudsakligen olikheten i nollpunktsenergi hos de båda isotoperna. För väte självt kunde den uppträdande isotopieffekten kvantitativt beräknas, varvid utom dess nollpunktsenergi även hänsyn tagits till skillnaden i medelkärnavstånd. Överensstämmelsen med experimenten är påfallande god såväl vad beträffar absolutvärdet av brytningsindex som dispersionsförloppet. Kvalitativa beräkningar ha även utförts för de andra deutriderna. Speciellt har den av isotopiteorin fordrade förskjutningen av de kontinuerliga ultravioletta absorptionsområdena vid utbyte av lätt väte mot tungt visats återverka på dispersionsförloppet inom det här undersökta våglängdsområdet, vilket även experimentellt påvisats.

Föredrag under hösten 1939 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Kemiska Föreningen, ordf. fil. dr. K. E. Thomé, sekr. fil. lic. B. Sjöberg.

Föredrag: docent G. Holst, Fotometrisk och titrimetisk analys av svavelklorider ($^{29}/_{9}$); fil. mag. M. Molin, Framställning av aceton och butunol genom bakteriell jäsning ($^{2}/_{11}$); prof. J. A. Christiansen, København, Om Anvendelsen af reaktionskinetiske Resultater til Opklaring af kemiske Reaktioners Mekanisme ($^{1}/_{12}$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Danielson.

Föredrag: fil. lic. Å. Pleijel, Om egenvärden hos självadjungerade differentialekvationer ($^{6}/_{12}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. amanuens B. Grabe.

Föredrag: civilingenjör T. Wilner, Några experiment rörande gasjonisation och partikeluppladdning ($^{25}/_{10}$); prof. A. Odencrants, Den vetenskapliga fotografiens problem ($^{9}/_{10}$); prof. H. Müntz, Über die Abhängigkeit der Zähigkeit homogener Flüssigkeiten von der Temperatur ($^{23}{,}_{10}$); prof. A. Odencrants, Rationella arbetsmetoder i tillämpad fotografi ($^{13}/_{11}$); prof. E. Hulthén, Nyare problem inom isotopforskningen ($^{27}/_{11}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. fil. dr. fru Anna Beckman.

Föredrag: fil. lic. E. Fredlund, Om ultraljud ($^{11}/_{12}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. E. Brunius.

Föredrag: prof. E. Hägglund, Studier om sulfitkokningens kemi ($^{20}/_{11}$).

Uppsala:

Matematiska föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Gunnar Kellström, v. ordf. doc. B. Edlén.

Föredrag: fil. lic. P. Ohlin, Om h/e-bestämning ($^{14}/_{12}$); F. Tyrén, Syrets K-emissionsspektrum ($^{14}/_{12}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. S. Brohult.

Föredrag: fil. lic. S. Arrhenius, Äggviteämnenas dipolmoment ($^{9}/_{6}$); fil. mag. I. Jullander, Polarografen och dess användning ($^{27}/_{10}$); prof. L. Ramberg, Om monobrom-dietylsulfoner ($^{15}/_{11}$); prof. A. Tiselius, Amerikanska reseintryck ($^{15}/_{12}$).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1939: 3—4.

Ur innehållet: Sir Arthur Eddington, De vita dvärgstjärnorna; B. Lindblad, Några intryck från amerikanska observatorier sommaren 1939; Y. Öhman, Polarimetri och astrofysik; B. Lindblad, Anders Lindstedt, Karl Bohlin; N. V. E. Nordenmark, Astronomiska Sällskapet 20 år, en återblick.

Svensk kemisk tidskrift, 1939: 11—12; 1940: 1.

Ur innehållet: O. Dahl, An Apparatus for Elektrodialysis and Separation of Organic Colloids in Sols and Gels; K. Myrbäck, Über die Oxidation des Glucosons (2-Keto-Glucose) durch Hypojodit; G. Lunde, Nye forskninger over vitamin B-komplexet; E. Jorpes, Polysaccharidschwefelsäureester im Tierreich; K. Sjöberg o. M. Jersin, En snabb metod för bestämning av fosfor i hö och andra fodermedel; E. Larsson, Tionyldiättiksyrans sönderfall i sur vattenlösning.

ERA, 1939: 11—12; 1940: 1.

Ur innehållet: Överspänningsskyddstekniken; Svetsning av rostfritt stål och lättmetaller; Elektriciteten i medicinens tjänst; Vattenfallsstyrelsens nybyggnader; Förbättras icke gummiledningarna?; El-nyheter.

Flygning, 1939: 22—24; 1940: 1—3.

Ur innehållet: Flygande guld-, radium- och oljeletare; Flygande polarforskare; På neutralitetsvakt; Försvarsberedskap; Våra flygare; Våra flygmaskiner; På internationell segelflygtävling; Trä i flygplan; Lättmetallernas korrosion; Metoder för molnhöjdsbestämning; Flygkompasser; Osymmetriska flygplan; Flygande arkeologer.

Matematisk Tidsskrift, København 1939, **A**: 1—3 og **B**: 1—3.

Ur innehållet i **A**: J. Hjelmslev, H. G. Zeuthen; H. Christensen, Ellipsen i vektoriel Behandling; B. Jessen, Om Polyedres Rumfang; A. S. Bang, Primtal i Polynomier af anden Grad; H. Bohr, Om Logaritme- og Eksponentialfunktionen; Danske Eksamensopgaver; Opgaver til Løsning. — Ur innehållet i **B**: V. Jørgensen, Om et Korollar til Picard-Landaus Sætning; B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori; M. Dehn, Ueber Abbildungen; N. Arley, Om et dirichletsk integral; A. S. Bang, Om Summer af Potenser af sjette Grad.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1939: 4.

Ur innehållet: A. Kahrstedt, Bearbejdelsen af de smaa Planeter paa Coppernicus-Instituttet; J. Ohlsson, Isac Newton och hans »Naturvetenskapens matematiska principer»; P. Pedersen, Den store Hastighed, hvormed et Himmellegeme ændrer sin Højde under den daglige Bevægelse.

Fysisk Tidsskrift, København 1939: 5—6.

Ur innehållet: K. Wingårdh o. L. Parke, Katodstråloscillografen; F. Nielsen o. K. G. Hansen, Skoleomformere; N. Berg, Nogle Bemærkninger vedrørende Kemiundervisningen i Gymnasiet; N. Wieth-Knudsen, Elektriske Svingninger; C. Møller o. B. Eriksen, Om en ny Elementarpartikel; C. M. Hvorslev, Reaktionshastighed; O. Wiberg, Kemi i Gymnasieskolen; Danske Eksamensopgaver.

Naturens Verden, København 1939: 8—10.

Ur innehållet: M. Mathiesen, Nyere undersøgelser over menneskets varmeregulation; J. A. Anderson, 200-Tommers Kikkerten. För övrigt ett rikhaltigt, huvudsakligen biologiskt innehåll.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1939: 4.

Ur innehållet: M. Dehn, Ueber Ornamentik; Th. Skolem, Litt om polynomers opspaltning i summen av to kvadrater; Eksamensopgaver; Opgaver til løsning; Løste opgaver.

Fra Fysikkens Verden, Tidsskrift utg. av Fysikkforeningen i Oslo, 1939: 3—4.

Ur innehållet: B. Trumpy, Den kosmiske stråling; W. Romberg, Die Grundgedanken der Elektronenoptik; R. Schnell-Larsen, Katodestrålerøret og dets anvendelse; Om bruken av katodestråleoscillografen i undervisning og måleteknikk; O. Netteland, Et høispendingsapparat til undervisnings- og laboratoriebrug; K. Alfsen, Om behandlingen av begrepene kraft og masse i skoleundervisningen; E. Esp, Elevøvelser i kjemi; E. K. Broch, Mesotronet, det tunge elektron; J. Aars, Om lyskilder i båndspektroskopien; E. Vollseth, Elevøvelser i fysikk. Se för övrigt recension i detta häfte.

Himmel og jord, Oslo 1939: 10; 1940: 1—2.

Ur innehållet: W. Werenskiold, Ringer om sol og måne; L. Harang, Luftens sammensetning i større høyder; S. Rosseland, Med en million kilometers fart gjennom verdensrommet; J. Garwick, Går jorden galt?; S. Rosseland, To nya Jupitersatelliter; J. Garwick, Kjemisk analyse tusener lysår borte.

Naturen, Bergen 1939: 12; 1940: 1—2.

Ur innehållet: E. Jensen, Om interioniske krefter; B. Trumpy, Mesotronet en ny elementærpartikkel; S. Einbu, Kan nordlyset høres?. För övrigt ett rikhaltigt biologiskt innehåll.

Uppsatser av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll under 1939 i följande tidskrifter:

Pedagogisk tidskrift: H. Bergström, Matematikundervisningen i danska gymnasier — och i svenska (nr. 6).

Skola och Samhälle: O. Åhström, En värdefull handledning i räkning (A. Bergsten, Folkskolans räkneundervisning).

Tidning för Sveriges läroverk: Fysiken i det treåriga gymnasiet (nr 8); Läroverkens examensskrivningar (nr 23, 26); Statistik om realexamen v. t. 1938 (nr 8); Institutionsföreståndareskapet (nr 7); Meddelanden från Föreningen för matem.-naturvetenskaplig undervisning (nr 3, 8, 24).

Skola och hem, utg. av Finlands svenska läroverksförening: J. E. Renholm, Ljuset och materien; E. Falck, Lärarutbildningen inom den fysisk-matematiska ämnesgruppen. Meddelande från Finlands svenska läroverksförenings fysikkurs i jan. 1939. Uppgifterna i studentexamen i Finland våren och hösten 1939.

Tidskrift, utg. av pedagogiska föreningen i Finland: Uppsatserna nästan uteslutande på finska, några med ref. på tyska. U. Kuuskoski, Über die Unterrichtsmethoden der physikalischen Arbeitsstunden der Schüler.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja, Helsingfors: L. Ahlfors, Bernhard Riemann och hans insats i matematiken; E. Falck, Synpunkter på Fermats problem; T. P. Lesch, Det sneda kastet analyserat med fallvägen som parameter; R. Meinander, De fysikaliska förhållandena i den högre atmosfären. För övrigt uppsatser på finska språket.

Den høgre Skolen, Oslo: O. Netteland. Gnisttelleren; E. Halmøy, Å lage saltsyre med gjeven styrke, Masomnprocessen; S. Jenssen, J. Lohne, E. Esp, J. Bjørnstad, Elevøvelser i realskolen. Meddelanden från fackmötet (matem., fysik o. kemi) i Trondheim 1939 samt från lärarföreningens matematik- o. fysik-kemisektioner i Oslo.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1085) *På övre ändan av en lodrät axel är fästad en plan spegel, vars speglande yta är vänd uppåt och bildar vinkeln v med axeln. Spegeln belyses med vågräta parallella ljusstrålar. Vad ser en iakttagare, som håller sitt öga på axelns förlängning, då axeln roterar?* *X.*

1086) *För vilka trianglar ABC gäller relationen*

$$8 \cos A \cos B \cos C + 16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 3 \,?$$ *X.*

1087) *Rötterna till ekvationen* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *betecknas med* x_1, x_2, x_3, *och* x_4. *Bestäm den ekvation, vars rötter äro* $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ *och* $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

B. Lindwall.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1088) Lös ekvationen $\frac{x - a}{b + c} + \frac{x - b}{a + c} + \frac{x - c}{a + b} = 3.$

Svar: $x = a + b + c$.

1089) I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 7 cm och den inskrivna cirkelns radie 3 cm. Beräkna sidorna.

Svar: 18 cm och $(12 \pm \sqrt{18})$ cm.

1090) I en cirkel med radien 8 cm skära två kordor varandra under 60° vinkel. Den ena kordans delar äro 3 cm och 5 cm. Beräkna den andra kordans delar.

Svar: $\frac{1}{2}(\sqrt{229} \pm 13)$ cm eller $\frac{1}{2}(\sqrt{181} \pm 11)$ cm.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1088 är insänd av *X.*, uppg. 1089—2000 av *B-r.*

1091) Lös ekvationen $\cos x(\cot 2x - \cot 3x) = 1$.
Svar: $10° + n \cdot 120°$; $50° + n \cdot 120°$.

1092) En triangels sidor bilda aritmetisk serie med differensen 3 cm. Bestäm minimivärdet på den omskrivna cirkelns radie.
Svar: 6 cm.

1093) Bestäm maximivärdet på volymen av en rät cirkulär cylinder, vars mantelyta bildar en rektangel, som kan inskrivas i en given cirkel med radien r.

Svar: $\frac{4\,r^3\sqrt{3}}{9\pi}$.

1094) Bestäm b, uttryckt i a, så att ekvationen $x^2 - 2xy - 3y^2 + 2ax + 2y + b = 0$ kommer att betyda två räta linjer, och angiv orten för dessa linjers skärningspunkt, då a varierar.
Svar: $b = \frac{1}{4}(3a^2 - 2a - 1)$; orten är $x + 3y = 1$.

1095) En godtycklig rät linje genom en parabels brännpunkt F skär parabeln i A och B samt diametern genom parameterns ena ändpunkt i C. Visa, att FC är medelproportional till FA och FB.

1096) I en parabel inskrives en godtycklig triangel ABC. Linjen AB skär i D parabeldiametern genom C; linjen AC skär i E parabeldiametern genom B. Visa, att DE är parallell med parabelns tangent i A.

1097) Parallellogrammen $OABC$ har sidorna OA och OC belägna utefter en hyperbels asymptoter; linjerna AB och BC skära hyperbeln i D, resp. E. Visa, att DE är parallell med diagonalen AC.

1098) A är en given hyperbels ena vertex, P en godtycklig punkt på hyperbeln. Tangenten i P råkar ena asymptoten i B. Linjen AP samt en linje genom B parallell med konjugataxeln råkas i C. Visa, att längden av BC är konstant.

1099) Rektangeln $ABCD$, vars sidor äro parallella med koordinataxlarna, har hörnen A och C belägna på kurvan $xy = a^2$. Diagonalen AC skär koordinataxlarna i P och Q. Visa, att linjerna BP och BQ äro parallella med var sin av kurvans tangenter i A och C.

2000) En rät linje parallell med x-axeln skär kurvan $x^2y + y = 1$ i A och B; tangenterna i A och B råkas i C. Bestäm linjen AB så, att ytan av triangeln ABC blir så stor som möjligt.

Svar: Linjen $y = \frac{1}{4}$; ytan $= \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lösn. till uppg. 1057—1059.[1]

1057) *Om a ligger mellan -1 och $+1$ kan man parallellförflytta kurvan $y = \sin x$ så, att den hela tiden glider mot bägge grenarna av kurvan $y^2 = 1 + 2a\cos x + a^2$.* *X.*

1:o. Ekvationen $y = \sin(x - v) - a\sin v$ (1) betyder en kurvskara, som erhålles ur $y = \sin x$ genom en rörelse av varje punkt på denna parallellt med kurvan $y = -a\sin x$. Skarans envelopp fås ur (1) jämte $\frac{dy}{dv} \equiv -\cos(x - v) - a\cos v = 0$ (2). Elimineras v ur (1) och (2), erhålles enveloppens ekvation $y^2 = 1 + 2a\cos x + a^2 \equiv$ $\equiv (1 + a\cos x)^2 + (a\sin x)^2$. För $-1 < a < 1$ är $y^2 > 0$, varför enveloppens båda grenar ligga helt skilda på ömse sidor om x-axeln. Ekv. (2) ger reella x-värden för kurvans tangeringspunkter med enveloppen; y-värdena fås efter elimination av x ur (1) och (2) ur ekvationen $y^2 + 2ay\sin v + a^2 = 1$, vars rötter äro reella och av olika tecken; varje kurva (1) tangerar alltså båda grenarna av enveloppen. *B-r.*

Även löst av *S. L.*

2:o. Man tänker sig en cylinder med bottenradien 1 och en kon med toppvinkeln 90°, vars axel är parallell med cylinderaxeln och vars spets ligger på avståndet a från denna. Snittkurvan mellan dessa ytor blir vid utveckling i planet på samma gång som cylindermanteln just den i lydelsen nämnda. Ett tangentplan till konen skär ut en ellips på cylindern, som tangerar kurvans bägge grenar. Av denna ellips blir vid utvecklingen just kurvan $y = \sin x$, parallellförflyttad, allt efter valet av tangentplan. Därav följer påståendet. *N. J.*

1058) *P är ena ändpunkten av en parameter i ett kägelsnitt. Tangenten och normalen i P skära kägelsnittets transversalaxel i T och N resp. En genom P, T och N gående cirkel skär kägelsnittet under den spetsiga vinkeln v. Vilken är kägelsnittets excentricitet?* *Stig Comét.*

Då vinkeln mellan kurvorna är = vinkeln mellan cirkelradien OP och kurvans normal, erhålles $\angle ONP = v$, varav följer att vinkeln φ mellan tangenten och radieus vektor i detta läge är $= v$. Om kägelsnittets ekvation är $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$, är $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{r'} = \frac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta}$ och för $\theta = \frac{\pi}{2}$ blir $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} v = \frac{1}{e}$ eller $e = \cot v$. *S. L.*

Även löst av *B-r* och *Lars Krogset.*

---

[1] David Hjelle hade insänt lösningar till uppg. 1005 och 1007.

1059) *Ett klot skäres i två delar av ett godtyckligt plan. 1:o Bestäm sannolikheten för att ingen av delarna är mindre än bråkdelen α av klotet, $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$. 2:o Visa att sannolikheten för att någon av delarna är mindre än 3 % av klotet är större än $\frac{1}{2}$.*

S. L.

1:o. Varje punkt inom klotet bestämmer entydigt mittpunkten av en plan sektion genom klotet. Om mittpunktens avstånd från sfärens medelpunkt är x, sfärens radie r, blir volymen av det mindre segmentet $\frac{\pi}{3}(r - x)^2(2r + x)$ och villkoret $\frac{(r - x)^2(2r + x)}{4r^3} \geqq \alpha$ eller $\left(\frac{x}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right) + 2 \geqq 4\alpha$ och om $\frac{x}{r} = y$, fås $y^3 - 3y + 2 \geqq 4\alpha$. Funktionen $z = y^3 - 3y + 2(1 - 2\alpha)$ har ett nollställe y_1 mellan 0 och 1 och $z > 0$ för $0 \leqq y < y_1$. Man finner $y_1 = 2 \sin\frac{\varphi}{3}$, där $\sin\varphi = 1 - 2\alpha$. Den sökta sannolikheten är $\frac{4}{3}\pi x^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = y_1{}^3 = 8 \sin^3\frac{\varphi}{3}$, där φ bestämmes av $\sin\varphi = 1 - 2\alpha$ med villkoret $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$.

2:o. För $\alpha = 0{,}03$ blir $\sin\varphi = 0{,}94$ och sannolikheten $0{,}4981$. Den sökta sannolikheten är $1 - 0{,}4981 = 0{,}5019$. *S. L.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.[1]

Januari 1940.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{3}{2}. \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

2. I en likbent triangel äro basen och höjden mot basen lika stora. Den omskrivna cirkelns radie är R. Beräkna den inskrivna cirkelns radie, uttryckt i R.
3. Två geometriska serier bestå av vardera tre termer. Första termen är i båda serierna $= 1$. Andra och tredje termerna i den andra serien erhållas av motsvarande termer i den första serien genom subtraktion med 2 respektive division med 4. Bestäm serierna.
4. Från en punkt P utanför en cirkel äro dragna tangenterna PA och PB till cirkeln. PA är 8 cm, och det kortaste avståndet från P till någon punkt på cirkelns omkrets är 4 cm. Beräkna ytan av triangeln PAB.
5. I triangeln ABC är D fotpunkten för höjden från C. Radien i den cirkel, som kan omskrivas kring triangeln ACD, är $^2/_3$ av radien i den cirkel, som kan omskrivas kring triangeln BCD. Vinkeln A är $47°$. Beräkna triangelns återstående vinklar.
6. På en radie OA i en cirkel med medelpunkten O tages punkten P, så att PO blir en tredjedel av radien. Genom P drages kordan BC, så att $BP : PC = 7 : 8$. I vilket förhållande delas cirkelsektorn OAB:s yta av linjen BP?
7. I en rätvinklig triangel är en av de spetsiga vinklarna $60°$. Hypotenusan delas i tre lika stora delar, och delningspunkterna sammanbindas med den räta vinkelns spets. Beräkna de delar, i vilka den räta vinkeln därvid delas.
8. Bestäm värdet på konstanten a, så att den räta linjen $y = a - x$ och kurvan $y = x^2 - 5x + 7$ få endast en punkt gemensam. Beräkna koordinaterna för denna punkt. Upprita kurvan och den räta linjen för det erhållna värdet på a.

---

[1] Uppg. i student- och realexamen 1936, 1937, 1938 och 1939 finnas i särtryck à 60 öre.

Resultat: **1.** De reella rotsystemen äro: $x_1 = 3$; $y_1 = 1$ och $x_2 = -3$; $y_2 = -1$. **2.** $\frac{2R(\sqrt{5}-1)}{5}$. **3.** 1; 4; 16 och 1; 2; 4 eller 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{16}{9}$ och 1; $-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **4.** 30,72 cm². **5.** $B = 29^\circ{,}18$; $C = 103^\circ{,}82$. **6.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 1 = 2{,}628$. **7.** $40^\circ{,}89$; $33^\circ{,}01$ och $16^\circ{,}10$ (Fäll från delningspunkterna normaler mot en katet). **8.** En gemensam punkt (2; 1), om $a = 3$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Bestäm alla värdesystem x, y, z, som satisfiera ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 63. \end{cases}$$

2. I de punkter på kurvan $4y = x^4 - 10x^2 + 9$, där x-koordinaten är 2 respektive -2, dragas tangenterna och normalerna till kurvan. Bestäm ytan av den fyrhörning, som dessa linjer begränsa.
3. I en aritmetisk serie är summan av första, andra, femte och sista termen 80. Dessa fyra termer bilda dessutom en geometrisk serie. Vilken är den aritmetiska serien?
4. I parallelltrapetset $ABCD$, där AB är parallell med CD är $DA = 5$ cm, $AB = 4$ cm och $BC = 3$ cm. Vinkeln BCD är tre gånger så stor som vinkeln BAC. Beräkna vinklarna i parallelltrapetset.
5. I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är vinkeln mellan två närliggande sidoytor 120°. Beräkna vinkeln mellan en sidoyta och basytan.
6. Lös ekvationen:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x} + 2 \operatorname{tg} x + \cot x = 6 \sin 2x.$$

7. Från punkten P (10; 0) drages en linje till en punkt Q på kurvan $2y = 2x^2 + 8x - 7$. Undersök, hur sträckan PQ varierar, då Q beskriver kurvan. Bestäm särskilt PQ:s maximi- och minimivärden.
8. Ett klot tangerar sidoytorna till ett hörn i en regelbunden tetraeder eller deras förlängningar. Tetraederns höjd är h. Om klotets radie är tillräckligt liten, ligger klotet helt inom tetraedern. Om radien växer, inträffar det, att endast en del

av klotet ligger inom tetraedern. Växer radien ytterligare, kommer slutligen klotet att ligga helt utom tetraedern. Studera, hur den inom tetraedern belägna sfäriska ytan varierar, och åskådliggör även variationen grafiskt.

Resultat: 1.

x	$+\sqrt{21}$	$-\sqrt{21}$	$+\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$
y	$-\sqrt{21}$	$+\sqrt{21}$	$-2{,}6\sqrt{5}$	$+2{,}6\sqrt{5}$.
z	$-\sqrt{21}$	$+\sqrt{21}$	$+2{,}2\sqrt{5}$	$-2{,}2\sqrt{5}$

2. 10 ytenheter. **3.** 2, 6, 10, 14, 18 ... 54 (14 termer) eller 20, 20 ... 20 (godtyckligt antal termer). **4.** $A = 159^\circ{,}65$, $B = 35^\circ{,}43$; $C = 144^\circ{,}57$; $D = 20^\circ{,}35$. **5.** 45°. **6.** $22^\circ{,}5 + n \cdot 45^\circ$. Omformas vänstra ledet på följ. sätt: $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} + \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 2 \sin 2x + \frac{2}{\sin 2x}$, erhålles ekv. $2 \sin^2 2x = 1$ och $\cos 4x = 0$. **7.** $PQ = z$ har två minima, $z_1 = \frac{\sqrt{833}}{2}$ och $z_3 = \frac{\sqrt{333}}{2}$ för resp. $x_1 = -4$ och $x_3 = 1$ och ett max., $z_2 = \frac{\sqrt{845}}{2}$ för $x_2 = -3$. Då x växer från $-\infty$ till $+\infty$, går z från $+\infty$ genom värdena z_1, z_2 och z_3 mot $+\infty$. **8.** De in- och vidskrivna klotens radier äro resp. $r = \frac{h}{4}$ och $r_1 = \frac{h}{2}$. Om klotets radie $= x$, är ytan $= 4\pi x^2$ för $x \leq r$. För $r \leq x \leq r_1$ blir den inom tetraedern belägna kalotten $= 2\pi x (h - 2x) = 4\pi (r_1 x - x^2)$. Bortsett från konstanten 4π ske alltså variationerna inom resp. områden efter parablerna $y = x^2$ och $y = r_1 x - x^2$ med övergång från den ena till den andra i kurvornas utom origo belägna skärningspunkt. Anm. Variationerna förlöpa på samma sätt vid en godtycklig regelbunden pyramid med den skillnaden att den omnämnda konstanten (4π) får annat värde för den senare parabeln.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. I ett koordinatsystem är O origo och P en godtycklig punkt på hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$. Bevisa, att den triangel, som bildas av hyperbelns tangent och normal i P samt x-axeln, har lika stor yta som den, vars sidor utgöras av sträckan PO, normalen mot denna genom P samt x-axeln.
2. Bestäm koefficienterna a och b, så att funktionen $\frac{x^2 + ax}{x + b}$ får ett maximivärde $= 3$ för $x = -3$.

3. Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ och parabeln $y^2 = 2px$ ha lika stora parametrar. Tangenterna till kurvorna i en av deras skärningspunkter avskära på y-axeln en sträcka $= r$, normalerna i samma punkt på motsvarande sätt en sträcka $= s$. Den gemensamma kordans avstånd från hyperbelns vertices äro t och u. Bevisa, att $rs = tu$.
4. Två parabler, vilkas axlar sammanfalla med x-axeln, tangera den räta linjen $y = 2x$. Avståndet mellan deras vertices är en längdenhet. Sök och konstruera orten för dessa parablers skärningspunkter.
5. I en rät cirkulär kon, vars volym är konstant och lika med volymen av en sfär med radien a, inskrives en halvsfär, så att dess plana begränsningsyta ligger i konens bottenyta. Sök maximum av halvsfärens volym, då konens form varierar.
6. Tangenter dragas till en ellips i parametrarnas ändpunkter. Om parameterns längd är konstant, hur stor är ellipsens excentricitet, då den av de nämnda tangenterna bildade fyrhörningen har minsta möjliga yta?
7. Konstruera kurvan

$$y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Resultat: **2.** $a = 9$; $b = -3$. **3.** Om skärningspunkten är $(x_1; y_1)$, så äro de båda produkterna $= x_1^2 - a^2$. **4.** Om $(a; 0)$ är vertex för en parabel, som tangerar $y = 2x$, så är tangeringspunkten $(2a; 4a)$. Denna ligger på parabeln $y^2 = 2p(x - a)$, varav $p = 8a$ och $y^2 = 16a(x - a)$ (ekv. 1). Låt denna skära $y^2 = 16a_1(x - a_1)$, där $a_1 = a + 1$, och eliminera y^2, så erhålles $x = a + a_1 = 2a + 1$ och $a = \frac{x-1}{2}$, som insatt i (1) ger orten $y^2 = 4(x^2 - 1)$, dvs en hyperbel, vars ena asymptot är den givna linjen. **5.** Volymens maximivärde $= \frac{16\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ (då konens höjd $= 2a$). **6.** Halva parametern $= p = a - ec = a(1 - e^2)$, varav $a = \frac{p}{1 - e^2}$. Tangentens intercept äro $\frac{a^2}{c}$ och a; $\therefore$ fyrhörningens yta $= \frac{2a^3}{c} = \frac{2p^2}{e(1 - e^2)^2}$, som har min., då nämnaren har max., dvs för $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **7.** $y_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ för $x = 45° + n \cdot 360°$; $y_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ för $x = 225° + n \cdot 360°$. Asymptoter: $x = 135° + n \cdot 180°$ och skärning med x-axeln för $x = n \cdot 90°$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En homogen kropp har formen av en rät cirkulär cylinder med basradien 3 cm och höjden 20 cm. Den ställes på ett lutande plan, vars lutningsvinkel är 15°. Friktionskoefficienten är 0,30. Undersök, huruvida cylindern står kvar på planet, råkar i glidning utför planet eller stjälper över ända.
2. En motorvagn med 9 tons vikt går på en horisontell bana med hastigheten 45 km/tim. Den för dragningen erforderliga effekten är 15 hästkrafter. Huru stor bör den dragande effekten vara, för att vagnen med samma hastighet skall gå uppför en backe med stigningen 1 : 100? Friktions- och luftmotstånden ha i båda fallen samma värde.
3. I ett hus funnos ledningar för lysgas. Då man kopplade en manometer till en gaskran i bottenvåningen, fann man, att övertrycket på detta ställe var 35 mm vattenpelare. Huru stort var då övertrycket i gasledningen i en våning 10 m högre upp? Såväl luftens som lysgasens täthet avtager uppåt, men man kan räkna med genomsnittsvärdet 1,2 kg/m³ för luftens täthet och 0,5 kg/m³ för lysgasens.
4. En glaskub vilar på en horisontell skiva, vars övre yta är svärtad. Mellan kuben och skivan har man infört en liten droppe alkohol. Ett öga betraktar droppen genom en av kubens vertikala sidoytor. Droppen är belyst med ett parallellt knippe vitt ljus, som infaller snett uppifran genom motstående sidoyta. Då vinkeln mellan ljusknippet och lodlinjen långsamt ökas, ser man, att droppen plötsligt blir silverglänsande. Detta inträffar just då vinkeln mellan knippet och lodlinjen ökats till 51°. Beräkna brytningsindex för alkohol. Ljusbrytningen tänkes försiggå i ett vertikalplan, som är parallellt med två av kubens sidoytor.
5. En samlingslins med brännvidden 50 cm och en spridningslins med brännvidden 10 cm äro med sammanfallande axlar uppställda på ett avstånd av 42 cm från varandra. Ljusstrålar från ett avläget föremål på axeln träffa först den positiva, sedan den negativa linsen. Huru många gånger större blir den bild, som alstras av detta linssystem, än den, som alstras av den positiva linsen ensam?
6. För att kontrollera en voltmeter, vars motstånd är 2 500 ohm, har man parallellkopplat densamma med ett motstånd, som kan anses vara exakt 45 ohm. Den sålunda shuntade volt-

metern seriekopplas med en silvercoulometer i en strömbana, genom vilken under 1 800 sekunder ledes en ström av konstant styrka. Voltmetern visar härvid 10,00 volt, och i coulometern utfälles 0,451 g silver. Hur mycket skiljer sig den avlästa spänningen från den riktiga? En ström av 1 ampères styrka utfäller på 1 sek 1,118 mg silver.

7. Glimlampor äro ett slags lampor, där ljuset alstras genom elektrisk urladdning i en förtunnad gas. De tändas först vid en bestämd spänning, som för en viss lampa vid likström är 160 volt. Lyser en sådan lampa för växelström, utsänder den inte ljus under hela perioden; men den tändes varje gång spänningen når upp till tändspänningen, och om växelströmmens frekvens inte är alltför stor, kan man anse, att tändspänningen även i detta fall är 160 volt. Man ville begagna en sådan lampa för undersökning av en växelströmskälla. För ändamålet hade man ett motstånd *AB* på 100 ohm, försett med en glidkontakt *C*. Glimlampan anslöts till polskruven *A* och glidkontakten *C*, och polskruvarna *A* och *B* anslötos till växelströmskällan. Glidkontakten försköts därefter i riktning från *A* mot *B*, och det visade sig, att lampan började lysa, då motståndet mellan *A* och *C* var 53 ohm. Beräkna den effektiva spänningen mellan de till strömkällan anslutna polskruvarna *A* och *B*. Lampans motstånd är mycket stort.

8. En shuntmotors magnetlindning frånkopplas nät och borstar och anslutes i stället till ett ackumulatorbatteri, som lämnar konstant magnetiseringsström. Genom ett seriekopplat reglerbart motstånd sättes ankarlindningen i förbindelse med ett likströmsnät, vars spänning är konstant 220 volt. Då hela det reglerbara motståndet är urkopplat, tager ankaret 15 ampère vid ett varvtal på 600 varv/min. Vid ett annat tillfälle är ankarströmstyrkan densamma, 15 ampère, men av det reglerbara motståndet äro nu 2,4 ohm inkopplade. Huru stort blir då ankarets varvtal? Ankarets och borstarnas sammanlagda motstånd är 0,6 ohm.

Resultat: 1. Cylindern står kvar. 2. 30 hkr. 3. 42 mm vattenpelare. 4. $\sqrt{n^2 - \sin^2 39} = 1{,}362$, där n = glasets brytningsindex $= \frac{3}{2}$ 5. 5 ggr så stor. 6. Voltmetern visar 0,09 volt för mycket. 7. 213,5 volt. 8. 498 varv/min.

Gamla och nya elektriska enheter. II.

Av **ERIK INGELSTAM.**

8. De moderna absolutbestämningarnas noggrannhetskrav.

Kan man med de metoder, som schematiskt anförts i förra delen av uppsatsen,[1] verkligen mäta elektriska storheter med en noggrannhet som närmar sig miljondelarna? De i och för sig enklare uppgifterna att konstruera normaler i det internationella systemet och relativmäta mot dem med rent elektriska metoder, funno vi vara begränsade av ett fel på ungefär 100 miljondelar.

Det är inte ens något rutingöra att utföra en medelbar bestämning av vad slag det vara må med en fordrad noggrannhet av 1 promille. Med enbart relativmetoder går det lättare: för brytningsindex med refraktometrar, motstånd med Wheatstones brygga osv. kan man ju på övningslaboratorier mycket väl fordra en sådan precision. Men om olika storheter, såsom längder, massor, svängningstider, strömstyrkor, ingå i bestämningen, så är det endast den precisionsutrustade fysikern, som går i land med uppgiften, och det ingalunda utan besvär. Man må exempelvis tänka på att den omstridda diskrepansen mellan Millikans gamla och Bäcklins nya värde på elementarladdningen rörde sig om ungefär 5 promille. Det som granskades där var ändå resultaten av sällsynt minutiösa konstruktioner och årslånga omsorger!

Det är alltså enormt mycket begärt av de s. k. absolutbestämningarna, att de någonsin skola kunna konkurrera med rent elektriska mätningar. Bättre än 100 miljondelar och om möjligt även bättre än 10 miljondelar skola de vara, om den nya konventionen skall bli den gamla mättekniskt överlägsen. Härför fordras, att felen i alla ingående primärstorheter nedbringas ungefär till miljondelen. Vi skola belysa kraven genom att återge några typiska detaljer.

Det säger sig självt, att en strömvåg[2] måste vara ett utomordentligt fint instrument. Själva vägningsproceduren påminner om kilogramkomparationerna,[1] och den ganska stora vågen är uppställd i ett särskilt rum med manövrering utifrån för att undvika alla störningar. För luftuppdriftskorrektionen måste t. ex. fuktighetsgraden tagas med, och denna måste vara känd på några procent när. Luftfuktigheten i vågrummet spelar förresten en fatal roll genom att den adsorberas på det som väges — ett fel på 1 miljondel av denna orsak kan mycket lätt uppkomma! Enda sättet att undgå felet är att ha luften tillräckligt torr, och för att jämvikt skall inträda, måste viktstyckena hållas vid den avsedda låga fuktighetsgraden flera timmar före vägningen. Av liknande, lätt insedda orsaker hålles även strömstyrkan i spolarna konstant lika länge före försöket. Arretering av vågen under en vägningsserie är absolut förbjuden: redan en förskjutning av eggarnas anliggningslinje på en femtiondels ljusvåglängd skulle medföra ett fel av 1 miljondel i resultatet.

---

[1] Elementa *22*, s. 217.

[2] Uppsatsens s. 19.

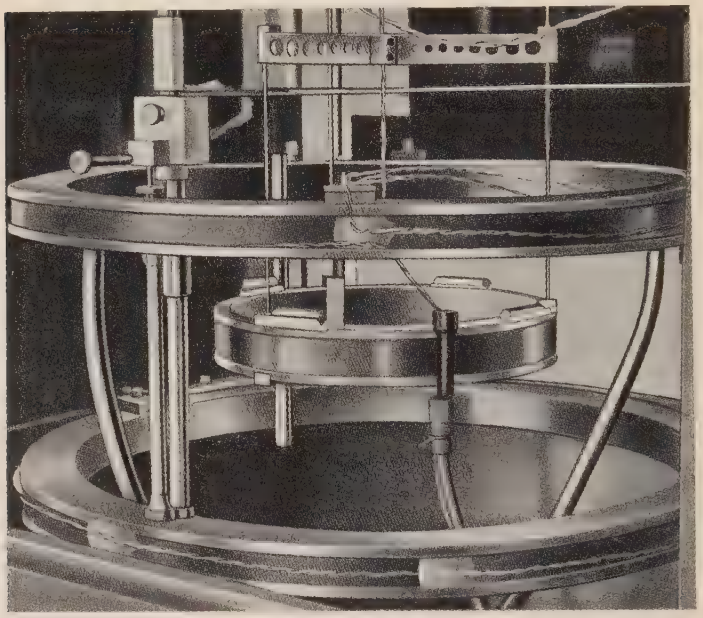


Fig. 7. Spolsystemet i BS:s Rayleigh-våg. Den rörliga spolens diameter är 25 cm.

Vi nämnde, att ohmbestämningarna alltid återföras på en induktionsnormal, vars koefficient anknytes till det absoluta systemet genom beräkning. En solenoid med enkelt trådlager är bäst, och ytligt sett förefaller det, som om lindandet och uppmätningen av en sådan skulle vara skäligen enkelt. Icke desto mindre dominerar just felet i denna konstruktionsnormal hela bestämningen. Både svarvningen till lika diameter av den kvarts- eller pyrexglaskärna, som måste användas, och skärningen av den skruvlinje, i vilken tråden skall ligga, äro behäftade med oregelbundenheter som i regel vida överstiga miljondelen, varför precisionstekniken måste anstränga sig till det yttersta för att nedbringa dem. Härtill kommer så uppmätningen och icke minst viktigt undersökningen av alla korrektioner och felmöjligheter i förhållande till de beräknade villkoren. Här endast några undersökta faktorer: trådens längdförändring vid pålindningen på grund av spänningarna av friktionen vid de trissor, på vilka den löper — denna effekt f. ö. undersökt på mycket elegant sätt delvis med hjälp av elektrisk motståndsmätning — vidare alla temperatureffekter, den pålindade

---

[1] Se t. ex. Gustaver, Elementa *22,* s. 6.

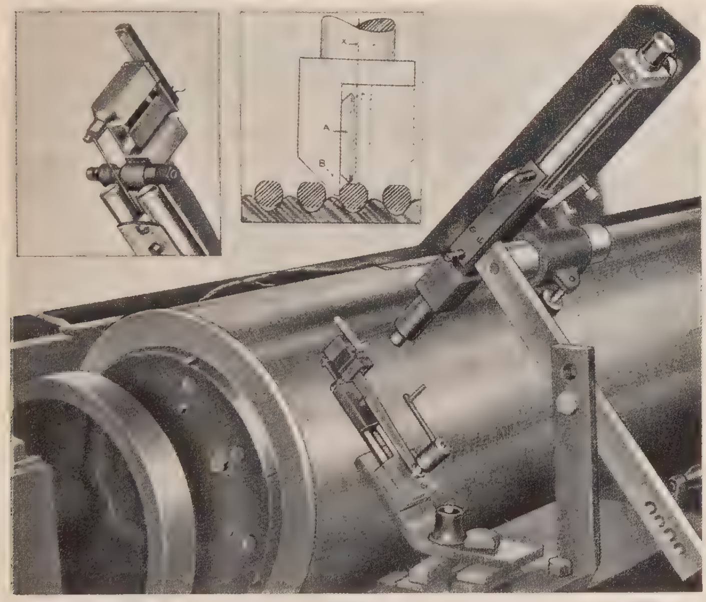


Fig. 8. En detalj vid undersökningen av induktionsnormalen: ritsning av smala, för uppmätningen avsedda streck på planpolerade delar av den redan pålindade tråden (BS). Spolens längd och diameter c:a 100 resp. 35 cm.

trådens spänning mot underlaget, som åstadkommer en elastisk sammantryckning dels av tråden själv, dels av kärnan (!) osv. Det sista inflytandet är ej anfört som ett skämt: vid en BS:s undersökning konstaterades, att gänghöjden efter pålindningen stigit med 6 miljondelar. Alla mått måste givetvis vara korrekt anslutna till den int.metern, och det kan ha sitt intresse att ur BS:s publikation anföra, att »the lengths were determined by comparison with calibrated Johansson gauges».

9. Numerisk anknytning mellan de internationella och absoluta enheterna.

Sedan år 1921 har den internationella meterkonventionens organ, den i Frankrike stationerade Bureau International des Poids et Mesures, med de överordnade generalkonferenserna och de permanenta kommittéerna, beslutat att sörja för även de elektriska enheterna. Som bekant har byrån alltsedan sin tillkomst handhaft längd- och massmätningarna. De utredningar om ändring av de elektriska grundenheternas definition, som redan upptogos under 1920-talet, utmynnade efter omfattande diskussioner i det anförda,[1] av 1933 års generalkonferens fattade beslutet, att de internationella enheterna skulle överges och en återgång ske till de ursprungliga absoluta enheterna.

Enär de mättekniska förutsättningarna redan då ansågos säkerställda, beslöt man att etablera ett intimt samarbete mellan centrallaboratorierna[2] och internationella byrån för att under de år, som återstodo till 1940, uppnå bästa möjliga resultat. De rön i fråga om precisionstekniken, som vi givit några antydningar om, äro till största delen frukten av dessa de senaste årens ansträngningar.

Även av andra orsaker än de sorgliga internationella förvecklingarna hade denna mätplan något försenats. Sommaren 1939 voro ej — som avsett — alla mätningar publiceringsfärdiga. PTR:s viktiga och lovande amperebestämning har ännu ej slutförts, och PTR och BS avsågo att inleda samarbete för ömsesidig kontroll på några punkter. Likaså fortgingo arbetena i internationella byråns laboratorier.

Då slutsammanträdet i vederbörande kommitté och generalkonferensens session på grund av krigsutbrottet ej kommo till stånd och alltså ikraftträdandet uppsköts, har ej heller någon sammanställning publicerats, och ännu mindre ha några slutliga medelvärden fixerats. De båda tabeller, som här sammanställts, innehålla endast de noggrannaste resultaten från de institutioner som — i varje fall med den största numeriska vikten — komma att stå för slutresultaten.

---

[1] S. 1.

[2] Not s. 10.

Absoluta ohm-bestämningar: 1 medelint. ohm $= x$ absoluta ohm.

År	Inst.	Metod	x	Maximalfel (miljondelar)
1937	NPL	Campbell	1,000500	35
1938	NPL	Lorenz	1,000500	30
1936	BS	Grüneisen-Giebe	1,000460 } 1,000472	20
1938	BS	d:o	1,000483	
	PTR	Grüneisen-Giebe	ej publ.	

Absoluta ampere-bestämningar: 1 medelint. amp $= y$ absoluta amp.

År	Inst.	Metod	y	Maximalfel (miljondelar)
1936	NPL	Ayrton-Jones' våg	0,999850	20
1939	BS	Rayleighs våg	0,999868	20
	PTR	Rayleighs våg	ej publ.	

Man kan antaga, att de slutliga reduktionsfaktorer, som sanktioneras i en fredlig framtid, komma att avvika med högst 10 miljondelar från de medelvärden, som vi kunna bilda av de anförda tabellvärdena, nämligen

1 medelint. ohm $=$ 1,000480 absoluta ohm
1 medelint. amp $=$ 0,999860 absoluta amp, alltså bl. a.
1 medelint. volt $=$ 1,000340 absoluta volt
1 medelint. joule $=$ 1,000200 joule.

Bestämmelserna om den fortlöpande vården av de absoluta enheterna kunna vi givetvis ej föregripa utan nöja oss med några jämförelser med den gamla ordningen. Som yttersta normaler ha silvercoulometern och kvicksilverohmen efterträtts av de anordningar, som sammanknyta de elektriska storheterna, närmare bestämt de elektromagnetiska fältens storheter, med de mekaniska. Mödan att utföra dessa svåra mätningar ger alltså som resultat något fysikaliskt väsentligt. Detta var ej fallet t. ex. vid preparationen av ett ohmrör; utom att vara fysikaliskt ointressanta voro mätobjekten fysikaliskt odefinierade och därför orsaken till systemets mättekniska svagheter.

Givetvis kommer den praktiska komparationen av elektriska storheter i framtiden som nu att gå över arbetsnormaler för ohm och volt, i sista hand internationella byråns sekundära normaler. Att upprätthålla deras riktighet blir en byråns angelägenhet, och mödan av den fortlöpande kontrollen blir beroende på huru väl man lyckas med konstruktionen av dem. Man kommer sannolikt att anskaffa och systematiskt anordna satser av kromguldsmotstånd[1] och av westonelement av den nya, sura typen.[2] — Vid undersökningarna av dessa sekundära normaler i förhållande till primärnormalen enligt definitionen, ingår alltså bl. a. mätning av en strömstyrka medelst strömvåg, och proceduren blir ungefär densamma som en vägning av massprototypen, ehuru mera komplicerad. De apparater, som nu konstruerats, kunna stå färdiga och användas gång efter annan med prövning av att detaljerna fungera riktigt.

Nu nog om mätteknik. Jag har velat skissera principerna för dessa fundamentala mätningar någorlunda fullständigt, eftersom litteraturen på området är föga känd och med alla sina petitesser ej heller direkt lockande läsning.

10. På flykt från CGS-systemen.

De pedagogiska frågorna inom elläran utgöra en mycket trasslig härva, och det skulle vara mycket förmätet att söka anvisa, hur den bör lösas. Författarens förhoppning är, att några notiser och synpunkter skola uppmuntra den intresserade pedagogen att draga vidare i någon av trådändarna, och även att de skola vara formulerade radikalt nog för att väcka en del diskussion.

Det är egentligen ganska förvånande, att CGS-systemet, som angavs redan i ellärans ungdom på 1830-talet, då elektromagnetismen blott låg i sin linda, har kunnat bestå under hundra års sällsamt intensiv utveckling. Systemet var ur många synpunkter genialt. Det gav stadga åt mångfalden av nya, rätt olikartade elektriska enheter, och på köpet kom det som bekant — av en lyckträff, utnyttjad av ett snille — att utgöra fröet till den elektromagnetiska ljusteorin.

---

[1] S. 10. Undersökningar av dessa viktiga legeringar ha nyligen utförts även på professor Borelius' institution av d:r Linde (gradualavhandling dec. 1939; referat i Elementa detta häfte s. 124).

[2] S. 11.

Men det kan lika litet fördöljas, att utvecklingen nu i ganska hög grad runnit förbi det. Vi skola här ej fördjupa oss i de mera teoretiska frågorna utan vända oss till en del i tillämpningen viktiga drag.

Elektroteknikern har aldrig känt någon starkare samhörighet med ellärans CGS-system. Den ursprungliga ankytningen medelst tiopotenserna mellan praktikens enheter och det elektromagnetiska systemets blev allt mindre aktuell, då tangentbussolen och jordinduktorn försvunno och de rent elektriska mätningarna vunno i precision,[1] och bröts helt och hållet, då de internationella enheterna infördes. Man använder ju nära nog oinskränkt enheterna amp, volt, ohm, henry och farad för rent elektriska fenomen, numera alltmera sällan alternativt med de båda sistnämnda den e. m. enheten *cm* resp. den e. s. enheten *cm* (!). Endast inom den viktiga grenen magnetismen ha CGS-enheterna bibehållits, företrädesvis i fältenheterna gauss och maxwell. I stället för den relativt sent benämnda enheten oersted, som mäter den magnetiska »fältstyrka» som elektriska strömmar orsaka (vektorn H), har man alltmera övergått till den praktiskt härledda enheten amp·varv/cm, som för den långsträckta solenoiden har en viktig och påtaglig innebörd. Ett alternativ till enheten gauss är den praktiskt härledda volt·sek/cm², ett typiskt exempel på flykten från CGS-systemet.

Så länge man räknar vissa enheter anslutna till amp, volt osv. och andra, som gauss, i CGS-systemet, eller i vissa fall har båda systemens enheter i bruk för en och samma storhet, så äro ellärans formler onödigt komplicerade. Enkelheten och klarheten hos exempelvis CGS-enheterna inom den rena mekaniken beror på att de alla äro avstämda eller homologa, så att proportionalitetsfaktorerna alltid äro ettor. Här måste man tvärtom skriva formlerna som »siffervärdesekvationer», dvs. angiva vilka enheter som avses i formeln, samt medtaga vissa reduktionstal i själva ekvationen. Jämför t. ex.

lagen för inre friktionen

$$f = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dy}$$

lagen för strömgenomfluten ledares påverkan i magnetfält

$$f = \frac{1}{10} \cdot I \cdot ds \cdot B \cdot \sin(I, B)$$

(f i dyn, I i amp, ds i cm, B i gauss)

De viktigaste äro induktionslagens 10^{-8} eller den faktor 1/10, vilken liksom nyss alltid förekommer vid magnetiska fenomen, då en strömstyrka räknas i amp. Att dylika i formler intagna reduktionstal mellan enheter äro estetiskt vidriga är en sak men ej den värsta. De göra systemet i hög grad oklart och obekvämt. Om man ej, som väl de flesta av oss blivit lärda, först genomför härledningarna i ett homologt system, nämligen det e. m. CGS-systemet, och sedan transponerar dit de praktiska enheterna, lyckas man ej genomskåda det hela. Det är ingen överlägsen kritik mot teknikern, om man konstaterar, att han ofta räknar med dessa talfaktorer utan att veta, varifrån de egentligen komma. Man kan ej begära, att han ständigt skall ha CGS-systemens stegar tillgängliga i medvetandet, om han ej råkar syssla just med elektronfysik eller teoretiska frågor. Men denna i och för sig triviala förbistring i enhetssystemen är säkert en mycket starkt bidragande orsak till att atom- och elektronfysiken för mången praktiker synes så svårtillgänglig.

---

[1] Avd. 4.

Även CGS-systemens begreppsförråd måste anses mindre lämpligt i vissa avseenden. Permanenta magneter och deras poler, som utgöra grunden för det ena av systemen, eller det andra systemets laddade kroppar av ringa utsträckning, i vår begreppsvärld ofta konkretiserade av flädermärgskulor i trådar, allt detta stod i centrum av intresset och den exakta forskningen vid 1800-talets början. Det är ingen som bestrider att situationen är förändrad; vi kunde i förra artikeln antyda några drag ur den utvecklingen. Den en gång viktiga jordmagnetismen spelar nu en blek roll i jämförelse med sin ättling elektromagnetismen. Detta gäller även storleksordningen av fältstyrkorna: de primärt av strömmar anlagda fälten äro i regel starka, evad det handlar om elektroteknikens eller atomforskningens hjälpmedel, generatorernas eller cyklotronernas fält. Man har numera mycket större anledning att uppfatta magnetismen som ett specialområde inom elläran än att som i det elektromagnetiska systemet lägga det förra till grund för hela den senares uppbyggnad.

Hur har denna historiska förskjutning inverkat pedagogiskt? Inom CGS-systemen äro de båda områden, som ligga nära inkörsportarna till respektive system, nämligen »magnetostatik» och elektrostatik, *enkla* att lära sig och behärska. Men för att komma fram till det som i nutida teknik och vetenskap är viktigt har man som bekant en ganska mödosam väg att vandra.

Vi ha så i våra skol- och universitetskurser måst börja med en noggrann och fullständig behandling av elektrostatiken och magnetostatiken, innan vi kommit fram till de elektriska strömmarna och deras viktiga egenskaper. Denna lärogång har förefallit ofrånkomlig. Och detta trots att elektrostatiken, behandlad på detta sätt, måste sägas vara av perifert intresse och ingalunda fritt från faror för missförstånd för skolynglingen, som redan kan koppla allehanda elektriska apparater. Och detta vidare trots att magnetpolen är ett begrepp, vars fiktiva karaktär framträder redan vid ett polvågsförsök med en strumpsticka. Dessa fenomen ha måst intränas räknemässigt — och man har kunnat göra det på grund av att deras lagar äro enkla i dessa system. Fysikers samvetsnöd i dessa frågor spåras dock både i Skolöverstyrelsens metodiska anvisningar och i moderna läroböcker.

Så har en välutbildad akademiker haft suverän kunnighet att beräkna magnetnålars deviationer även vid de mest långsökta arrangemang av magetstavar och strömmar relativt jordfältet, eller beräkna elektriska potentialer i e. s. e., då volymladdningarna varit fördelade på något uppgivet sätt. Men om det däremot gäller att göra en överslagsberäkning av en spoles induktionskoefficient, strömstöten vid ett induktionsförsök eller att beräkna en plattkondensators kapacitet i mikrofarad, för att taga ett par enkla exempel inom ramen för vad läraren behöver för sina demonstrationsförsök? Dessa fall ligga betydligt krångligare till. Handen på hjärtat — är varje lärare beredd att omedelbart presentera en uträkning? På skolstadiet måste de helt undvikas, och på universitetens första kurser betraktas de mestadels som »svåra».

Tänk förresten efter vad som ingår i den sistnämnda frågan! Så gott som alla elektrostatiska begrepp måste aktualiseras, måhända Gauss' sats med det mystiska 4π, för att räkna ut $C = \varepsilon \cdot \frac{A}{4\pi d}$, men det värsta besväret kvarstår, nämligen att förvandla det så funna talet, som har enheten *cm* tack vare att det är uttryckt i e. s. e., till det vanliga elektriska enhetssystemet. Till den ändan måste man gå över till e. m. e., eftersom de praktiska enheterna äro härledda ur dem, och det sker som bekant med hjälp av den för det föreliggande problemet absolut främmande ljushastigheten c_0. Man skall vidare, även om man innan den nya konventionen träder i kraft försummar skillnaden mellan int. och abs. enheter, erinra sig en del tiopotenser för anknytningen e. m. — prakt. enheter, minst de två 1/10 och 10^8, innan man har den faktor $c_0^{-2} \cdot 10^{15}$, varmed det elektrostatiska uttrycket skall multipliceras för att ge värdet i mikrofarad. Antingen man i varje särskilt fall för sig själv aktualiserar nödvändiga fragment av härledningen, eller har tillräckligt gott sifferminne för att komma ihåg tal som $9 \cdot 10^{-5}$, så torde de flesta hålla med om, att det är en smula besvärligt. Det är obestridligen CGS-systemets fel, som helt enkelt är opraktiskt för många viktiga fall.

Man må efter personlig läggning beklaga flykten från ellärans CGS-system eller icke; tendensen är dock så påtaglig, att det torde vara utsiktslöst att med någon framgång längre söka spjärna emot denna utveckling. Moderna läroböcker — hur olika de än äro sinsemellan — ha mer eller mindre villigt följt med, och det blir allt svårare för den som endast fostrats i CGS-systemets skola att följa med i de nya tankegångarna.

Kunde en reform genomföras, som gåve ett enhetligt, naturligt och i sig homologt elektriskt enhetssystem, så vore inga mödor av teoretisk och pedagogisk art för stora. Svårigheterna skola ingalunda fördöljas. De teoretiska sammanhangen måste vara fullt oantastliga på varje punkt, och det är ej akademisk hybris att ej hålla till godo med ofullgångna räknesystem blott för att de äro praktiska. Vidare duger det icke att göra sig urarva av den på CGS-systemet grundade litteratur som nu finns, utan anknytningen till dess enheter skall vara enkel och logisk.

11. Ett enhetligt elektriskt enhetssystem.

Endast måttsystem, som innehålla de av gemene man kända amp, volt, ohm osv. i sin historiskt givna storlek, äro tänkbara som efterträdare till CGS-systemet.

En nackdel med de redan antydda system eller delar av system, som uppbyggts på detta sätt — den mest betydande läromästaren i de teoretiska frågorna har varit professor Mie (Handbuch der Experimentalphysik XI: 1) — är, att de ej äro väl mekaniskt anknutna. Om man fastlägger storleken av amp och ohm enligt 1908 års definition, så äro alla elektriska och magnetiska storheter därmed fixerade (jfr s. 15). Men de i elektriska fenomen uppträdande energierna och effekterna komma då att mätas i därur härleda enheter: energienheten blir joule = volt · amp · sek, och som kraftenhet följer en i andra sammanhang okänd, f. ö. olämpligt stor enhet, joule/cm. Inget stämmer överens vare sig med teknikernas kilogrammeter resp. kgf eller CGS-systemets erg och dyn. Reduktionstalen mellan de sistnämnda och de elektriska var $1{,}00020 \cdot 10^7$ (s. 26) och kommer efter den nya konventionen att bli exakt 10^7. Men huvudparten av ellärans formler, dvs. de som ha någon mekanisk innebörd, komma att belastas med dylika reduktionstal för överförandet av måtten i mekaniska enheter. Systemet är i detta avseende ej homologt!

Redan år 1901 framställde italienaren Giorgi ett förslag till lösning av frågan, som numera, låt vara modifierat och teoretiskt stärkt genom nya överväganden, efter allt att döma kommer att gå segrande fram. Detta system kommer enligt min mening fullt till sin rätt, om man dels bygger på den nya konventionen, alltså underförstår enheterna vara absoluta, dels med Giorgi men i motsats till en del uttolkare samtidigt genomför »rationalisering» av formlerna genom att låta förhållandet mellan sfärens yta och radiekvadrat, 4π, ingå i logiska sammanhang, nämligen i sfäriska fält, men ej som i CGS-systemen i homogena fält (jfr plattkondensatorn s. 30). I den fragmentariska presentation, som här kan ges, tillåter jag mig alltså göra dessa förutsättningar.

Den mekaniska grunden. Eftersom — och det måste kraftigt understrykas — vår kännedom om de elektriska fenomenen helt och hållet grundar sig på mätningar av vissa mekaniska yttringar av den, djupast sett därför att vi sakna specifikt elektriska sinnesorgan, så måste obetingat ett elektriskt enhetssystem vara mekaniskt grundat. Däri låg CGS-systemens suveränitet, så länge de voro aktuella.

Endast *en* elektrisk enhet bör i första hand definieras, lämpligen den för laddning eller strömstyrka. Då den senare är den förras tidsderivata, är valet mellan dem skäligen likgiltigt. Är så strömstyrkans enhet ampere definierad, varvid strömmens mekaniska yttringar skola användas (se avd. 13 nedan), så sammanknyter redan studiet av det elektriska fältet spänningsenheten med strömstyrkeenheten genom *energienheten*. Sambandet är Joules lag, om man så vill. Energin utgör ju det som binder hela fysikens fenomenvärld tillsammans, och detta bör utnyttjas genom samma enheter. Ellärans energienhet är joule, men den passar som nämnts icke direkt med något av de mekaniska enhetssystemen. Vad är då att göra?

Ett system som liknar CGS-systemen är ofrånkomligt på grund av de elektriska enheternas ursprungliga och nu restaurerade definition. Deras fel är, att energienheten erg är för liten. Giorgi är radikal nog att föreslå ett homologt mekaniskt system, vars energienhet just är 1 joule. Detta måste gå för sig genom att välja en eller flera av grundenheterna annorlunda, eftersom energins dimension är $[W] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$. För att erhålla W uttryckt i enheten 1 joule $= 10^7$ erg antaga vi, att man skall välja massenheten 10^x g, längdenheten 10^y cm och tidsenheten oförändrad 1 sek, vilket ger den diofantiska ekvationen

$$10^7 = 10^x \cdot 10^{2y} \cdot 1;$$

$$7 = x + 2y$$

Den ur vår synpunkt enklaste lösningen är $x = 3$, $y = 2$, dvs. massenheten 1000 g = 1 kg och längdenheten 100 cm = 1 m eller just metersystemets prototypenheter. Turen är oss bevågen: ett MKS-system i stället för och bildat fullt analogt med CGS-systemet är tydligen homologt med det praktiska elektriska systemet tack vare att energienheten är densamma.

Detta system måste väl skiljas från såväl teknikernas system, där kilogrammet är kraftenhet, som det bl. a. i Moll-Rudbergs lärobok använda system, där kg är massenhet och kgf kraftenhet men kraftekvationen därför ej homologiserad. För min del skulle jag vilja kalla detta mekaniska-elektriska system för MKSA-systemet för att markera den likaberättigade närvaron av den fjärde, elektriska grundstorheten men skall som oftast i litteraturen och för att undvika förväxling kalla det giorgisystemet.

Vad som väl gjort mången i förstone betänksam inför förslaget, är att man härmed också får en ny kraftenhet, nämligen av storleken 10^5 dyn. Den kommer att bli lika viktig som CGS-systemets dyn, och den skall ha ett särskilt namn, nämligen *newton*. Namnet är antaget, ehuru ej enhälligt, på den IEC-kongress år 1938 som senare skall omtalas. Tyskarna kalla i regel enheten för Grossdyn (tekn. Normblätter; Pohl), och prof. Giorgi är heller ej särskilt nöjd med benämningen, enligt vad han brevledes omtalat. Den har dock vunnit allmän spridning under senaste året och torde bli definitiv; vi tillåta oss förkorta benämningen till ntn. För klarhetens skull en liten jämförande tabell:

	CGS-syst.	Giorgisyst. (MKSA-syst.)
Grundenheter:		
Massa	1 g	1 kg
Längd	1 cm	1 m
Tid	1 sek	1 sek
Härledda enheter:		
Kraft	$1\ \text{g} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 1\ \text{dyn}$	$1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sek}^2} = 1\ \text{ntn}$
Energi	1 dyn · cm = 1 erg	1 ntn · m = 1 joule
Effekt	1 erg/sek	1 joule/sek = 1 watt
. . .		
Täthet	$1\ \text{g/cm}^3$	$1\ \text{kg/m}^3$
. . .		
Tryck	$1\ \text{dyn/cm}^2$	$1\ \text{ntn/m}^2$
. . .		

Definitionen av den nya kraftenheten kan tydligen utsägas: 1 ntn är den kraft, som åt massan 1 kg ger accelerationen 1 m/sek². Den är lika med tyngdkraften på 1/9,81 kg, dvs. på 102 gram. Enheterna joule och watt äro rent mekaniska enheter och skola användas som sådana, då giorgisystemet väljes för mekaniska problem. Att förvandla mellan mekaniska CGS- och giorgienheter är alltid mycket enkel tiopotensräkning,[1] t. ex. $1 \text{ joule} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sek}^2} = 1000 \text{ g} \cdot \frac{(100 \text{ cm})^2}{\text{sek}^2} = 10^7 \text{ g} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}^2} = 10^7 \text{ erg}$. En del härledda storheter få ändrade mätetal; en smula tråkiga äro särskilt de anförda nya enheterna för täthet och tryck. Vattnets täthet blir tydligen i det nya systemet 1000 kg/m³, och den meteorologiska enheten bar kan förvandlas till 10^5 ntn/m².

Giorgisystemet inom elläran komme till sin fulla rätt först om och då det komme att råda även inom mekaniken, alltså utklassa såväl CGS-systemet som de system, i vilka teknikerna pläga räkna. De mest entusiastiska förespråkarna för det äro ganska optimistiska härvidlag.

Kan teknikern i gemen fostras till att konsekvent använda systemet? Från teknisk sida har det ofta anförts som ett visst försvar för att avvisa en sammanjämkning av det tekniska måttsystemet med det fysikaliska, att CGS-systemets enheter äro alldeles för små i praktiken, ett argument, som obestridligen är riktigt. Ingen vettig människa kan, har man sagt, komma på den idén att mäta ett lokomotivs dragkraft i dyn. Med giorgisystemet är förhållandet ett annat, i det att dess enheter ha samma storleksordning som de tekniska: förhållandet kgf/ntn är ju exakt detsamma som (tekn. massenheten utan namn) /kg.

Vore orsaken endast denna, så skulle prognosen vara mycket gynnsam. Då kunde man när som helst introducera teknikern i giorgisystemet med dess lagom stora enheter redan i mekaniken, visa hur enkel elläran blir, och så ha bragt den besvärliga frågan om val mellan mekaniska enhetssystem[1] till en utomordentlig lösning. Emellertid torde det anförda skälet ej vara avgörande för teknikern. För honom är helt enkelt kraften viktigare än massan, varför han vill ha just den anknuten till de materiella viktsatserna och det av alla kända kilogrammet. Jag skulle gissa, att i alla de problem, som möta ångteknikern, brobyggaren eller verkstadskonstruktören, han tio gånger så ofta har att göra med en kraft som med en massa. Han skulle säkert ha mycket svårt att uppskatta finessen i att en bil som väger, dvs. har massan, 2000 kg, belastar en bro med sin tyngd av 19600 ntn. — Med hänsyn till fortsättningen av denna uppsats skulle det vara mycket angenämt, om denna farhåga vore för pessimistisk. Den förefaller endast alltför sannolik, och enbart förhoppningen om ett gemensamt måttsystem synes därför icke i synnerlig grad stödja avgörandet till förmån för giorgisystemet.

---

[1] Jag hoppas på läsarens gehör för sortreduktioner på detta algebraiska sätt. En formel i ett homologt enhetssystem uppfattas som en »storhetsekvation», och man har rätt att behandla enheterna rent algebraiskt. Fördelarna härav äro så påtagliga, att principen synes mig förtjänt av mycket mera konsekvent användning i undervisningen än den har. Varje resultat kontrolleras till enheten rent automatiskt, för att ej tala om vilken säkerhet och vilken ekonomi med tänkandet det innebär att slippa den mången gång vanskliga tankeakten att i hast avgöra mellan multiplikation eller division med reduktionsfaktorn! — I Elementa *1*, s. 133, återfinnes en alltjämt läsvärd artikel av Meyer om dimensionsläran vid elementarundervisningen.

Vad CGS-systemet gäller, har det inom mekaniken endast använts av den vetenskapliga fysiken, och såvitt jag kan döma, kan en akademiker suveränt och bekvämt gå över mellan CGS- och giorgisystemet.

Situationen påminner skrämmande nog om det bekanta medeltida påvevalet, när en ny skulle väljas för att avsätta två stridande — och man fick tre! Men detta tillstånd är endast möjligt en tid. Giorgienheterna ha de största chanser att utklassa CGS-systemen, om de lyckas med det på deras klassiska domän elektricitetsläran.

Elektricitetslärans principiella uppbyggnad. Den internationella elektrotekniska kommissionen (IEC), samma organisation som införde det internationella enhetssystemet år 1908, beslöt vid ett sammanträde sommaren 1938 enhälligt att sanktionera och kraftigt rekommendera giorgisystemet. Denna sammanslutnings livaktighet och auktoritet gör det sannolikt, att systemet inom några få år skall ha slagit igenom i den elektrotekniska litteraturen. Lagt till allt det som förut anförts ger detta beslut enligt författarens mening en så kraftig övervikt till förmån för det nya systemet, att det *måste accepteras* av alla som syssla med elektricitetslära. När och hur — det är frågor att prövas av pedagogers och vetenskapliga författares omdöme. Enligt den gamla regeln att hellre förekomma än förekommas — i detta fall av att tilläventyrs ur någon synpunkt mindre lämpliga begrepp skulle fastlåsas — är det allt skäl för fysiker med olika verksamhetsområden att just nu aktivt intressera sig för det nya systemet.

---

[1] Se t. ex. diskussionen i Elementa *17*, s. 13; *18*, s. 33, 34.

Storhet; betydelse		Enhet
Laddning Q		amp · sek = coul
Strömstyrka I	pr tidsenhet transporterad laddning	amp
Spänning V	ss. potentialdiff.: energi/laddning (relation mellan grundenheterna alltså 1 volt · amp · sek = 1 joule)	volt
El. fältstyrka E	kraft/laddn., i hom. fält beräkningsbar ur spänning och avstånd utefter fältriktn.	volt/m
El. förskjutningstäthet D (el. flödestäthet)	num. lika med yttätheten av laddn. på plattkondensatorns beläggn., alltid mätbar med en införd dubbelplatta (jfr Pohl) Beloppet = fältlinjetätheten	amp · sek/m²
Diel.-konst. ε	förh. mellan fältvektorerna D och E	$\frac{\text{amp} \cdot \text{sek}}{\text{volt} \cdot \text{m}}$
Relativ d:o ε_r	d. hos dielektrikum/d. hos vakuum	rent tal
Energi/volymsenhet i el. fält	enkla formen $^1/_2\, D \cdot E = {}^1/_2\, \varepsilon \cdot E^2$	joule/m³
Kapacitet C	förh. mellan kondensators laddning och spänning	$\frac{\text{amp} \cdot \text{sek}}{\text{volt}} = \text{farad}$
Motstånd R	förh. mellan spänning och strömstyrka	$\frac{\text{volt}}{\text{amp}} = \text{ohm}$
Magnetisk flödestäthet B	den viktiga, mätbara magn. fältvektorn, se texten! Beloppet = fältlinjetätheten	$\frac{\text{volt} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$
Magnetiskt flöde Φ	B gånger den däremot vinkelräta ytan, repr. av antal fältlinjer genomskärande ytan	volt · sek
Magnetiskt moment M_m	ur mek. momentet; definieras för strömslinga men överföres analogivis till substantiell magnet	amp (varv) · m²
Magnetisering J	hos subst. magnet: magn. moment/volym	amp (varv)/m
Polstyrka p	hos stavmagnet: magn. moment/polavstånd. Kraften på magnetpol $f = B \cdot p$	amp (varv) · m
Magnetiserande vektor H	beskriver magnetfälts anläggning med el. strömmar, se texten! Bör endast betraktas som räknestorhet; karaktären av fältstyrka tillkommer B	$\frac{\text{amp (varv)}}{\text{m}}$
Linjeintegralen av H runt sluten fältlinje	olämpl. benämnd »magnetomotorisk kraft»: blir lika med summan av omslutna strömmars styrka	amp (varv)
Permeabilitet μ	förh. mellan fältvektorerna B och H	$\frac{\text{volt} \cdot \text{sek}}{\text{amp} \cdot \text{m}}$
Relativ d:o μ_r	p. hos magnetikum/p. hos vakuum	rent tal
Energi/volymsenhet i magn. fält	enkla formen $^1/_2\, B \cdot H = {}^1/_2\, \mu \cdot H^2$	joule/m³
Induktionskoefficient L	ur $\mathcal{E} = L \cdot \frac{dI}{dt}$	$\frac{\text{volt} \cdot \text{sek}}{\text{amp}} = \text{henry}$

Det är ej möjligt att i en artikel som denna redogöra för detaljerna i en på antytt sätt uppbyggd elektricitetslära, helst som både planen och detaljerna givetvis kunna diskuteras och även utföras på olika, måhända lika goda sätt. Tryckta framställningar finns det ej många. Tekn. d:r John Wennerberg, själv inflytelserik ledamot av IEC, har sedan åtskilliga år arbetat för systemet och på dess formella byggnad. Kungl. Tekniska högskolans lärare hålla på att inarbeta systemet, vid Norges tekniske høgskole äro kurserna att döma av examensuppgifter därifrån upplagda efter det, och i fysikundervisningen vid Chalmers tekniska högskola har förf. i år lagt elektricitetsläran på denna bog.

För att ge den intresserade en uppfattning om enheternas samband — och i vilken ordning de förslagsvis kunna införas — återges de viktigaste i en tabell. Som synes, äro de alla härledda ur amp, volt och mekanikens enheter. Till de fragmentariska antydningarna må anmärkas, att formlerna äro helt och hållet homologa. De innehålla alltså inga reduktionstal inmängda utan endast sådana enkla tal (heltal och π) som följa av härledningarna. Även vid de mest komplicerade beräkningar får alltid resultatet sin riktiga enhet fullt automatiskt.

12. Några konsekvenser av ett systemskifte.

Ny lärogång. Låt oss med intresse även för skolkursen kasta en blick på vad saken gäller! Innan elläran påbörjas i en pedagogisk framställning, skall den mekaniska delen av giorgisystemet vara presenterad. Eleven får den regeln att konsekvent räkna tider i sek, längder i m, massor i kg — men också krafter i ntn samt energier i joule och effekter i watt! På ett stadium, där kraftekvationen behandlats, kan systemet presenteras strängt; så som vår skolkurs nu är disponerad, bör man tydligen definiera 1 ntn $= \frac{1}{9{,}81}$ kgf (som nu för dyn), och får därur 1 joule $=$ 1 ntn · m $= \frac{1}{9{,}81}$ kilogrammeter och 1 watt $=$ 1 joule/sek $= \frac{1}{9{,}81}$ kilogrammeter/sek $= \frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{1}{75}$ hästkraft. Inom hela elektricitetsläran har man sedan inget besvär med några ytterligare reduktioner; man torde jämföra mängden av motsvarande angivelser i gängse läroböcker.

Då man för första gången väl arbetat sig igenom det nya systemet, sökt de lämpliga definitionerna för storheterna och prövat systemet genom tillämpningar, blir man efter slutad möda förvånad, huru enkelt det hela blir i jämförelse med CGS-systemen.

I själva verket ha alla de olägenheter vi härovan konstaterat försvunnit. Engångsbesväret att lägga om våra egna tankebanor bör ej avskräcka oss att utnyttja de stora fördelarna i fortsättningen.

Den plan som den anförda tabellen hänför sig till, är närmast en elementär universitetskurs. För nybörjarkurser förefaller det ligga mycket väl till att som Bergholm[1] från början anknyta till *strömmens* egenskaper. Vill man på det mera klassiska sättet börja med studiet av det elektriska *fältet,* skall man ej lägga Coulombs lag till grund utan i stället utgå från plattkondensatorns homogena fält. Mången lärare torde instämma i att detta innebär en vinst, icke minst ur demonstrationssynpunkt. Elektrostatiken i sin helhet kommer i sitt rätta sammanhang med den elektriska strömmen, och all mystik vid sammanfogningen av de båda avsnitten bortfaller. Elektriciteten i alla sina yttringar mätes i samma enheter, och skillnaden i storleksordning mellan olika fenomen blir påtaglig.

Det mest revolutionerande avsnittet är behandlingen av magnetismen. Den blir ett kapitel under elläran, och man kan börja genom att studera strömmars primära magnetiska egenskap, deras kraft- och vridverkan relativt varandra. Hela vägen kan man parallellt behandla solenoider och substantiella magneter. Även här blir det homogena fältet det enkla utgångsfallet, och den viktigaste magnetiska fältstorheten, B, kan först definieras ur en ledares kraftpåverkan i magnetfält. Vägen ligger sedan rak och öppen till induktionsfenomenen; det faller sig naturligt att som centralt fenomen behandla den verkliga orsaken till inducerade emk, nämligen laddningsbärarnas, elektronernas förskjutning. Fältlinjerna och det magnetiska flödet användes som åskådliga hjälpmedel. Som angivits i tabellen, mäter B alla fältets verkningar. Den är en intensitetsstorhet och borde kallas fältstyrka, men för att undvika såväl detta ord, som tidigare förbundits med ett annat begrepp, som det i vårt sammanhang intetsägande magnetisk induktion, torde man lämpligen böra namnge den med den påtagliga termen *flödestäthet,* vilket direkt överensstämmer med tekniskt språkbruk.

Strömslingors *och magnetstavars* magnetiska moment utkristalliserar ur de numera studerade mekaniska momenten. Vi lägga märke till den atomfysikaliskt klara enheten amp · m^2, summan av de atomära momentens, »molekylarströmmarnas», strömstyrka gånger yta. Magnetiseringen mäter denna magnetiska verkan pr volymsenhet. Om man anser sig behöva begreppet magnetpol, så bildas den som kvoten mellan magnetiskt moment och polavstånd.

---

[1] C. Bergholm, Lärobok i fysik III. J. A. Lindblad, Uppsala 1938.

Magnetismens rätta art och polstyrkans karaktär av enbart räknestorhet framgår klart av denna lärogång. Om Coulombs lag för magnetpoler skall behöva anföras, så härledes den som ett korollarium av redan studerade lagbundenheter hos det magnetiska fältet.

En särskild diskussion vore på sin plats rörande denna fråga, om och i så fall huru den fria magnetpolen skall behållas i undervisningen. Dipolen och dess fält kommer under alla förhållanden att vara det centrala i magnetostatiken. Men det skall ej bestridas, att den fria magnetpolen som pedagogiskt hjälpmedel, t. ex. som kraftangreppspunkt, har medfört stor åskådlighet. Man må exempelvis tänka på formuleringen av Maxwells första sats: ... det arbete, som utövas på en magnetisk enhetspol, då den föres ... I den nya lärogången kan man ej låta polen framstå som något grundläggande, men det möter inga hinder att ha den kvar på så sätt som antytts. Dock torde man redan i och med denna värdering outsagt ha ställt den på avskrivning.

Den andra av de magnetiska fältvektorerna — ty likaväl som för det elektriska fältets D och E skilja vi här på B och H — gör reda för fältets samband med sin orsak, strömmarna. Med Laplaces (Biot-Savarts) lag beräkna vi alltså ur strömmarna denna vektor H, som lämpligen kunde kallas den *magnetiserande vektorn*. För det homogena fältet inom en lång solenoid eller en toroid erhålla vi direkt värdet strömstyrka gånger varvtal pr längdenhet, och enheten amp·varv/m har en påtaglig tydning. Denna behandling är mycket lämplig för beräkning av »magnetiska kretsar» och överhuvud för studiet av magnetiseringsfenomen.

I elementarundervisningen kan man mycket väl undvika de *tvenne* vektorerna för vardera fältet och endast tala om en elektrisk och en magnetisk fältstyrka. Efter vissa överväganden torde man nå till en mycket enkel och klar sammanfattning även av magnetismen. De sedan länge odlade, numera på studentskrivningarna alltmera sparsamt förekommande problemen om magnetstavar och devierade magnetnålar, komma att få lämna allt större rum för enkla beräkningar av elektromagnetiska fall. Den något större svårighet, som med det nya systemet de förstnämnda problemen bjuda, kompenseras av lättheten att finna goda problem på elektromagnetismen. Varken fysikern eller teknikern torde beklaga den utvecklingen.

Ett par invändningar. Efter dessa omkastningar frågar man med oro efter anknytningen till CGS-systemens enheter, främst magnetismens viktigaste enhet gauss för flödestätheten. Den är dessbättre mycket enkel. Vår nya enhet, volt·sek/m², är, som man omedelbart inser ur den klara tydningen som spänningsstöt vid induktionsförsök, ganska stor, och man har

$$1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ volt} \cdot \text{sek/m}^2.$$

Antagligen kommer den väl inarbetade storheten gauss att fortleva, även på grund av den för svaga fält lämpliga storleken. Den isolerat uppträdande reduktionsfaktorn 10000 mellan gauss och den nya enheten, vars storleksordning överensstämmer med mättningsvärdena för järn och blir lämplig för de starka, i teknisk praxis förekommande fälten, vållar inga större svårigheter. — Kontinuiteten med den klassiska magnetostatiken kan tillgodoses genom att nämna reduktionstalet mellan polstyrkor: 1 e. m. e. för polstyrka $=$ $= 1/10$ amp(varv) · m, varur det övriga följer.

En men endast en materialkonstant blir definierad på så sätt att siffervärdena bli förändrade; det gäller den i tabellen ej upptagna magnetiska susceptibiliteten. För dielektricitetskonstanten och permeabiliteten inför och använder man nämligen i det nya systemet relativvärden i förhållande till vakuumvärdena, som äro naturkonstanter, och dessa angivelser äro ju fullt identiska med CGS-systemets. Susceptibiliteten ($\varkappa$) ansättes i det nya systemet på naturligt sätt som $\varkappa = \mu_r - 1$ men i CGS-systemet som $\varkappa = (\mu - 1) : 4\pi$. Nu bestående tabellers värden måste alltså multipliceras med 4π, och varning för förväxling utfärdas!

Ytterligare invändningar kunna drabba systemet från atomfysikernas håll. Man måste erkänna, att det elektrostatiska systemet upplevde en renässans i och med atomfysiken, främst i behandlingen av den Bohrska vätemodellen och allt vad därav följde. Efter en genomräkning torde man dock inse, att den större klarheten, även från atomfysikalisk synpunkt sett, mer än väl uppväger besväret att komponera om formlerna. Någon tvetydighet kan ej uppkomma, då enheter angivas vid förekommande talvärden. Om Bohrmagnetonens värde i det gamla systemet skrivits som $9{,}25 \cdot 10^{-21}$ erg/gauss (eller kanske $\text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}\text{sek}^{-1}$), så blir den nya angivelsen $9{,}25 \cdot 10^{-24}$ amp · m². Sommerfeld må nämnas bland de forskare som med nöje accepterat systemet. Den nu rådande tingens ordning är för övrigt ej fri från kritik. Man svävar alltför ofta i okunnighet om vilket av de åtminstone fyra varianter av CGS-system, som en teoretiker valt för sina beräkningar, och flera än undertecknad ha säkert ibland stått i förlägenhet, då det gällt att numeriskt utnyttja en teoretisk utredning.

13. Definition av strömstyrkeenheten.

Med de angivna förutsättningarna bygger enhetssystemet helt och hållet på den nya strömstyrkeenheten. Om man vid dess definition på grund av anförda orsaker helt vill avstå från begreppet magnetpol och vidare av pedagogiska skäl ej vill anknyta den till moment av slutna strömslingor, så kan man använda följande:

> »En ström har styrkan 1 ampere, om attraktions- eller repulsionskraften mellan två därav genomflutna raka, parallella och mycket långa, i vakuum uppspända ledare utgör $2 \cdot 10^{-7}$ newton pr meter av deras längd.»

Det torde vara lämpligt att i det sammanhanget omnämna strömvågen som det precisionsinstrument, som kommer till användning för att ytterst fixera enheten. Ur den nya lärobyggnadens synpunkt innebär den nya konventionen, att vakuumpermeabiliteten fixerats till $4\pi \cdot 10^{-7}$ volt · sek/amp · m, ett förhållande, som inbjuder även till andra alternativ för konkret definition av strömstyrkeenheten.

I sakens natur ligger, att i en genomförd lärogång en sådan definition kan anföras först när hela elektromagnetismen genomgåtts, då den utan någon svårighet hämtas ur där anförda lagar. Tidigare i framställningen har man ingen annan möjlighet än att föregripa den. Vid genomgång av elementarladdningen och elektrolysens lagar har man ju mången anledning att påpeka möjligheten av att definiera en laddnings- eller strömstyrkeenhet.

Vad vi nämnt om kinkig mätteknik i samband med enhetsdefinitionerna frestar oss möjligen att även i en pedagogisk framställning krypa bakom auktoriteterna. De flesta av dem vi undervisa känna sig säkerligen tillfredsställda av upplysningen, att normaler för motstånd och emk handhavas av internationella byrån, och att det är denna organisation ålagt att avstämma deras värden till naturmåttet för strömstyrkan.

Räta linjen utan normalformen.

Av **FOLKE RYDE.**

1. De rationaliseringsåtgärder, som kunna företagas inom skolans matematikkurs, äro icke många och äro i stort sett begränsade till geometrikursen. Inom den syntetiska geometrien har man den utvägen att flytta utgångspunkten för den egentliga, deduktiva geometrien längre fram. En möjlig rationaliseringsåtgärd inom den analytiska geometrien är att utesluta den räta linjens ekvation i normalform eller att åtminstone låta den träda mera i bakgrunden. Trigonometrien genomgås numera å realgymnasiet ganska sent, varför den grund, varpå normalekvationen vilar, i regel ej är genomarbetad, då normalekvationen bäst skulle behövas för beräkning av avstånd och ytor. Man kan emellertid utföra avståndsberäkningar i analytiska geometrien mera direkt och åtminstone ifråga om teckenbestämningen enklare utan normalformen.[1]

A. Om en linje är parallell med y-axeln, erhålles avståndet från en punkt till linjen direkt medelst koordinatdefinitionen.

B. I varje annat fall kan linjens ekvation skrivas under formen $y = kx + l$. Man kan då börja med följande sats:

Avståndet mellan de båda parallella linjerna $y = kx + l_1$ *och* $y = kx + l_2$ *är*

$$\frac{l_1 - l_2}{\sqrt{k^2 + 1}}, \tag{1}$$

om linjen $y = kx + l_1$ *ligger ovanför linjen* $y = kx + l_2$.

Om $k = 0$, inses omedelbart, att satsen gäller.

Den genom origo gående normalen till linjerna har, om $k \neq 0$, ekvationen $y = -\frac{x}{k}$. Den antages råka de givna linjerna (fig. 1) i punkterna $(x_1;\ y_1)$ resp. $(x_2;\ y_2)$. Man erhåller omedelbart

$$x_1 = -\frac{l_1 k}{k^2 + 1};\quad y_1 = \frac{l_1}{k^2 + 1}\quad \text{resp.}\quad x_2 = -\frac{l_2 k}{k^2 + 1};\quad y_2 = \frac{l_2}{k^2 + 1}.$$

---

[1] Trots normalekvationens generella natur — en sak, som ofta framhålles — slå de brukliga teckenreglerna slint, då linjen sammanfaller med y-axeln.

Härav erhålles det sökta avståndet

$$d=\sqrt{\left(\frac{(l_1-l_2)k}{k^2+1}\right)^2+\left(\frac{l_1-l_2}{k^2+1}\right)^2}=\frac{l_1-l_2}{\sqrt{k^2+1}},$$

ty $l_1 > l_2$, om linjen $y=kx+l_1$ ligger ovanför linjen $y=kx+l_2$.

Därefter kan man bevisa följande sats[1]:

Avståndet från punkten $(x_1;\ y_1)$ *till linjen* $y=kx+l$ *är*

$$\frac{y_1}{\sqrt{k^2+1}}-\frac{kx_1+l}{\sqrt{k^2+1}}, \tag{2}$$

om punkten ligger ovanför linjen. Ligger punkten under linjen, är avståndet

$$-\left(\frac{y_1}{\sqrt{k^2+1}}-\frac{kx_1+l}{\sqrt{k^2+1}}\right). \tag{2'}$$

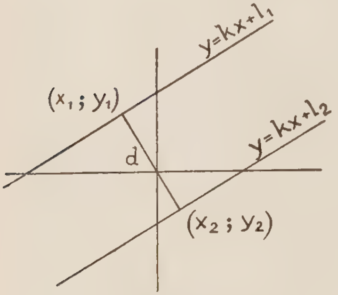


Fig. 1.

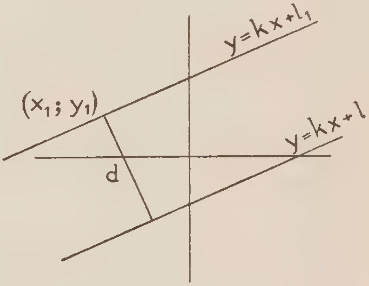


Fig. 2.

Genom punkten (fig. 2) drages en rät linje, parallell med linjen $y=kx+l$. Denna linjes ekvation antages vara $y=kx+l_1$. Enligt (1) är då det sökta avståndet

$$d=\frac{l_1-l}{\sqrt{k^2+1}},$$

om punkten ligger ovanför linjen. Men $y_1=kx_1+l_1$, varav

$$d=\frac{y_1-kx_1-l}{\sqrt{k^2+1}}.$$

På motsvarande sätt bevisas den andra delen av satsen.

2. Beräkningen av ytan av en utåt konvex månghörning (inkl. triangel), då hörnpunkternas koordinater äro givna, kan utföras på följande sätt: Man betraktar den minsta rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna, för vilken gäller, att samtliga månghörningens hörnpunkter ligga inuti rektangeln eller på rekt-

---

[1] Jfr C. E. Sjöstedt, Elementa, *17*, 220, 1934.

angelns omkrets. Den sökta ytan erhålles, om man från rektangelytan borttager ett visst antal ytstycken (rätvinkliga trianglar, parallelltrapets), vilkas ytinnehåll lätt beräknas. Önskar man emellertid härleda analytiska geometriens formel för triangelytan utan att därvid tvingas dela upp undersökningen i många speciella fall, kan detta göras på följande sätt:

Triangelns hörnpunkter A_1, A_2, A_3 numreras så, att punkterna A_1, A_2 och A_3 följa på varandra motsols (fig. 3). Vidare antages, att sidan A_2A_3 ej är parallell med y-axeln. Om då $x_3 > x_2$, måste A_1 ligga ovanför linjen genom A_2 och A_3. Om däremot $x_3 < x_2$, måste A_1 ligga under linjen genom A_2 och A_3. Ekvationen för linjen genom A_2 och A_3 är

$$y - y_2 = k(x - x_2), \text{ där } k = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

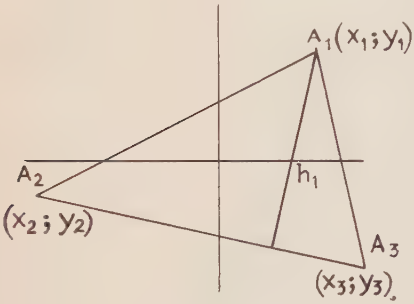


Fig. 3.

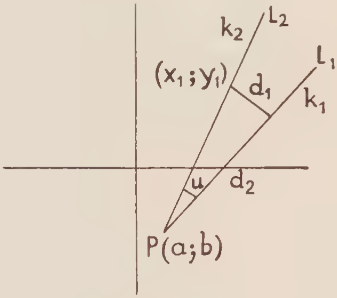


Fig. 4.

Höjden h_1 är då enl. (2) resp. (2′)

$$\frac{y_1 - y_2 - k(x_1 - x_2)}{\sqrt{k^2+1}} \quad \text{resp.} \quad -\frac{y_1 - y_2 - k(x_1 - x_2)}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Basen A_2A_3 är

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2(k^2+1)} =$$
$$= (x_3 - x_2)\sqrt{k^2+1} \quad \text{resp.} \quad (x_2 - x_3)\sqrt{k^2+1}.$$

Såväl för $x_3 > x_2$ som för $x_3 < x_2$ har man då, att triangelytan är

$$T = \frac{1}{2}\Big[(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_3 - x_2)k(x_1 - x_2)\Big]$$

d. v. s.

$$T = \frac{1}{2}\Big[(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_2)\Big],$$

varav

$$T = \frac{1}{2}\Big[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\Big].$$

Efteråt kan man övertyga sig om att formeln gäller, även om A_1A_2 är parallell med y-axeln.

5. Formeln $\operatorname{tg} u = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ för vinkeln u mellan två räta linjer L_1 och L_2 med vinkelkoefficienterna k_1 resp. k_2 härledes som bekant naturligast medelst formeln för $\operatorname{tg}(A - B)$. Vill man emellertid använda formeln innan den trigonometriska formeln härletts, kan man skaffa sig ett provisoriskt bevis för densamma på följande sätt. Linjerna (fig. 4) råkas i punkten P med koordinaterna $(a; b)$. Av samtliga i det följande nämnda linjer betraktas endast de delar, som löpa uppåt från P räknat. Om då L_2 har större riktningsvinkel än L_1, gäller formeln $\operatorname{tg} u = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, varvid u betyder vinkeln mellan L_1 och L_2.

A. Bägge riktningsvinklarna äro spetsiga.
Låt $(x_1; y_1)$ vara en godtycklig punkt på L_2. Då är enl. (2)

$$d_1 = \frac{y_1 - b - k_1(x_1 - a)}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = (x_1 - a)\frac{k_2 - k_1}{\sqrt{k_1^2 + 1}}$$

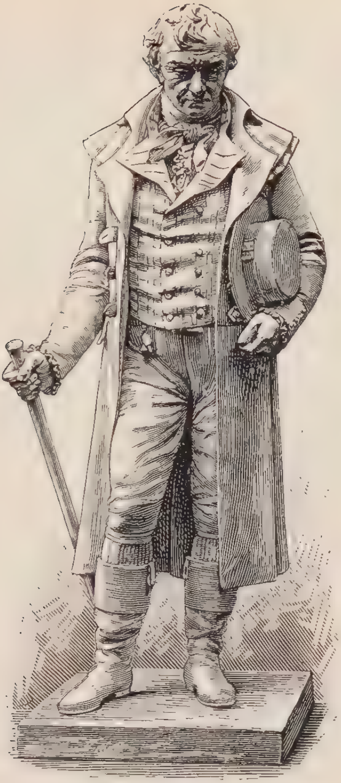
samt

$$d_2 = \frac{y_1 - b + \frac{1}{k_1}(x_1 - a)}{\sqrt{\frac{1}{k_1^2} + 1}} = (x_1 - a)\frac{1 + k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + 1}}, \quad \text{ty } k_1 > 0.$$

Då är

$$\operatorname{tg} u = \frac{d_1}{d_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

B. Övriga förekommande fall återföras till A. Om bägge riktningsvinklarna äro trubbiga, betraktas vinkeln v mellan linjernas normaler. Vinkeln u mellan L_1 och L_2 är då $= v$. Om riktningsvinkeln för L_1 är spetsig, medan riktningsvinkeln för L_2 är trubbig, betraktas först vinkeln w mellan L_1 och normalen till L_2. Vinkeln u mellan L_1 och L_2 är då antingen $90° - w$ eller $90° + w$. I samtliga fall erhålles den sökta formeln efter enkla räkningar. (Fallet $w = 0$, d. v. s. $u = 90°$, behandlas direkt.)



Nicolas Leblanc 1742—1806.
Staty rest 1886 vid Conservatoire national des arts et métiers i Paris.

Ur sodans historia.

1. NICOLAS LEBLANC.

Av **JOHN LUNDBERG.**

Soda är ett av de mycket få salter, vilka varit kända och använda så länge, att man ej kan ange någon tidpunkt för deras upptäckt. Detta torde förnämligast bero på, att saltet förekommer färdigbildat i naturen inom ett av jordens äldsta kulturområden, nämligen i Egypten. Något mer än tre mil väster om Nilens västligaste deltaarm ligga i en sänka i öknen tio små sjöar, de s. k.

Natronsjöarna. Ur dessas starkt salthaltiga vatten utkristalliserar natriumkarbonat, övervägande med sammansättningen Na_2CO_3, $NaHCO_3$, $2H_2O$. Egyptens invånare måste ju snart ha upptäckt sodans förmåga att lösa feta ämnen och börjat använda den som rengöringsmedel. Men de visste också redan mycket tidigt att utnyttja sodan för glasframställning. Det är möjligt, att de även kände konsten att tillverka tvål, men detta är likväl ovisst. Denna användning av sodan uppstod sannolikt först bland kelterna, från vilka den sedan kom till romarna. I varje fall förekom tvålframställning redan under forntiden.

Naturprodukten soda blev alltså mycket tidigt använd dels direkt som tvättmedel, dels som utgångsmaterial för framställning av ett par andra högt uppskattade ämnen. Såväl dessa som sodan själv voro visserligen att börja med rena lyxvaror men de kommo, efterhand som kulturen steg, att betraktas som mer och mer nödvändiga. Då nu bruket av dessa varor blev allt allmännare och spred sig till allt större områden, växte behovet av soda, och man tvangs härav att söka andra källor för detta ämne än de naturliga förekomsterna i Egypten. På grund av dessa omständigheter satte sodan redan tidigt den mänskliga uppfinningsförmågan på prov och gav i sinom tid upphov till industrier, vilka måste räknas till de största och mest betydelsefulla, som överhuvud förekommit.

Man gjorde att börja med den upptäckten, att soda kan erhållas genom utlakning av askan efter vissa havs- och strandväxter. På likartat sätt erhölls pottaska ur vanlig vedaska. De båda ämnena hade så likartade egenskaper, att man till en början ej gjorde stor skillnad på dem. Efter det arabiska ordet *al kalj,* askan, kommo de bägge att gå under namnet alkali. Men sodan blev den viktigare av de båda. Tillgången på ved var i de tidigare kulturländerna ej så stor, att den tillät en alltför intensiv pottaskatillverkning. Tång uppkastades däremot på en hel del kuststräckor i ständigt nya massor efterhand som de redan förefintliga förbrukades. Soda blev därför billigare än pottaska och dessutom gjorde behovet därav för tvålframställning, att den blev alltmera eftersökt. Så blev under medeltiden och nyare tidens första århundraden framställningen av soda ur askan efter strand- och havsväxter på sina håll en mycket viktig industri. Detta gällde särskilt kusterna av Spanien — speciellt medelhavskusten — där produkten kallades *barilla,* och Frankrikes och Skottlands atlantkuster, där den gick under namnet *kelp.* Man anser, att på 1780-talet enbart i Frankrike 10 à 12 tusen människor levde av kelpframställning, medan samtidigt barilla importerades från Spanien till ett årligt värde av mellan 25 och 30 millioner livres.

Orsaken till den stora sodaförbrukningen i Frankrike vid denna tid låg väl till en del i de stegrade anspråken på komfort och renlighet. Men framför allt berodde den på textilindustriens och särskilt bomullsfabrikationens oerhörda utveckling. Det var i synnerhet kattunet, som vid denna tid var modernt och som, tack vare uppfinningen av mekaniska vävstolar, började framställas i stora mängder och till ett även för menige man överkomligt pris. Men för kattunfabrikationen var det ej tillräckligt med bomull, färger och vävstolar. Ett billigt medel att tvätta bomullen var lika oundgängligt. Och det var främst på denna grund, som sodan blev en nödvändighetsvara av första ordningen.

Enligt den måttstock, vi nu lägga på kemiska produkter, voro både barillan och kelpen fruktansvärt orena. I regel innehöllo de nämligen ej mer än c:a 15 procent natriumkarbonat. Trots detta steg priset på barilla — som var den bättre av de båda produkterna — till ett belopp, som motsvarade 800 kronor pr ton för den bästa kvaliteten, vilken höll 25 procent natriumkarbonat.

Inför det skrämmande perspektivet av ständigt ökade priser och en oavlåtligt stegrad import blev i Frankrike problemet om framställning av soda ur koksalt alltmera brännande. Man visste nämligen vid denna tid, att en dylik framställning var teoretiskt möjlig. Detta hade bevisats av naturforskaren Duhamel — mest bekant som växtfysiolog — vilken 1736 lyckats få fram soda ur koksalt. För detta ändamål hade han först framställt natriumsulfat på det sätt, som Glauber redan c:a hundra år tidigare upptäckt. Därefter hade Duhamel glödgat sulfatet med träkolspulver och behandlat produkten med ättika. Den så erhållna natriumacetatlösningen hade han indunstat till torrhet och därefter upphettat återstoden till glödgning. Slutligen hade han utlakat den kvarblivna produkten med vatten och ur denna lösning erhållit kristaller av ett salt. Å andra sidan hade Duhamel lyckats isolera i det närmaste ren soda ur barilla och funnit, att den så erhållna produkten var identisk med den på nyss angivet sätt ur koksalt framställda. Den av Duhamel sålunda funna metoden att framställa soda ur koksalt bevisade sambandet mellan de båda ämnena men var givetvis mycket för dyrbar för att kunna få industriell användning.

Den förste, som hade någon framgång i sitt sökande efter en metod att i stor skala framställa soda ur koksalt, var en benediktinermunk vid namn Malherbe, som framlade sina resultat år 1778. Malherbe upphettade natriumsulfatet med järn och kol i en flamugn och utlakade reaktionsprodukten med vatten. Ur den sålunda erhållna lösningen kristalliserade det ut soda. Uppslaget ansågs så beaktansvärt, att Malherbe i sinom tid erhöll en belöning av tio tusen francs för detsamma. Fram på 1850-talet upptogs t. o. m. framställning av soda enligt denna metod vid en fabrik i England, där den var i bruk under flera år. Utbytet var emellertid vid detta tillvägagångssätt ej vidare stort, och metoden blev därför ej lönande.

En annan fransk kemist, de la Métherie, framlade år 1785 ett annat förslag, enligt vilket man skulle få fram soda genom att enbart glödga sulfatet med kol. Utbytet blev dock här ännu sämre än vid Malherbes metod. Det var emellertid de la Métheries tankegång, som kom att ligga till grund för den slutliga lösningen av problemet.

Då alla hittills gjorda försök att finna denna lösning icke haft någon framgång, beslöt nu Franska Vetenskapsakademien att driva på arbetet. Den uppställde i detta syfte år 1787 ett pris på 12 000 francs för den, som kunde finna en metod för billig framställning av soda i stor skala ur koksalt.[1]

Bland dem, som genom detta akademiens initiativ bragtes att ge sig i kast med problemet var en läkare vid namn Nicolas Leblanc. Han var född 1742 i Ivoy-le-Pré, en liten stad, några mil söder om Orléans, där fadern var smedmästare. Nicolas fick studera och utbildade sig till kirurg. Sedan han någon tid livnärt sig med privat praktik, hade han år 1780 lyckan att bli anställd som läkare hos hertigen av Orléans. Härmed fick han en säker bärgning utan alltför mycket arbete och kunde sålunda ägna åtskillig tid åt vetenskaplig forskning. Med hänsyn till vad som ovan sagts, var det ganska naturligt, att han snart kom in på problemet om sodaframställning ur koksalt. Leblanc utförde sina arbeten på universitetets laboratorium, vars föreståndare var professor Darcet och där en yngre vetenskapsman, Dizé, var assistent. Leblanc sökte att börja med gå fram efter samma metod som de la Métherie, men resultaten voro ej uppmuntrande. En dag kom han så på idén att vid glödgningen av natriumsulfatet med kol även tillsätta krita. Det visade sig genast, att han med detta tillvägagångssätt erhöll vida mer soda än förut. På en del håll finner man uppgiften, att idén om tillsatsen av krita kommit från Dizé, som roat sig med att försöka denna metod en dag, då Leblanc själv av någon anledning var borta från laboratoriet. Hur härmed förhåller sig, torde väl numera vara omöjligt att få klarhet i. Faktum är dock, att Leblanc och Dizé samarbetade både under de första forskningarna och även i fortsättningen och att det vid metodens senare utnyttjande kom till vissa tvistigheter mellan dem rörande vinstens fördelning. I längden synes likväl Dizé ej ha kunnat göra sina anspråk gällande.

---

[1] Man finner i litteraturen mycket skiljaktiga uppgifter om såväl årtalet som prissumman. Den här återgivna är hämtad ur Scheurer-Kestners föredrag om Leblanc inför La société chimique de Paris, återgivet i Revue Scientifique för mars 1885.

De båda männen fortsatte emellertid med iver sina försök, sedan de funnit en första antydan om metoden. De förbättrade ugnarna samt genomförde försöken i allt större skala. Leblanc kände sig slutligen säker på sin sak. I mars 1790 ingav han för den skull en förseglad beskrivning av sitt tillvägagångssätt till förvaring hos en notarie för att på så sätt säkerställa sin prioritetsrätt till uppfinningen.

Hertigen av Orléans hade med intresse följt sin läkares forskningar. Då Leblanc nu anhöll, att han ville finansiera den nya metoden, lät hertigen först professor Darcet noga undersöka dennas användbarhet. Sedan han av denne auktoritet på kemiens område erhållit ett gynnsamt uttalande om Leblancs tillvägagångssätt, försträckte han det nödiga kapitalet, två millioner francs, för bildande av ett bolag med uppgift att omsätta Leblancs uppfinning i stor skala. I bolaget ingingo utom Leblanc själv Dizé samt en viss Shée, den sistnämnde såsom representant för hertigens intressen. Bolaget bildades i januari 1791.

Verksamheten började med byggandet av en fabrik i Saint-Denis och sedan denna var färdig, sattes sodaframställningen i gång. Vid denna tid hade helt nyligen en fransk patentlag sett dagen och i september 1791 tog Leblanc patent på sin uppfinning. Hans patentbrev var endast det fjortonde i ordningen efter den nya lagens tillkomst.

Det dröjde ej länge, förrän fabriken i Saint-Denis producerade bortåt 300 kg soda pr dag och allt syntes båda en ljus framtid för Leblanc. Men de våldsamma politiska omvälvningar, som just vid denna tid ägde rum i Frankrike, sträckte snart sina verkningar även till den nya sodafabriken. Hertigen av Orléans blev, trots att hans tillgivenhet för revolutionens läror gått ända dithän att han ändrat sitt namn till Philippe Égalité, misstänkt för stämplingar mot den nya regimen och i november 1793 avrättad. Leblancs sodafabrik betraktades såsom tillhörande hertigen och beslagtogs på denna grund av staten.

Emellertid steg behovet av soda ytterligare, detta i synnerhet sedan på grund av republikens ständiga krig importen av pottaska så gott som omöjliggjorts. I februari 1794 utsände Välfärdsutskottet på grund härav en uppmaning, att var och en, som ägde kännedom om någon metod att framställa soda ur koksalt, borde giva utskottet del av denna. Såsom de politiska förhållandena lågo till, var en dylik uppmaning liktydig med en befallning, och Leblanc hade ej annat att göra än att överlämna en fullständig redogörelse för sin metod till Välfärdsutskottet. Nu borde ju detta ha tillsett, att processen blev noga hemlighållen, så att man ej kunde dra nytta av den i utlandet. Detta hade enklast kunnat ske genom att göra Leblanc själv till chef för den av staten beslagtagna fabriken i Saint-Denis och i denna egenskap göra honom till en statens tjänsteman. Utskottet förfor emellertid på rakt motsatt sätt. Det gav den största möjliga spridning åt kunskapen om tillvägagångssättet genom att låta trycka och utgiva en fullständig redogörelse för det i alla dess detaljer.

Leblanc, som förtjänat c:a fyra tusen francs om året på sin fabrik, stod nu utan inkomst för sig och sin familj. Staten hade emellertid funnit honom vara en dugande och för mångahanda uppdrag lämplig medborgare och hans arbete togs därför under de närmaste åren i riklig mån i anspråk för allehanda utredningar och undersökningar. Tyvärr var den ekonomiska vinningen av dessa i regel ingen alls. På grund härav blevo Leblancs affärer allt sämre. År 1799 tillerkände emellertid regeringen honom tre tusen francs som ersättning för att han offentliggjort sin uppfinning. Det är härvid att märka, att Leblanc, ehuru han utan tvivel funnit en synnerligen användbar metod att framställa soda ur koksalt, likväl aldrig erhöll det av Vetenskapsakademien utfästa priset. Detta pris, som hade en så ofantlig betydelse för den kemiska industriens uppkomst, blev överhuvudtaget aldrig utdelat. Med de nyss nämnda tre tusen francsen gick det knappt bättre. Trots upprepade påminnelser hos ministrarna lyckades Leblanc aldrig få ut mer än sex hundra francs av den utlovade summan. År 1801 återinsattes han emellertid genom ett regeringsbeslut i besittningsrätten till sin fabrik. Men nu saknade han fullständigt medel att åter igångsätta driften. Efter en mängd fåfänga försök att anskaffa driftskapital, dels från privatpersoner, dels från staten, erhöll han slutligen 1805 sig tilldömda 52 tusen francs som skadestånd. Men icke nog med att detta belopp var många gånger för litet, för att han därmed skulle kunnat påbörja fabriksdriften: pengarna utbetalades överhuvudtaget aldrig, hela beslutet var blott en vacker gest.

Leblanc, som på så många sätt gjort sig förtjänt av sitt fäderneslands tacksamhet, såg sålunda undan för undan alla sina förhoppningar stranda och sjönk ständigt allt djupare i ekonomisk misär. Man kan ej förundra sig över, att hans levnadsmod under dessa förhållanden knäcktes. Han var nu över 60 år gammal, och allt hans arbete hade blivit resultatlöst. Han råkade i fullständig förtvivlan och slutligen, den 16 januari 1806, tog han sig själv av daga med ett pistolskott.

Leblancs samtid förstod ej betydelsen av hans upptäckt, ja, helt insåg han den väl knappast själv. Den av honom funna metoden gav ej blott möjlighet att i stor skala framställa soda ur ett billigt utgångsmaterial. Den bar därjämte inom sig fröet till utveckling även längs ett stort antal andra linjer. Där var först den för sodafabrikationen nödvändiga svavelsyran, vars industriella framställning på Leblancs tid ännu befann sig i det allra första utvecklingsstadiet. Det faktum, att svavelsyran nu blev ett nödvändigt råmaterial för sodatillverkningen kom att i utomordentlig grad befrämja och påskynda svavelsyreindustriens utveckling. Vidare funnos biprodukterna, klorvätet och svavelkalciet. Icke minst på grund av sina synnerligen obehagliga egenskaper kommo dessa att ge upphov till viktiga industrigrenar, där man ur dem sökte utvinna ämnen, för vilka en säker och vinstgivande avsättning kunde påräknas. Slutligen gällde det att ur sodan själv framställa natriumhydroxid, ett särskilt för tvålfabrikationen mycket eftersökt ämne. På så sätt framväxte ur Leblancs ursprungliga uppfinning hela det komplex av fabrikationsgrenar, som man brukar sammanfatta under namnet »den tunga kemiska industrien».

Icke utan rätt har man jämnfört Nicolas Leblanc med James Watt. Vad den senare betydde för den mekaniska industrien, det kan den förre sägas ha varit för den kemiska. Men när sodafabrikationen på allvar började framträda som storindustri, var dess ursprunglige upphovsman glömd. Det var först på 1880-talet, som en avkomling till Leblanc, A. Anastasi, åter drog fram hans namn i ljuset genom en utförlig biografi över honom. Härmed väcktes åter intresset för den store uppfinnaren med det tragiska livsödet, man började inse, vilken ofantlig betydelse hans verksamhet haft, och 1886 restes på gården till Conservatoire national des arts et métiers en genom nationalinsamling åstadkommen staty av honom (se bilden sid. 105).

Samma år, som Leblanc tog sig av daga, började man åter fabricera soda enligt hans metod. Eftersom tillvägagångssättet offentliggjorts och sålunda var fritt tillgängligt för en och var, kunde vem som helst, blott han hade tillgängliga medel, börja sodatillverkning. Bolaget Saint-Gobain, vars huvudverksamhet var glasfabrikation, fann det mycket svårt att få fram ett glas av enhetlig sammansättning vid användning av de många olika barilla- och kelpsorterna, och uppförde därför nämnda år en egen sodafabrik, vilken under tidernas lopp utvecklades så, att den i senare delen av 1800-talet var Frankrikes största anläggning i sitt slag.

Sodafabrikationen upptogs snart även av åtskilliga andra franska firmor. Men det låg i denna industris natur, att den uppmuntrade till koncentration inom få men stora enheter, där framställningen av svavelsyran och sodan samt bearbetningen av biprodukterna samlades under en gemensam ledning. Sålunda utvecklade sig sodaframställningen i Frankrike redan tidigt till storindustri, fördelad på ett ganska ringa antal kapitalstarka bolag. Det främsta bland dessa blev snart Établissements Kuhlmann. Detta företag startades 1825 av en ung man, Frédéric Kuhlmann, som då var professor i kemi i Lille. Det utgjordes först blott av en svavelsyrefabrik, men redan 1826 tillkommo anläggningar för sodaframställning. Detta företag växte småningom till allt större dimensioner. Kuhlmann själv dog 1881, men det av honom grundade företaget fortfor att utveckla sig och blev, särskilt efter kriget 1914—18, Frankrikes utan gensägelse största kemiska koncern, ett motstycke till I. G. Farbenindustrie i Tyskland och Imperial Chemical Industries i England.

Det var emellertid icke i Frankrike, som Leblancindustrien nådde sin högsta utveckling. Detta skedde i stället i England, som ju överhuvudtaget under 1800-talet blev storindustriens förlovade land. Den våldsamt uppblomstrande textilfabrikationen var i fråga om behovet av soda den framförallt bestämmande faktorn, då — som redan nämnts — en av sodans viktigaste avsättningar var till tvättmedel för denna industris råvaror. År 1823 uppfördes den första engelska Leblancfabriken. Den förlades till stranden av Merseyfloden, strax ovanför Liverpool, och byggdes av en irländare vid namn James Muspratt. Denne, den kemiska storindustriens föregångsman i England, var född i Dublin 1793 och tog redan vid 14 års ålder plats som biträde hos en grosshandlare i kemikalier. Äventyrslystnaden grep honom emellertid och han begav sig till Spanien, där han som soldat deltog i kriget mot Napoleon. 1814 återkom han till sitt fädernesland och startade, ehuru endast 21 år gammal, på egen hand en liten fabrik för framställning av kemikalier. 1822 flyttade han över till Liverpool. Kort därefter — år 1823 — inträffade en händelse, som blev av avgörande betydelse för den kemiska industriens framtid i England. Då beslöt nämligen parlamentet, att skatten på salt skulle sänkas från 15 till endast 2 shillings pr bushel. Först härmed hade möjlighet skapats att upprätta Leblancfabriker i England och Muspratt tog, som nämnts, genast tillfället i akt och byggde en sodafabrik, vilken redan 1828 följdes av en större i S:t Helen's och 1850 av en i Widnes och en i Flint. De förstnämnda platserna ligga vid eller nära norra stranden av nedre Mersey, den sistnämnda i norra Wales, vid floden Dees mynningsvik. Dessa trakter blevo den kemiska industriens speciella marker i England, beroende i första hand på att icke blott väldiga koksaltlager utan även kol och kalksten här finnas i riklig mängd och på ej alltför stort djup under jordytan. I andra hand berodde det på de utmärkta sjöförbindelserna, vilka gjorde det lätt att transportera hit svavel från Sicilien eller svavelkis från Tyskland och Spanien. Som följd härav blev också Liverpool den stora utförselhamnen för soda och hela världens sodacentrum.

Vid de sodafabriker, som sålunda uppstodo i England, började man på 1850-talet att för upphettningen av natriumsulfatet med kol och kalksten ersätta de ursprungliga flamugnarna med roterande ugnar (»revolverugnar»). I dessa inlades först kalkstenen och två tredjedelar av kolet. På grund av den höga temperaturen förgasades då fuktigheten i kalkstenen med nästan explosionsartad häftighet, varvid stenen söndersprängdes till ett fint pulver. Efter en stund tillfördes så sulfatet och resten av kolet. Dessa ugnar sparade både arbete och bränsle och gåvo en betydligt likformigare produkt än de gamla flamugnarna, varför de småningom i stor utsträckning utträngde dessa. Då emellertid varje sådan revolverugn krävde en ångmaskin för kringvridningen, blev införandet av dem ganska dyrbart. Som följd härav kunde man ej tänka på att installera revolverugnar annat än vid mycket stora fabriker. Revolverugnarna kommo därför i sin mån att bidraga till utvecklingen hän mot en koncentration av sodaindustrien till ett relativt litet antal stora anläggningar.

Medan sålunda de stora fabrikerna i Frankrike och England i ständigt ökat tempo öste ut soda i marknaden, visste faktiskt ingen, vilka kemiska reaktioner, som lågo till grund för sodans bildning i dessa fabriker. Ehuru Leblanc var vetenskapligt utbildad, hade hans upptäckt varit rent empirisk och varken han eller hans efterföljare kände dess teoretiska underlag. Många framstående forskare brydde sina hjärnor med denna gåta, bland dem också vår store landsman Berzelius, och man gjorde sig de mest egendomliga föreställningar om vad som bildades under processen, innan den slutliga produkten, sodan, erhölls. Berzelius ansåg, att det vid glödgningen av sulfatet med kol och kalksten bildades svavelkalcium och natriumkarbonat, men kolsyran till detta senare förklarade han uppkomma, då kolet tog syret från natriumsulfatet. En lång rad följande forskare togo märkvärdigt nog fasta på den sista, felaktiga, delen av förklaringen men fäste sig ej vidare vid den första, riktiga, delen. Den framstående franske kemisten Dumas kom på idén, att det skulle bildas kalciumsulfat, som sedan skulle omvandlas till sulfid och slutligen till en oxisulfid. Denna hypotes omhuldades en tid mycket ivrigt. Först på 1840-talet övergick man från de rena spekulationerna till experimentella undersökningar, vilka emellertid mötte betydande svårigheter. Det var därför ej förr än 1884, som den franske kemisten Auguste Scheurer-Kestner efter ett par års grundliga experiment till fullo lyckades bevisa, att reaktionerna i sodaugnen åtminstone i stort sett äro de, som vi nu finna i varje lärobok i kemi.

Det har redan nämnts, att biprodukterna vid tillverkningen av Leblanc-soda utmärka sig för synnerligen obehagliga egenskaper. Klorvätet verkar dödande på växtligheten och förstör alla metallföremål kring fabrikerna. Svavelkalciet, som hopas till hela berg, utvecklar svavelväte och förpestar sålunda omgivningen. Det är häpnadsväckande, att de bägge giftiga gaserna under flera tiotal år fingo fritt gå ut i luften utan att fabrikerna tvungos vidtaga åtgärder för deras oskadliggörande. Slutligen ledde dock den häftiga oppositionen bland befolkningen kring fabrikerna till att man nödgades lasta svavelkalciet på pråmar, bogsera dessa långt ut till havs och där kasta det osympatiska ämnet i sjön. Som en följd härav måste alla fabriker, som ej lågo mycket nära en hamnplats nedläggas, då landtransport av svavelkalciet ställde sig alldeles för dyr.

Redan i slutet av 1830-talet hade emellertid A. M. Chance, en av två bröder, som 1835 upprättat en sodafabrik nära Birmingham, upptäckt ett efter honom benämnt tillvägagångssätt att återvinna svavlet ur svavelkalciet. Någon större betydelse erhöll likväl ej Chances metod förrän efter vissa, först på 1880-talet gjorda förbättringar. Då visade den sig emellertid vara synnerligen användbar. Metoden går ut på att svavelkalciet genom utröring med vatten förvandlas till en tunn välling, vilken därefter fylles på höga torn. Genom dessa pressas sedan underifrån koldioxid, som utdriver svavelvätet, vilket blandat med luft, ledes genom ett lager av glödande järnoxid. Denna verkar som katalysator för en reaktion, varvid bildas vattenånga och fritt svavel, det senare naturligtvis i gasform. Svavelgasen kondenseras slutligen i stora kammare, dels till flytande form, som på vanligt sätt kan gjutas i lämpliga formar, dels till svavelblomma. Tyvärr är utbytet vid Chances process ej på långt när lika med det teoretiskt beräknade, men metoden fick likväl en betydande användning, då den ju dock möjliggjorde återvinningen av en stor del av svavlet under samtidigt förstörande av det obehagliga svavelkalciet.

Vida mer segsliten blev frågan om klorvätegasens oskadliggörande. Visserligen hade William Gossage, som ägde en sodafabrik i Worcestershire, redan 1835 funnit en metod att så gott som fullständigt absorbera klorvätet i vatten. För detta ändamål lät han gasen underifrån strömma uppåt genom höga torn, fyllda med koks, över vilken vatten sipprade ner. Men världen hade ej användning för all den saltsyra, som på detta sätt kunde produceras. Följaktligen gingo ännu så sent som 1863 40 % av det vid sodafabrikerna alstrade klorvätet ut i luften. Detta år genomdrevos äntligen de s. k. alkaliakterna, enligt vilka ej mer än 5 % av klorvätet fingo utsläppas. Det visade sig nu, att denna gas i stället för att endast orsaka besvär och kostnader, mycket väl lät sig bearbetas till produkter, vilka kunde säljas med god vinst. Den första av de upptäckter, som bidrog härtill, gjordes av Henry Deacon, som via en anställning vid ett glasbruk blivit intresserad i sodaindustrien. Deacons process, vilken patenterades 1868, innebar som bekant, att en blandning av klorväte och luft leddes över upphettade stycken av eldfast tegel, vilka i sina porer uppsugit en lösning av kopparklorid. Den härigenom erhållna gasblandningen innehåller så mycket klor, att den kan användas till produktion av klorkalk. — Den andra upptäckten i denna riktning gjordes av Walter Weldon under åren 1868—70. Saltsyran oxiderades här enligt den ursprungligen av Scheele funna metoden med brunsten. Den härvid bildade mangankloruren blandades med kalkmjölk, varefter en ström av vattenånga och luft blåstes genom massan. Därvid bildades en fällning av kalciummanganit (»Weldonslam»), som sedan åter kunde användas för oxidation av nya mängder saltsyra till klor.

Den engelska Leblanc-sodaindustriens grundläggare, Muspratt, levde ända till 1886 och såg sin ursprungligen anspråkslösa rörelse utvecklas till väldiga dimensioner. Men även i andra delar av England uppkommo stora sodafabriker under ledning av andra män. Främst bland dessa förtjäna omnämnas medlemmarna av familjen Tennant, vars stamfader, Charles Tennant, var den, som 1787 kom på idén att framställa klorkalk och använda det som blekmedel i stället för det sedan länge kända »Eau de Javel». Hans fabriksanläggning i Glasgow växte småningom till en imponerande industri, som under flera generationer förblev under en Tennants ledning. År 1890 ingick denna gamla firma jämte ett fyrtiotal andra i det stora bolag, som kallades United Alkali Co., och vilket var ett av de fyra storföretag, som 1926 bildade den väldiga koncernen Imperial Chemical Industries, ett av världens största företag inom den kemiska industrien.

Såväl i Frankrike som England kom sålunda den av Leblanc uppfunna processen att ge upphov till en imponerande utveckling av kemisk industri och småningom leda till bildandet av jättelika affärsföretag. I den vida senare startade utvecklingen av Tysklands kemiska industri kom däremot fabrikationen av Leblancsoda ej att spela någon så avgörande roll. Att den dock även här haft en viss betydelse framgår likväl av namnet på det största av de gamla företag, vilka tillsamman bildade I. G. Farbenindustrie: Badische Anilin- und Sodafabrik.

Men ej blott till den kemiska industriens ekonomiska utan även till dess tekniska utveckling har Leblancs sodametod givit ytterst värdefulla bidrag. Den gav anledning till utexperimenterande av nya ugnstyper och till ständiga förbättringar av redan förut kända sådana. Den frammanade effektivare apparater för absorption av gaser och den tvang till bättre transportanordningar och till en allt längre gående automatisering av arbetet i fabrikerna. Allt detta var sådant, som blev till största gagn för alla former av kemisk industri och därför av den allra största betydelse för hela denna industris utveckling.

En varmluftballong.

Två silkespapper 60 cm × 73 cm och 63 cm × 74,5 cm (ej mindre) läggas på varandra. Tre av kanterna på det mindre, övre papperet bestrykas på 15 mm bredd med dextrin, varefter det större papperets kanter vikas över. Den så uppkomna påsens öppning förstärkes med remsor av skrivpapper, som klistras längs kanterna. Hela anordningen väger 20 g.

För uppvärmning av luften användas 1 à 2 bunsenbrännare eller hellre en liten ringbrännare. Man fattar tag i påsens öppning och botten och håller den försiktigt med öppningen nedåt över lågorna. Efter några sekunder kan man släppa bottnen och hålla öppningen i diametralt motsatta punkter, och efter ett par minuter får anordningen stiga upp till taket. — Om skrivpapperen äro för lätta, »kantrar» påsen. Mindre hål lagas på ett ögonblick t. ex. med gummerade pappersremsor.

Försöket kan utföras under någon fysiklektion i klass 3^5 eller 2^4.

Alfred Nilsson.

Bokanmälningar.

W. H. Bragg, *Ljusets världsallt.* Översatt av Fil. dr Per Collinder. Natur och Kultur, Stockholm 1940, 259 s., 24 planscher, kr. 8: 50, inb. 11: —.

I denna populära framställning av den fysikaliska optiken behandlar författaren bl. a. ögat och seendet, diamanten och dess optiska märkvärdigheter, speciellt briljantslipningens geometri, spektrums färger och naturföremålens färger, himlens och havets färger, ljusets polarisation, stjärnspektra och deras tolkning, fluorescens, röntgenstrålar och fotoelektrisk effekt. Den frejdade författaren erhöll som bekant nobelpriset i fysik år 1915 samman med sin son, och han är väl känd från tidigare populärvetenskapliga framställningar, vilka rönt stor uppskattning. Denna bok om ljuset torde utan tvekan kunna ställas främst bland dessa hans populära fysikböcker. Framställningssättet är medryckande och klart. Illustrationsmaterialet är mycket intressant med flera reproduktioner såväl av experimentella resultat som av lämpliga apparatuppställningar. Flera bilder i färgtryck av interferensfenomen m. m. äro mycket väl utförda.

Författaren utvecklar ofta stor fyndighet, när han vill åskådliggöra sin framställning genom bilder och analogier. Översättningen är väl gjord. Boken är en utmärkt premiebok — men fysikläraren bör även kunna belöna sig själv genom att läsa boken.

J. Tandberg.

Neue Wege exakter Naturerkenntnis. Fünf Wiener Vorträge. Franz Deuticke, Wien 1939. 93 s. RM 3: 60.

Den välkända serien »Fünf Wiener Vorträge» utkom år 1939 med sin fjärde cykel. F. A. Paneth behandlar stratosfärens kemiska sammansättning — man får veta, att något sensationellt nytt icke ännu har blivit funnet. G. Wentzel behandlar krafterna inom atomkärnan och Thirring den kosmiska strålningen. H. Mark skriver om kedjereaktioner och katalysfenomen, och slutligen refereras ett föredrag av Debye om de senaste årens framstötar ned mot den absoluta nollpunkten. Häftet är intressant och lättläst men kanske något tunnare och mera populärt än de föregående i serien.

J. Tandberg.

Johannes Picht, *Einführung in die Theorie der Elektronenoptik.* Barth, Leipzig, 1939, 197 s., RM 15: 60.

År 1932 flammade ett starkt intresse upp för elektronstrålars optik som en följd av de arbeten, som detta år publicerades av de båda tyska forskarparen Knoll-Ruska och Brüche-Johansson. Tidigare hade Poincare, H. Busch och andra sysslat något med dessa problem speciellt ur teoretisk synpunkt, men det egentliga genombrottet för denna gren av fysiken kom med de nämnda arbetena. Sedan dess har ett mycket stort antal såväl experimentella som teoretiska arbeten på området publicerats, särskilt i samband med utvecklingen av elektronmikroskopet. Pichts bok utgör en sammanfattning och delvis en bearbetning från författarens egna synpunkter av de teoretiska arbetena på området. Boken ansluter sig till föreläsningar som hållits vid Berlins Tekniska Högskola. I de båda första kapitlen behandlas elektronstrålarna matematiskt från korpuskulär och vågsynpunkt. I det tredje kapitlet redogöres för olika slag av elektronoptiska system. Det fjärde kapitlet behandlar lagarna för avbildningen, och det femte och sista kapitlet ger teorin för avbildningsfelen. Boken innehåller mycket av intresse för den, som önskar specialisera sig på dessa områden, men den torde vara alltför matematiskt betonad för den, som endast har tid och tillfälle att söka vinna en allmän orientering över dessa frågor.

Sten von Friesen.

Beckman-Wetterblad, *Fysik, läro- och läsebok för realskolan.* Första årskursen (3^5, 2^4). Andra upplagan. 148 s., kr. 2: —.

Det är sannolikt, att de båda författarna till denna redan förut förträffliga läro- och läsebok varken motvilligt lyssnat till råd och upplysningar eller vägrat taga all möjlig hänsyn till uttalade önskemål, innan de började utarbeta bokens andra upplaga. Sedan förliden höst föreligger nu första årskursens andra upplaga, och denna är i flera stycken ännu bättre än sin föregångare. Vad man genast lägger märke till är, att bildmaterialet delvis undergått förändring och därigenom blivit än mera tydligt och instruktivt. Man kan dock fråga, varför vissa förut tillräckligt goda figurer utbytts mot andra. Vad har t. ex. vunnits genom utbytet av fig. 43? Icke blott själva bilden utan även bokstavsbeteckningarna på densamma ha blivit nya. Bland förändringar till det bättre i övrigt bör nämnas, att övningsuppgifterna fått fortlöpande numrering och försetts med facit, samt att de främmande namnens uttal angivits. Formuleringen har på många ställen förenklats; vissa för eleverna svårförståeliga uttryck och meningar ha ändrats eller uteslutits. Så har vid behandlingen av magnetiska kraftlinjer en sådan definierats såsom den *bana* i stället för den *riktning*, en rörlig nordpol följer. Lärobokens upplysning (med förbehåll), att jordens dragningskraft är lika stor överallt på jordytan, förekommer ej i den nya upplagan. På flera ställen ha tillkommit förtydligande tillägg. Här och var förekommande småändringar ha — enligt mitt förmenande — ibland gjorts i onödan. Det var bra, som det var. Tyvärr återfinnas text och figurer ej alltigenom på sidor med samma nummer i de båda upplagorna. Denna olägenhet hade kunnat och bort undvikas, da upplagorna säkert under lång tid komma att användas vid sidan av varandra.

I läseboken få eleverna möjlighet att följa med sin tid. Åtskilligt nytt har där tillkommit.

Denna läro- och läsebok i fysik är redan införd vid ett tjugofemtal statliga läroverk. En välförtjänt framgång!

T. Götharson.

Bengt E. Nyström och Hjalmar Olson, *Plan trigonometri för realgymnasiet.* P. A. Norstedt & Söner, Stockholm 1939, 45 s. kr. 1: 60.

Författarna införa redan från början de generella definitionerna på de trigonometriska funktionerna. Därefter följer diskussion av tecknen i de olika kvadranterna, $\operatorname{tg} v = \frac{\sin v}{\cos v}$ och $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$. Eleverna få lära sig sambanden mellan de trigonometriska funktionerna för supplement- och komplementvinklar. De få slå i tabeller, interpolera, ja t. o. m. beräkna log cos 75°,62, allt innan ett enda exempel på solvering av en rätvinklig triangel satts i händerna pa dem. Enligt förordet grundar sig denna planläggning delvis på hänsynen till kursen i analytisk geometri, som så tidigt som möjligt bör påbörjas i III^4 och II^3. »Bortsett från denna hänsyn hava förf:na vid sin undervisning funnit det ur metodisk synpunkt riktigast, att de generella trigonometriska definitionerna ställas i förgrunden och de speciella för spetsiga vinklar lämnas i andra hand.» (citat ur förordet). En av förf:na, Bengt E. Nyström, hade dock 10 år tidigare en diametralt motsatt ståndpunkt. Jmf. Elementa Årg. 13 sid. 169.

Triangelsolveringar följa sedan enligt traditionell metod. Tangentteoremet är dock, som sig bör, tillbakaskjutet och kommer efter de s. k. produktformlerna. En stor förtjänst är att radianbegreppet fått en framträdande plats. Exemplen äro jämförelsevis få men väl valda. Förf. motivera begränsningen med att rikligt med övningsuppgifter finnas i skilda samlingar studentuppgifter. Priset kan härigenom hållas synnerligen lågt.

Som en förtjänst kan även noteras, att svaren äro avkortade till lämpligt antal siffror. Eleverna skola i enlighet med de metodiska anvisningarna lära sig bedöma, med vilken noggrannhet svaret skall anges. I äldre läroböcker förekommer ju, att avståndet mellan fastlandet och en ö eller mellan två fartyg på sjön är bestämt på 1 dm när m. m. Vid de uppgifter i läroboken, där kända sträckor och vinklar i trianglar anges med t. ex. 4 dm, 9 dm, 40° betraktas dessa värden som exakta. Förf:na ha även övervägt möjligheten att, som nu sker i fysikuppgifterna, med tillfogade decimalnollor markera primärsiffrornas noggrannhet. Så när som på enstaka exempel är detta dock ej genomfört. Detta är ju ej heller någon väsentlig sak, och varje lärare får bestämma, vad som passar honom bäst.

Förf:na äro slutligen att gratulera till sin nya, klara, rediga lärobok.

Fredrik Ehrnst.

Kaj Nielsen, *Elektriciteten — saadan som vi møder den,* 149 s. Gyldendal, Kbhvn 1939.

Förf. betecknar sitt arbete som »En bog for de Unge». Han har undvikit den vanliga läroboksformen och valt den breda skildringen med talrika illustrationer, så att boken skall kunna läsas även av ungdom, som icke erhållit någon systematisk undervisning i fysik. Texten är habilt hopkommen, och boken är faktiskt underhållande, — icke blott för unga pojkar. Flickorna törs jag inte riktigt svara för; deras inställning till den elektromagnetiska delen av världsordningen är oftast av den fatalistiska sorten. Men för pojkar i de lägre tonåren har man här en bra premiebok, som borde kunna utdelas även i svenska skolor.

Man får börja på elverket och därifrån följa strömmen till olika förbrukningsplatser, man studerar storstadens reklambelysning, man får genomgå en liten kurs med varjehanda praktiska råd om elektriciteten i trafikens tjänst, och därefter vandrar man längs en högspänningsledning ut på landet till de små transformatorhusen. Sedan bär det iväg hem igen till en givande inventering av den mängd elapparater, ett ordinärt hushåll brukar vara belamrat med nu för tiden.

Under hela tiden matar förf. i en, ihärdigt men icke alltför ostentativt, att elen visserligen är en god tjänare men en synnerligen farlig herre.

Så föres man att se, hur »den elektriske Pære» kommer till, och får därpå vara med om en dramatisk provning av högspänningsisolatorer.

Dagen avslutas med ett besök hos den stora cyklotronen i Bohrs institut. Vad sägs om en jättemagnet, som väger 37 000 kg och kan utveckla en dragkraft av 100 tonf mellan polytorna!

T. Edqvist.

H. Rasmussen-H. Lund-T. Langvad, *Hverdagslivets Kemi. I. Uorganiske Stoffer.* København 1939, 248 s.

Arbetet, som ingår som n:r 27 i häftesserien Haases Handbøger, har till mål att giva en populär framställning av de allmännaste kemiska begreppen och av några av de tekniskt viktiga ämnen som industrien frambringar och ställer i vår tjänst.

Föreliggande första hälft av vardagslivets kemi är således ej avsedd som skolbok och sysslar ej med experiment utan ger en för gemene man avsedd, flytande redogörelse för viktiga delar av den oorganiska kemiska teknologien med speciellt hänsynstagande till sådana för Danmark viktiga ämnen som konstgödning, glas, lera och cement. Ett femtiotal goda bilder belysa de olika kapitlen, vari för övrigt behandlas förbränning, luft och vatten, sodaindustrien, kalk, silikater, järn, alumin och andra metaller på ett lättläst och intressant sätt, stundom kryddat av historiska synpunkter.

E. Nordefeldt.

Otto Cyrén, *Syntetiska färgämnen och läkemedel.* Tekniskt Folkbibliotek vol. X. Alb. Bonnier, Stockholm 1939, 252 s., inb. kr. 9: 50.

Denna bok ger en god översikt över det arbete, som nedlagts, och de resultat, som vunnits, inom den del av kemien, vilken avser att ur stenkolstjära framställa färgämnen och läkemedel. För alla av kemisk teknik intresserade, vilka ej själva äro specialister på dessa ämnesgrupper, skaffar Cyréns bok en välkommen möjlighet att orientera sig inom deras område.

Efter en inledande översikt över de gamla växtfärgerna och deras betydelse särskilt för den orientaliska matt-tillverkningen ger författaren en historik över den moderna syntetiska färg- och läkemedelsindustriens utveckling. Denna del av boken torde för en lekman vara den intressantaste, men även för exempelvis en kemilärare har den nog i många fall mycket nytt att bjuda på. Man ser här, huru hela den moderna kemiska storindustrien vuxit fram och i skilda länder givit upphov till de väldiga affärssammanslutningar, som nu behärska fabrikationen. En sådan historik över dessa stora företags uppkomst och utveckling vet jag mig ej förut ha sett samlad på ett ställe och framlagd i så lättläst form.

Därnäst följer ett kort kapitel om framställningen av de halvfabrikat, som ligga mellan tjäran och färgerna resp. läkemedlen. Sedan beskrivas de för de olika typerna av färger utmärkande egenskaperna och omtalas, vad man har att iakttaga vid deras användning.

Efter dessa mera allmänna kapitel följer sedan en speciell redogörelse för de viktigaste syntetiska färgämnena, varvid författaren även beskriver, hur man på många sätt lyckats förenkla det förut ganska besvärliga färgerihantverket. För att göra framställningen lättläst även för den i kemien föga bevandrade ha de flesta, och framför allt alla mera krångliga, formler samlats i ett särskilt kapitel vid bokens slut, dit hänvisningar ske medelst siffror i texten.

Återstoden av boken upptages av de syntetiska läkemedlen, i vilket sammanhang även hormoner och vitaminer få ett kort omnämnande. För lekmannen torde detta kapitel erbjuda större intresse än det om färgerna, då ju litet var har prövat ett eller flera av de omnämnda läkemedlen på sig själv, medan färgernas användning ligger på sidan om de flestas dagliga gärning.

Boken utmärker sig, liksom övriga arbeten i »Tekniskt Folkbibliotek» för en synnerligen förnämlig utstyrsel med ett stort antal charmanta illustrationer. Vad man beklagar är, att bland dessa icke finnes en enda schematisk bild, som visar, hur de vid fabrikationen använda apparaterna se ut inuti. Vad man också skulle önskat är ett alfabetiskt register, vilket skulle gjort boken ofantligt mycket mera användbar som uppslagsverk.

Dessa brister förringa dock ej avsevärt den vackra och intressanta bokens värde. Den kan varmt rekommenderas, särskilt till alla lärjungebibliotek.

John Lundberg.

O. Holmqvist, *Svenska Gasteknikens Historia.* Del. I, Experimenttiden (till år 1843). Utgiven av Svenska Gasverksföreningen, Stockholm 1939, 81 sid., 27 ill.

Arbetet har formen av fristående kapitel, som skildra olika faser av gasbelysningens svenska, delvis även utländska historia. Efter sporadiska iakttagelser och försök, som ej ledde till nämnvärda resultat, kom en offentlig gasbelysning i vårt land till stånd år 1819, då vid Lantbruksakademiens högtidssammanträde det av svensk-finnen G. M. Schwartz konstruerade oljegasverket för första gången kom till användning. Detta gasverk var helt enkelt ett crackingverk, nämligen för beckolja, och sålunda en tidig föregångare till denna nu så allmänt brukliga process. Det är ett vackert vittnesbörd om Schwartz' genialitet och tekniska duglighet, att det oljegasverk, som 1825 anlades och togs i bruk vid Krigsskolan på Karlberg, oavbrutet fungerade ända till 1875. Om G. M. Schwartz får läsaren av Berzelii Självbiografiska anteckningar en enbart ofördelaktig uppfattning; författaren till Gasteknikens historia ger hans minne en välbehövlig upprättelse. Ostwald skulle ha betecknat Schwartz som ett romantiskt, Berzelius som ett klassiskt snille. När dessa andar, båda stora, men så olika, möttes på ett i någon mån gemensamt arbetsfält, var en djupgående schism oundviklig.

En värdefull gasteknisk bibliografi avslutar arbetet.

Gunnar Starck.

Bonniers Konversationslexikon, band III. Stockholm 1939. Pris kr. 18: 50 inb.

Det tredje bandet av Bonniers »stora» konversationslexikon omfattar *Buna* (»se *Kautschuk*») t. o. m. *Doppingar* och upptager 1448 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som främst äro av intresse att här granska, må nämnas *Bunsenbrännare, Bärnsten, Celluloid, Cellulosa, Cement, Centrifug, Chadwick, Chladni, Comptoneffekt, Curie, Cyklotron, Debye, Detektor, Diamant, Dielektrikum* och *Dissociation.* Sammanfattande kan sägas, att allt är nyskrivet eller omsorgsfullt reviderat i jämförelse med föregående upplaga, de flesta illustrationerna äro nya och uppgifterna ha förts fram till tryckårets ståndpunkt. Nämnas må t. ex. att den ålderdomliga fisk, som fångades år 1938 utanför Sydafrikas kust och väckte så stor uppmärksamhet, finnes avbildad och beskriven (*Crossopterygier*). Andra data av minst lika aktuellt intresse finnas även att notera, men de falla oftast utanför ramen av denna granskning.

J. Tandberg.

M. Ilin, ... *och det vart ljus.* — 126 s.
— *Vad är klockan?* — 122 s.
— *100 000 varför.* — 144 s.
Kooperativa förbundets bokförlag 1939. Varje volym: häft. kr. 1: 85, inb. kr. 2: 50.

Dessa tre små böcker äro översatta från engelska språket, men förf. är ryss, och han nämner i en av böckerna, att den ursprungligen avsetts för ryska skolbarn. Den bok, som handlar om lampans historia, har råkat få en alltför monumental titel på svenska. Man måste tyvärr säga, att den, trots titeln, är den svagaste av de tre. Boktryckeriet har töjt ut den magra texten med hjälp av mellanslag och kapitelrubriker, så att varje sida håller högst 19 rader, vanligtvis ett mindre antal. Med hjälp av spatiösa illustrationer och diverse typografiska åtgärder har det vidare blivit möjligt att trolla bort c:a 40 sidor av bokens 126 till ingen rimlig valuta för läsaren. Illustrationerna äro mestadels torftiga kolteckningar utan reda och tydlighet och ritade utan talang. Den korta texten är ett i talspråk framfört kåseri om lyktor och lampor.

Boken om klockan behandlar tidmätare genom tiderna och har sina illustrationer i form av små teckningar i marginalen. Texten är mera genomtänkt och bättre planerad än vad fallet är hos föregående bok. Radantalet är normalt 22 per sida. Den tredje boken innehåller en del nöjsamma betraktelser i samband med en rundvandring i en liten bostad och är den enda av de tre, som skulle kunna motivera sin överflyttning till svenska. Betraktelserna omfatta vattnet och elden, maten i skafferiet, metallerna på kökshyllan, porslinet och kläderna i skåpen. Antalet frågor, som besvaras, utgör dock ej det tal, som bokens titel anför, det räcker gott och väl med ett enkelt hundratal. Men många av utläggningarna torde kunna vara en nöjsam underhållning för den, som ännu är helt obevandrad i teknikens historia och det dagliga livets kemi. Notiserna om venetianska speglar och om alkemisten Böttgers äventyr i samband med porslinstillverkningen äro ledigt berättade.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

J. O. LINDE, *Elektrische Widerstandseigenschaften der verdünnten Legierungen des Kupfers, Silbers und Goldes.* Gleerupska Univ.-Bokhandeln, Lund 1939. 96 s. Disp. vid Stockholms Högskola 9/12 1939. Opponenter: prof. G. BORELIUS och docent C. H. JOHANSSON.

Arbetet omfattar en systematisk undersökning av motståndet hos utspädda binära blandkristallegeringar, där grundmetallen är Cu, Ag eller Au. I första hand har för alla element, som visa löslighet i dessa metaller, sambandet mellan motståndet och tillsatsämnets koncentration bestämts vid 0° C, och motståndsökningen per atomprocent av tillsatsämnena (atomära motståndsökningen) beräknats. För ett stort antal legeringar har även motståndets temperatur- och tryckberoende undersökts genom mätningar inom temperaturområdet från flytande lufts temperatur till + 100° C resp. i tryckområdet 0 – 3000 kg/cm². Dessa undersökningar ha i några fall utsträckts till att omfatta även legeringar med relativt höga koncentrationer hos tillsatsmetallen.

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

I kap. 1 redogöres för äldre arbeten inom hithörande område. Kapitlen 2—4 behandla legeringsframställningen, metoden för motståndsmätningarna samt den inverkan kallbearbetning och olika värmebehandlingar ha på grundmetallernas och legeringarnas elektriska motstånd. Kallbearbetningen medför hos guldets legeringar med krom en minskning i specifika motståndet men i alla andra undersökta fall en motståndsökning. Anmärkningsvärt liten är denna motståndsökning hos legeringar av koppar med fosfor.

Kap. 5 ger i tabeller och diagram resultaten av motståndsbestämningarna vid 0° C för samtliga undersökta legeringar. Betecknas tillsatsämnena med sina resp. atomnummer, så äro de undersökta kombinationerna: Cu (29) med 4, 12–15, 24—33, 45—51 och 77—80; Ag (47) med 12—13, 25, 29—33, 46—51 och 78—83; Au (79) med 12—13, 22, 24—33, 45—51 och 78—83.

I kap. 6 redogöres för de lagbundenheter, som framkomma, när den atomära motståndsökningen betraktas som funktion av grund- och tillsatsmetallernas plats i periodiska systemet. I anslutning till det experimentella materialet diskuteras teorierna för blandkristallmotståndet. Vid uppställning av det periodiska systemet i den s. k. långperiodiska formen benämnas ämnena till vänster om Cu, Ag och Au övergångs- eller a-element och ämnena till höger därom b-element. För legeringar med b-element visa mätningarna, att den atomära motståndsökningen ökar med kvadraten på skillnaden i gruppnummer hos grund- och tillsatsmetall. Betecknas gruppnumren för grund- och tillsatsmetall med N_g resp. N, gäller således för atomära motståndsökningen (ζ)

$$\zeta = a + k(N - N_g)^2, \tag{1}$$

där a och k äro konstanter, som ha något olika värden i de olika perioderna. Vidare gäller, att b-elementens atomära motståndsökning är lägre i koppar än i silver eller guld. Av sistnämnda resultat har förf. dragit den slutsatsen, att motståndsökningen för dessa legeringar allmänt avtar med grundmetallens atomvolym. För legeringar med a-element äro förhållandena mera komplicerade. Norburys kvalitativa regel, enligt vilken motståndsökningen bör vara större ju större avståndet är i periodiska systemet mellan kolumnerna för grund- och tillsatsmetall, gäller sålunda ej och än mindre ovannämnda kvantitativa samband (ekv. 1). Den atomära motståndsökningen är vid a-elementen i regel större i koppar än i silver eller guld.

I kap. 7 behandlas temperaturberoendet för motståndsökningen. Även i detta avseende visa legeringar med b-element bestämda lagbundenheter med hänsyn till elementens ställning i periodiska systemet. Den atomära motståndsökningens temperaturkoefficient är alltid positiv och avtar inom varje period regelbundet med stigande gruppnummer hos tillsatsmetallen. För legeringar med a-element är temperaturkoefficienten vid vissa kombinationer positiv, vid andra negativ. Man kan bland de senare erhålla legeringar med temperaturoberoende motstånd, varå undersökningen ger flera nya exempel.

I kap. 8 redogöres för mätningarna av motståndets tryckberoende. Tryckmätningen skedde med elektrisk motståndsmanometer. Efter ingående undersökning av systemet Ag—Mn lyckades förf. få fram en legering, som visade sig i hög grad lämpad som material för motståndsmanometrar. Den har en motstånds-tryckkoefficient, som är c:a 50 % större än manganins, och dess temperaturkoefficient i området 0—100° C är även vid sidan av manganins mycket liten. För legeringar med b-element gåvo mätningarna som resultat, att tryckkoefficienten för blandkristallmotståndet är negativ och av samma storleksordning som resp. grundmetalls kompressibilitetskoefficient. Detta resultat visar, att motståndet minskar med atomvolymen hos grundmetallen, och är alltså i överensstämmelse med den slutsats, som erhölls genom jämförelse av den atomära motståndsökningen genom ett och samma tillsatselement i olika grundmetaller (kap. 6). Motståndets minskning med atomvolymen synes teoretiskt sammanhänga med att elektronernas hastighet ökas med avtagande atomvolym, vilket i sin tur betingar en minskad spridning av elektronvågorna.

I kap. 9—10 redogöres för mätningar av motståndets temperatur- och tryckberoende hos legeringar med relativt höga koncentrationer av tillsatsmetallen. Det har vid dessa undersökningar framkommit nya legeringar av den typ, vars klassiska representanter äro konstantan och manganin, d. v. s. legeringar med försvinnande liten motstånds-temperaturkoefficient inom ett visst temperaturområde. Till dessa höra Au med c:a 7 at% Co eller Cr och Ag med c:a 16 at% Mn. Särskilt intresse förtjänar Au-Cr-legeringen på grund av motståndets utomordentliga konstans i tiden (frihet från åldring). Såväl i detta avseende som med hänsyn till sin ringa temperaturkoefficient är denna legering det allra bästa materialet för elektriska motståndsnormaler, när högsta möjliga precision eftersträvas.

I kap. 11 redogöres för några resultat beträffande löslighetsförhållandena vid några legeringssystem, som ej tidigare undersökts. I samma kapitel ges några uppgifter om framställningen av trådar av vissa legeringar, som enligt uppgifter i litteraturen skulle vara så spröda, att de ej kunna bearbetas.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1940: 1—2.

Ur innehållet: K. G. Malmquist, Vårt stjärnsystem; Å. Wallenquist, Undersökningar av ljusfördelningen inom galaktiska nebulosor; G. Wernberg, Den selektiva absorptionen i Vintergatan; G. Järnefelt, Om moderna kosmologiska teorier; K. G. Malmquist, Åbo Akademis astronomiska observatorium; T. Elvius, Påvens nya observatorium; Ett svenskt kalenderur; Astronomiska Sällskapet 1939.

Svensk kemisk tidskrift, 1940: 2—4.

Ur innehållet: F. Nydahl o. H. Arnfelt, Removal of Carbon Dioxide from Distilled Water; K. Myrbäck, Ueber die Oxydation der Aldosen durch Hypojodit; J. A. Hedvall, Olika slag av gitterstörningar och deras fysikalisk-kemiska verkningar; G. Cohn, Die Bedeutung des magnetischen Zustands für die Aktivität eines Katalysators; J. Laudon o. B. Sjögren, Sulfathiazol; A. Larsson o. I. Liljedahl, Bestämning av pyrodruvsyra i blod; K. H. Gustavson, The Hydro-thermal Stability of Corium Proteins in Combination with Basic Chromic Salts; Hedvall-Wallgren-Månsson, Ueber eine neuartige, strukturempfindliche Erscheinung an Kristallen; K. Myrbäck, Ueber die Vegärbarheit der Cellobiose.

ERA, 1940: 2—4.

Ur innehållet: Kegums kraftverk i Lettland; Roslagsbanans elektrifiering; Elektronmikroskopet; Karolinska sjukhusets elektriska utrustning; Gemensamma måltider — även ett tekniskt problem; Månadsöversikter över vår elektriska kraftförsörjning; El-nyheter.

Teknik för alla, Stockholm 1940: 1—13.

Vid senaste årsskifte upphörde månadstidskriften »Teknisk Revy» att utkomma. Den har nu ombildats till veckotidskrift och utkommer fr. o. m. 1 mars med ett 25 à 30-sidigt häfte per vecka. Redaktionskommittén borgar för ett gediget innehåll. Den utgöres av: intendent T. Althin, fil. lic. I. Bolin, civilingenjörerna W. Holmstedt, E. Velander o. T. Ångström med bergsing. F. Lindgren som ansvarig utgivare. Ur det rikhaltiga innehållet kunna endast några få rubriker anföras: Sulfitsprit; Armégeväret; Elektrisk svetsning; Hur man letar olja; Kulsprutans historia: Frekvensmodulation; Svarvens historia; Konstglasslipning; Kol ger oss olja; Atomsprängning; Den nya svenska ögonmagneten; Är människoögat felkonstruerat?; Vad innebär snabbfrysning?; Gustav III och luftballongen; Automatiska telegram i U. S. A.; Pionjären C. D. Ekman Stratosfärens gåtor locka. För »ungdom i alla åldrar» ges anvisningar om tillverkning av en rad apparater till nytta och nöje.

Flygning, 1940: 4—9.

Ur innehållet: Användning av propellern som luftbroms; Flygande brandkårer; Modellflygningens teknik; Nomogram för bestämning av ett flygplans horisontalhastighet på konstruktionshöjden; Upptagningsvinkel — avdriftsvinkel; Upptagningsvinkelns beräkning vid variabla vindar. Flygnummer (nr 6) innehåller bl. a.: Luftskyddets brandtjänst, Bombverkan och skyddsrum, Flyglarm, Eldsläckning med skum.

Matematisk Tidsskrift, København 1939: 4.

Ur innehållet i **A**: I. H. Christensen, Om Ellipsen og dens elementære Kinematik; A. S. Bang, Differensrækker med lutter Primtal; A. Nygaard, Minsteværdiproblemer. — Ur innehållet i B: S. LAURITZEN, En Sætning om Grupper af Substitutioner.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1940: 1.

Ur innehållet: O. STRUVE, McDonald-Observatoriet; E. STRÖMGREN, Nogle i Astrofysiken vigtige fysiske Definitioner og Betegnelser; B. STRÖMGREN, Om energiproduktionen i Stjernernes Indre; U. ATTILA, Ett Nomogram för bestämning av solens höjd.

Naturens Verden, København 1940: 1.

Ur innehållet: J. SMED, Mesonen, den tunge elektron; N. NIELSEN, Plantevækststoffer; R. EGE, Nobelpris i kemi 1939.

Matematisk Tidsskrift, Oslo 1940: 1.

Ur innehållet: I. JOHANSSON, Litt om aksonometri; TH. SKOLEM, En liten studie i transfinit mekanikk; W. WERENSKIOLD, Lineære transformasjoner; Løste opgaver og opgaver til løsning; Eksamensopgaver.

Himmel och Jord, Oslo 1940: 3—4.

Ur innehållet: J. V. GARWICK, Vannstoff, universets viktigste grunnstoff; B. HELLAND-HANSEN, En internasjonal undersøkelse av Golvstrømmen; L. OWREN, Mia Ceti, — det røde vidunder; H. SOLBERG, Et meget sjeldent halofenomen; N. HERLOFSON, Elektriske strømmer omkring jorda; »Litt av hvert fra verdensrommet».

Naturen, Bergen 1940: 3.

Ur innehållet: B. HELLAND-HANSEN, Hvad havet inneholder av salter; M. JENSSEN, Geofysisk malmletning; B. J. BIRKELAND, Temperatur og nedbør i Norge.

Föredrag under våren 1940 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Kemiska Föreningen, ordf. fil. dr. K. E. THOMÉ, sekr. fil. lic. B. SJÖBERG.

Föredrag: docent B. ADELL, Nyare teorier för beräkning av protonavståndet hos tvåbasiska syror ($^9/_2$); fil. dr. K. E. THOMÉ, Biologisk äggvitesyntes ($^5/_4$); prof. L. SMITH, Några erfarenheter vid titerställning av 1-normal saltsyra ($^{17}/_5$); civiling. fil. mag. B. LUNDÉN, Kompressibilitetsbestämning medelst ultraljud jämte demonstration av apparaten ($^{17}/_5$); Demonstration av Alnarps mejeri ($^1/_6$); prof. B. PLATON, Verksamheten vid Statens mejeriförsök ($^1/_6$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. CARLSON, sekr. fil. lic. S. DANIELSON.

Föredrag: prof. L. AHLFORS, Helsingfors, Om meromorfa kurvor ($^{12}/_4$).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. HOLM, sekr. amanuens B. GRABE.

Föredrag: lektor T. E. AURÉN, Joniseringsföreteelser i de högsta lagren av jordens atmosfär ($^{12}/_2$); Visning av Radiumhemmets (Karolinska sjukhuset) röntgenanläggningar, radiumförråd och teleradiumapparater, föredrag av docent R. SIEVERT om Fysiska problem inom medicinsk radiologi.

(forts. sid. 134)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1101) *I ett plan äro givna: en storcirkel tillhörande en klotyta och en annan cirkel, som utgör tvärsnittet av en obegränsad cylinderyta. Klotet och cylindern skära varandra längs en kurva. Konstruera den punkt, där kurvtangenten råkar planet, då tangeringspunktens projektion på planet är given.* *X.*

1102) *Punkterna A och B ligga på var sin av en cirkulär cylinders generatriser. Plan genom punkterna A och B utskära ellipser på cylindern. Härled ekvationerna för den kurva, i vilken ortkurvan för ellipsernas toppar övergår, då cylinderytan utvecklas i ett plan.* *X.*

1103) *Vilket villkor måste konstanterna i funktionen*

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$$

uppfylla, för att någon rät linje skall kunna tangera funktionskurvan i två skilda punkter? Bestäm, om villkoret antages uppfyllt, vinkelkoefficienten för denna tangent.

Stig Comét.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1104) Lös ekvationen $\frac{b^2-c^2}{x-a}+\frac{c^2-a^2}{x-b}+\frac{a^2-b^2}{x-c}=0.$

Svar: $a+b+c$.

1105) Visa, att summan och produkten av de tre talen $\frac{y-x}{x+y}$, $\frac{vx-uy}{ux+vy}$ och $\frac{u-v}{u+v}$ ha samma värde.

1106) I ett parallelltrapets, vars yta är 6,25 cm², äro diagonalerna dragna. En av deltrianglarnas ytor är 1 cm². Bestäm de övrigas ytor.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1104—1106, 1110—1114 äro insända av *X.*, 1107, 1109 av *P.*, 1108 av *Stig Jonsson*, 1115 av *H. R.*

Svar: Antingen 1,5 cm², 1,5 cm² och 2,25 cm² eller 0,25 cm², 1 cm² och 4 cm².

1107) I triangeln ABC är vinkeln A rät. Vinkeln mellan medianen och bissektrisen mot hypotenusan $= v$. Visa, att $\operatorname{tg} v = (b - c) : (b + c)$.

1108) Man har $\cos x = (1 - a^2) : (1 + a^2)$. Sök värdet på $\operatorname{tg} \frac{5x}{2}$, då x är en vinkel, som uppfyller villkoret: $\frac{\pi}{2} > x > 0$ och $a > 0$.

Svar: $\frac{a^5 - 10a^3 + 5a}{5a^4 - 10a^2 + 1}$.

1109) Med ena ändpunkten M av en sträcka AM $(= 2a)$ som medelpunkt uppritas en cirkel, som skär AM i punkten B. En triangel har två hörn i A och B, dess tredje hörn rör sig utefter cirkeln. Bestäm cirkelns radie och triangelns sidor, när triangelns yta är så stor som möjligt.

Svar: Radien $= a$, sidorna $= a$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$.

1110) En kropp begränsas av en plan cirkelformig yta, en zon och en kalott; kalotten tangerar den plana ytan. Cirkel, zon och kalott ha alla lika ytor. Sök förhållandet mellan radierna i cirkeln och i de klotytor, av vilka zon och kalott utgöra delar.

Svar: Radierna äro lika stora.

1111) I ett koordinatsystem är en regelbunden sexhörning uppritad. Tre efter varandra följande hörn ha x-koordinaterna $+14$, $+3$ och -10. Beräkna sexhörningens sida.

Svar: 14 enheter.

1112) Punkten P ligger 12,5 cm från medelpunkten O i en cirkel med radien 6,4 cm. Tangenten till cirkeln i en punkt A skär linjen OP i B mellan O och P. Sök maximum för ytan av triangeln ABP, då A rör sig på cirkeln.

Svar: 8,64 cm².

1113) I en hyperbel med konjugataxeln $2b$ drages en diameter, vars mellan kurvgrenarna liggande del AA_1 synes under rät vinkel från en brännpunkt F. Bestäm ytan av triangeln AA_1F.

Svar: b^2.

1114) Normalen till en hyperbel i en parameterkordas ena ändpunkt skär axlarna i A och B. Mittpunkten av AB ligger på en asymptot. Beräkna excentriciteten.

Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{20}}$.

1115) Normalen till kurvan $y = \sin x$ i en maximipunkt P skär normalen i en punkt Q i N. Bestäm y-koordinaten för N, när Q obegränsat närmar sig P.

Svar: 0.

Lösn. till uppg. 1072—1074.

1072) *Två räta linjer samt en punkt P äro givna. Genom P drages en rörlig rät linje, som skär de förra i P_1 och P_2. Genom P_1 och P_2 dragas linjer med konstanta vinkelkoefficienter. Sök orten för deras skärningspunkt.* *B. Lindwall.*

Punkten P väljes till origo och riktningarna för linjerna genom P_1 och P_2 till x- resp. y-riktning. De givna räta linjerna antagas vara $y = k_1x + l_1$ och $y = k_2x + l_2$ samt den rörliga linjen $y = kx$. Koordinaterna bli härigenom för $P_1\left(\frac{l_1}{k - k_1};\ \frac{kl_1}{k - k_1}\right)$ och för $P_2\left(\frac{l_2}{k - k_2};\ \frac{kl_2}{k - k_2}\right)$. Orten får samma x-koordinat som P_2 och y-koordinat som P_1, dess ekvation är således $x = \frac{l_2}{k - k_2}$; $y = \frac{kl_1}{k - k_1}$. Kurvan har asymptoter för $k = k_1$ och $k = k_2$. Flyttas origo till deras skärningspunkt $x_0 = \frac{l_2}{k_1 - k_2}$; $y_0 = \frac{k_2 l_1}{k_2 - k_1}$ genom transformationen $x = \overline{x} + x_0$, $y = \overline{y} + y_0$, får man $\overline{x} = \frac{l_2}{k - k_2} - \frac{l_2}{k_1 - k_2} = \frac{l_2(k_1 - k)}{(k - k_2)(k_1 - k_2)}$, $\overline{y} = \frac{k\,l_1}{k - k_1} - \frac{k_2\,l_1}{k_2 - k_1} = \frac{l_1\,k_1(k_2 - k)}{(k - k_1)(k_2 - k_1)}$, varav $\overline{x}\,\overline{y} = -\frac{k_1\,l_1\,l_2}{(k_1 - k_2)^2}$. Orten är således en hyperbel.

S. L.

Även löst av *Lars Krogset.*

Anm.: Problemförfattarens lösning bygger på projektiv geometri.

1073) *En reguljär polyeder har h-sidiga hörn och s-sidiga plana sidoytor; det inskrivna klotets radie är r. Man borrar cylindriska hål med radien ϱ från alla sidoytorna in till polyederns centrum. Beräkna den urborrade volymen.* *X.*

En sidoytas mittpunkt M sammanbindes med en tillhörande kants ändpunkter A och B. Polyederns centrum C förenas med A, B och M. Till varje pyramid $ABCM$ kommer att höra en snett avskuren cylinderdel. En radius vektor l från M i planet ABM bildar vinkeln φ med normalen MD till $AB = 2a$. Är den ur pyramiden urborrade volymdelen $2V$, erhålles $dV = r\left(1 - \frac{l}{a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{s}\cos\varphi\right) l\,dl\,d\varphi$

och $V = r\int\limits_0^{\varrho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{s}}(1 - \frac{l}{a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{s}\cos\varphi)\,l\,dl\,d\varphi$, varför totala urborrningen ur pyr. *ABCM* blir $U = 2V = r\varrho^2\left(\frac{\pi}{s} - \frac{2\varrho}{3a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{s}\sin\frac{\pi}{s}\right)$. Sambandet mellan kantvinkeln (2α) och sidovinkeln $\left(\pi - \frac{2\pi}{s}\right)$ i ett reg. hörn ger $\sin\alpha\sin\frac{\pi}{s} = \cos\frac{\pi}{h}$, varav $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{h} : \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{h}}$. Av $a = MD\operatorname{tg}\frac{\pi}{s} = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{s}$ fås $U = \varrho^2\left(\frac{\pi r}{s} - \frac{2}{3}\varrho\sin\frac{\pi}{s}\frac{\cos\frac{\pi}{h}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{h}}}\right)$.

Om S är sidoytornas antal, blir alltså resultatet $s\,.\,S\,.\,U$, där $S = \frac{4}{s} : \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{h} - 1\right)$ till följd av sambandet $H + S - K = 2$ mellan H (hörntalet) och K (kantlinjetalet). För en kub med kanten $2a$ är $r = a$, $h = 3$, $s = 4$, $S = 6$, varför resultatet $2\varrho^2(3\pi a - 4\varrho\sqrt{2})$.

S. L.

Anm.: Problemförfattarens elementära lösning bygger på det i ex. 958 (septemberhäftet 1938) nådda resultatet.

1074) *En triangels om- och inskrivna cirklar äro uppritade. Visa, att om en triangel med två hörn på den yttre omskrives kring den inre cirkeln, även det tredje hörnet ligger på den yttre cirkeln.* *E. J.*

Lösning I:

O är den omskrivna, I den inskrivna cirkelns medelpunkt, AB en korda i O, som tangerar I, OD en mot AB vinkelrät radie, som skär AB i M och cirkeln O i D. DI utdrages till C på cirkeln O, och C förenas med A och B. Orten för medelpunkten till den i triangeln ABC inskrivna cirkeln, när A och B äro fasta och C rörlig, är en cirkel med centrum i D gående genom A och B. Det gäller att visa, att $DI = DB$. Enligt en känd sats (Elementa, 8, s. 56) är $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$. Enligt cos-teoremet är $\overline{OI}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DI}^2 - 2\cdot OD\cdot DI\cos\angle ODI = \overline{OD}^2 + \overline{DI}^2 - 2OD\,(MD + r)$. $\therefore\ \overline{DI}^2 = 2OD\cdot MD$. Enligt satsen om den rätvinkliga triangeln är $\overline{DB}^2 = 2OD\cdot MD$; $\therefore\ DI = DB$. *E. J.*

Lösning II:

Om den kring en triangel T_1 omskrivna cirkeln C_1 (radie $= R$) inverteras med den i T_1 inskrivna cirkeln C_2 (radie $= r$) som bas, erhålles en cirkel C_3 (niopunktscirkeln), som går genom mittpunkterna på sidorna i den triangel T_2, vars hörn utgöras av tangeringspunkterna mellan T_1 och C_2. Dess radie är följaktligen $= \frac{r}{2}$. Om vi kring C_2 omskriva en ny triangel T_3, som har två hörn (A och B) på C_1, så skall visas, att även det tredje ligger på C_1. Inverteras den kring T_3 omskrivna cirkeln C_4 med C_2 som bas, erhålles en cirkel C_5, vars radie på samma sätt som förut visas vara $= \frac{r}{2}$. Den har dessutom bildpunkterna till A och B gemensamma med C_3; C_5 och C_3 måste följaktligen sammanfalla. Därav följer, att C_1 och C_4 sammanfalla. Att det andra fallet, då medelpunkterna ligga symmetriskt omkring den gemensamma kordan, ej kan inträffa, inses omedelbart, när T_1 och T_3 ligga mycket nära varandra. Genom att sedan låta en hörnpunkt genomlöpa hela C_1 inser man, att satsen gäller för alla trianglar. *F. Ehrnst.*

Om lösningen till uppg. 1039.

Härmed vill jag framhålla, att om ordet »i» (uppg. 1039) skall tolkas som »inuti», så är den i »Elementa» 22, s. 258 givna lösningen ofullständig.

Låt segmentet stå på den vågräta basen AB. I den sökta triangeln DCE är $CD = CE$ och en del av AB samt likriktad med AB. F på höjden EF ligger på AB. Höjden mot AB måste vara minst så stor som den största höjd, som till ben ger AB, en observation, som endast har betydelse för segment större än halvcirkeln. Härav erhålles genast, att om segmentet är minst lika stort som det största segment, som till bas har den i tillhörande cirkel inskrivna kvadratens sida, så är den sökta triangeln rätvinklig och har AB till ben. För segment större än halvcirkeln med bas mellan den i cirkeln inskrivna kvadratens och liksidiga triangelns sida blir AB ben, och E ligger på cirkeln. Ty denna triangels E är den högsta skärningspunkten mellan cirkeln och en annan cirkel genom B med A som centrum, vilket i detta fall vill säga den högsta för de båda cirkelytorna gemensamma punkten. Då varje tänkbar cirkel omkring ett C som centrum genom ett D och ett E måste ligga innanför den sistnämnda cirkeln, kan följaktligen ingen punkt E, högre belägen än den förutnämnda triangelns E vara gemensam för en sådan cirkels rand och den ursprungliga cirkelns yta. För andra segment observerar man, att för höjder h mot AB större än den största höjd EF, som gör AB till ben, enligt perpendikelsatsen, AE är störst, om E ligger på segmentets båge, ej närmare A än B och på avståndet h från AB. AE synes nämligen i detta fall under mindre vinkel från cirkelns medelpunkt än AB. Man är således återförd till resonemanget i »Elementa» 22, 4, vilket likväl kan utföras kortare sålunda: Upptaga AB och AE de ej inom segmentet liggande periferivinklarna v och x, då har man, enär triangelytan är 0 i gränserna ($D = A$ och $D = B$), enligt sinusformeln att söka maximum för $\sin^2 x \sin(v - x)$, alltså för $2 \log \sin x + \log \sin(v - x)$, vilket ger villkoret $2 \cot x = \cot(v - x)$, alltså $AF : FB = 2 : 1$. Det finns således endast ett extremum, ett maximum, mot vilket triangelytan måste växa, då AF växer från 0 till $\frac{2}{3} AB$ eller avtar från AB till $\frac{2}{3} AB$. Då alltså $CD \leqq AB$, så sammanfaller CD med AB och ligger E på cirkeln även för segment större än halvcirkeln, vilkas bas högst är den i cirkeln inskrivna liksidiga triangelns sida och minst den i cirkeln inskrivna likbenta triangelns ben, vars vinkel vid spetsen är $\operatorname{arc\,cos} \frac{2}{3}$. För i förhållande till cirkeln mindre segment ligger C i A och E på cirkeln så, att $AF : FB = 2 : 1$, ty innan benet hinner växa till AB, har för sådana segment triangelytan kommit över maximet för ytan av en likbent triangel DAE med AD utefter AB och möjligen $> AB$ och E på segmentets båge.

Nils Juringius.

(forts. från sid. 128)

Demonstration av mätmetoder och tekniska anordningar å Radiofysiska institutionen ($^{26}/_{2}$); prof. A. Odencrants, Optiska lagar i mekanisk realisering och deras användning för flygkartläggning ($^{13}/_{3}$); lektor T. E. Aurén, Norrskenen och protuberanserna, med filmförevisning av protuberanser ($^{13}/_{2}$); amanuens A. Kåre, Den matematisk-naturvetenskapliga forskningen i 1600- och 1700-talets Sverige ($^{10}/_{4}$); fil. lic. N. Svartholm, Mesotonen och kärnkrafterna ($^{22}/_{4}$); fil. lic. N. Frössling, Värmeövergång och avdunstning i ett strömmande ($^{29}/_{5}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. E. Brunius.

Föredrag: prof. A. Hedvall, Göteborg, Olika slag av störningstillstånd i kristaller och deras kemiska inflytande ($^{16}/_{2}$); Dr F. Schlenk, Nikotinsyreamid-nukleosid; amanuens N. Löfgren, Lokalanästhesi och konstitution; R. B. Vowles, Univ. of North-Carolina, Thiamin-monophosphate; prof. H. v. Euler, Några försök med Jensen-Sarkom ($^{29}/_{3}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Fysiska Sällskapet, ordf. doc. Gunnar Kellström, v. ordf. doc. B. Edlén.

Föredrag: fil. dr Arne Sandström, Om dubbelkristallspektrografer ($^{24}/_{4}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. S. Brohult.

Föredrag: laborator T. Teorell, Om kolloid- och jonfördelning i diffussionssystem ($^{1}/_{3}$); fil. mag. B. Bäcklund, α-tert. butylsulfon-propionsyra och dess monobromderivat ($^{2}/_{4}$).

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars-april 1940.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen

$$\frac{(0{,}5\,x - 2)^2}{\frac{1}{2}(x + 2)} + \frac{(0{,}5\,x + 1)^2}{2 - 0{,}5\,x} = \frac{9}{2}.$$

2. I en likbent triangel är basen 45,49 cm och var och en av basvinklarna 62°,94. Basen förlänges med ett stycke av samma längd som en av triangelns båda lika stora sidor. Ändpunkten av förlängningen sammanbindes med triangelns spets. Hur lång är denna sammanbindningslinje?
3. För reparationer och nyanskaffning vid en idrottshall fonderas av inkomsterna en viss summa vid varje års slut. Fonden uppgick vid slutet av femte året till 5 310 kr, vilken summa då togs helt i anspråk för angivet ändamål. Utbetalning för nästa reparation och nyanskaffning beräknas inträffa efter ytterligare tio år. Hur stor summa står då till förfogande? Ränta på ränta beräknas efter 3 %.
4. Två kordor, *AB* och *DE*, i en cirkel skära varandra i *C* under rät vinkel. *AC* är 2 cm, *BC* 3 cm och *CD* 1 cm. Hur stor är cirkelns radie?
5. I en regelbunden femhörning dragas diagonalerna från ett hörn. Femhörningen delas därvid i tre trianglar. Bestäm förhållandet mellan ytorna av två närliggande trianglar.
6. Undersök medelst grafisk metod, för vilka värden på x funktionen $15 - 4x - 4x^2$ är positiv.
7. I en triangel *ABC* är $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm och $CA = 5$ cm. En cirkel tangerar sidorna *AB* och *BC* och har sin medelpunkt på sidan *CA*. Beräkna cirkelns radie.
8. Ett meteorfall iakttogs från två orter *A* och *B*, av vilka *B* ligger 25 km rakt söder om *A*. Från *A* syntes meteoren explodera rakt i öster, då dess höjdvinkel var 45°. I *B* var höjdvinkeln då 30°. Beräkna meteorens höjd över jordytan, då den exploderade. Jordytan kan anses vara plan.

Resultat: **1.** $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. **2.** 85,30 cm. **3.** 11 470 kr. **4.** $\sqrt{12{,}5} = 3{,}536$ cm. **5.** 1,618. **6.** $-2{,}5 < x < +1{,}5$. **7.** $\frac{\sqrt{63}}{4} = 1{,}984$ cm. **8.** $\sqrt{312{,}5} = 17{,}68$ km.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Lös ekvationen $\cos px + \cos (p-2)x = 2\cos x \cos (p+1)x$, där p är en konstant.
2. En regelbunden pyramid och en rätvinklig parallellepiped ha båda kvadratisk basyta. Parallellepipedens ena basyta går genom pyramidens spets, och den andra ligger i pyramidens basyta. Parallellepipedens sidokanter skära pyramidens sidokanter mitt itu. Hur stor del av pyramidens volym ligger inuti parallellepipeden?
3. Ett fartyg A gick med 20 knops fart i ostnordostlig riktning. Då man ombord på A siktade en hamn i sydostlig riktning på 15 sjömils avstånd, såg man ett fartyg B lämna densamma. Det senare fartyget hade en hastighet av 16 knop. Efter en halvtimmes förlopp, under vilken tid de båda fartygen närmat sig varandra, lågo de i rät linje med hamnen. Bestäm B:s kurs och dess avstånd till A vid det senare tillfället. 1 knop = 1 sjömil per timme.
4. En sfärisk sektor, som är mindre än en halvsfär, kan uppdelas i ett sfäriskt segment och en kon. Förhållandet mellan volymerna av dessa delar, tagna i nyss nämnd ordning, är $5:3$. Bestäm förhållandet mellan sektorns sfäriska och koniska ytor.
5. I en likbent triangel är förhållandet mellan sidan och basen $3:2$. En cirkel går genom basens ändpunkter och tangerar de andra sidorna. I vilket förhållande delar cirkeln den linje, som förenar basens ena ändpunkt med mittpunkten på höjden mot basen?
6. En fabriksanläggning, som togs i bruk vid årsskiftet 1914–1915, har åsamkat en fastighetsägare i grannskapet en årlig förlust, som uppskattas till 100 kronor. Samma förlust beräknas årligen under all framtid. Varje års förlust tänkes förlagd till årets slut. Efter ingången överenskommelse skall fabriken till fastighetsägaren på en gång vid årsskiftet 1939—1940 utbetala värdet av alla dessa förluster. Hur stort blir detta värde, om ränta på ränta beräknas efter p %? Undersök grafiskt, hur värdet ändras, då p antar värden från 3 till 6.
7. En triangel har ett hörn i punkten $(0; 6)$, ett i punkten $(6; 0)$ och det tredje på kurvan $3y = -x^3$. Undersök, med angivande av eventuella maxima och minima, hur triangelns yta varierar, då det rörliga hörnet beskriver kurvan.
8. Från en punkt P på en sida i en given kvadrat drages en linje L, som med den nämnda sidan bildar en vinkel $v < 45°$. Linjen

L skär den följande kvadratsidan i en punkt P_1, varifrån linjen L_1 drages vinkelrätt mot L; L_1 skär den därpå följande kvadratsidan i P_2, varifrån linjen L_2 drages vinkelrätt mot L_1; L_2 skär den därpå följande kvadratsidan i P_3. Samma konstruktion upprepas, varvid i ordning erhållas punkterna P_4, P_5, P_6 ... Bevisa, att dessa punkter obegränsat närma sig till hörnen i en kvadrat, som är oberoende av punkten P:s läge på den givna kvadratens omkrets men beroende av vinkeln v.

Resultat: **1.** $x_1 = n \cdot 90°$; $x_2 = \frac{n}{p} \cdot 180°$, där $p \neq 0$; (om $p = 0$, är x godtyckligt). **2.** Hälften. **3.** N 5°.41 V; 6.5 sjömil. **4.** $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155$. **5.** 1 : 2. **6.** Summan (S) i kronor $= \frac{10\,000}{p}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{25}$; av diagram framgår, att S har minim. för p något större än 4. (Beräkning — som emellertid ligger utom kursen i allm. matem. — ger $S_{\text{min}} = 6\,660$ kr för $p = 4\frac{1}{6}$). **7.** Då det rörliga hörnet (x; y) beskriver kurvan från $x = -\infty$ till $x = +\infty$, varierar triangelns yta på följ. sätt: ytan avtar från oändligt stort värde till ett absolut min. $= 0$ i $(-3;\ 9)$, växer till max. $= 20$ ytenheter i $\left(-1;\ +\frac{1}{3}\right)$, avtar till min. $= 16$ ytenheter i $\left(+1;\ \frac{1}{3}\right)$ och växer därefter obegränsat med x. **8.** Om A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 o. s. v. äro kvadratens hörnpunkter, a dess sida och $AP = b$, så erhålles: $A_1P_1 = a - b \operatorname{tg} v$; $A_2P_2 = a - (a - b \operatorname{tg} v) \operatorname{tg} v = a - a \operatorname{tg} v + b \operatorname{tg}^2 v$; $A_3P_3 = a - a \operatorname{tg} v + a \cdot \operatorname{tg}^2 v - b \cdot \operatorname{tg}^3 v$ o. s. v. Den sista termen har gränsvärdet noll; A_nP_n närmar sig värdet $\frac{a}{1 + \operatorname{tg} v}$ och P_nP_{n+1} värdet $\frac{a}{\sin v + \cos v}$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Från den ena ändpunkten av en parameter i en ellips drages diametern. Dennas konjugatdiameter delar parametern i förhållandet 7 : 8. Beräkna ellipsens excentricitet.
2. Punkten A är belägen på axeln till parabeln $y^2 = 2px$. En ljusstråle utgår från A vinkelrätt mot axeln och reflekteras mot parabeln. Den reflekterade strålen eller dess förlängning råkar axeln i en punkt B, som ligger på avståndet $4p$ från A. Bestäm de punkter A, som uppfylla dessa villkor.

3. Bestäm den konstanta koefficienten a i ekvationen $\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$, så att ekvationen för alla x-värden satisfieras av $y = \sin x$. Bevisa, att ekvationen för detta värde på a satisfieras även av $y = \cos x$.
4. I en given cirkel med medelpunkten O dragas två radier OA och OB. Hur skola de dragas, för att den i triangeln AOB inskrivna cirkeln skall bli så stor som möjligt?
5. Två konjugathyperbler och en med dem koncentrisk cirkel äro uppritade. Var och en av de cirkelbågar, som den ena hyperbeln avskär på cirkeln, har en medelpunktsvinkel av 90°. Motsvarande medelpunktsvinklar för den andra hyperbeln äro 60° och 120°. Bestäm vinkeln mellan hyperblernas asymptoter.
6. Konstruera kurvan $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. Angiv speciellt eventuella maxima och minima.
7. En ellips, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, är inskriven i den triangel, som begränsas av koordinataxlarna och linjen $3x + 2y = 6$. Sök och konstruera orten för ellipsens medelpunkt.

Resultat: **1.** 0,25. **2.** Punkterna $(p;\ 0)$ och $\left(\frac{p}{3};\ 0\right)$. **3.** $a = 1$. **4.** Om $OA = OB = r$, blir den inskrivna cirkelns radie störst, då $AB = r(\sqrt{5} - 1)$ (d. v. s. då AB är dubbelt så stor som sidan i den i den givna cirkeln inskrivna regelbundna tiohörningen); vinkeln AOB är då 76°,34. **5.** Om cirkelns radie $= r$, bli skärningspunkterna (i första kvadr.) med resp. hyperbler $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2};\ \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$ och $\left(\frac{r\sqrt{3}}{2};\ \frac{r}{2}\right)$. Insättning i hyperblernas ekv. ger omedelbart förhållandet mellan halvaxlarna $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ och den spetsiga vinkeln mellan asymptoterna $= 75°,52$. **6.** Kurvan har slutpunkter i $(-1;\ -1)$ och $(+1;\ +1)$, skär x-axeln i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ och y-axeln i $(0;\ +1)$ och har ett max. i $\left(+\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right)$. Kurvan (som är en halv ellips) kan konstrueras så, att man ritar linjen $y = x$ och halvcirkeln $y = \sqrt{1 - x^2}$ och adderar y-värdena punkt för punkt. **7.** Orten för de inskrivna ellipsernas medelpunkt är den mellan punkterna $(0;\ \frac{3}{2})$ och $(1;\ 0)$ belägna delen av kurvan $y = \frac{3(x-1)}{x-2}$. Kurvan är en liksidig hyperbel och representerar i sin helhet orten för de in- och vidskrivna ellipserna.

Uppgifter i fysik.

1. För att bestämma natriums täthet (spec. vikt) utförde man vid ett tillfälle följande försök. En bägare med bensin tarerades på en balansvåg. Ett natriumstycke, som vägde 2,35 g, upphängdes i ett stativ och placerades på sådant sätt, att natriumstycket doppade ned i bensinen. Vågskålen med bägaren sjönk då först, men jämvikten återställdes genom att vikter placerades på den andra vågskålen. När dessa uppgingo till 1,70 g, hade balansen samma jämviktsläge som från början, och natriumstycket var då helt nedsänkt i vätskan. Försöket upprepades med ett aluminiumstycke, som vägde 7,83 g. I detta fall måste vikterna på andra vågskålen ökas till 2,04 g. Tätheten för aluminimum är 2,69 g/cm^3. Hur stor täthet har natrium?
2. En kätting, som väger 1,2 kg per meter, är delvis upplindad på en horisontell vals. Dess ena ända är fästad vid valsen, dess andra hänger fritt ned och befinner sig från början 5,5 m lägre än valsens axel. Sedan valsen vridits runt 10 hela varv, ligger fria ändan 0,7 m under axelns nivå. Om nu valsen släppes, sätter sig hela systemet (valsen och kättingen) i rörelse. Huru stor rörelseenergi har systemet, då 5 varv av kättingen lindats av? Varven antagas lika stora, och friktionen lämnas utan avseende.
3. Ett luftskepp, vars volym är 20 000 m^3 och totala yttre yta 6 000 m^2, håller sig nätt och jämnt svävande i ett luftlager, varest temperaturen är —13° C och trycket 720 mm. Vid jordytan är temperaturen 0°C, lufttrycket 760 mm och luftens täthet 1,29 kg/m^3. Det avsätter sig rimfrost på luftskeppet. Huru tung måste rimfrostbeläggningen i genomsnitt per m^2 bliva, för att luftskeppet skall sjunka till marken till följd av den ökade belastningen? Man bortser från de olikheter, som kunna finnas i avseende på luftens sammansättning, luftskeppets volym och luftskeppets yta i de båda luftlagren.
4. Vid den första genomgången av ögats optik använder man stundom såsom en primitiv modell av ögat en tunnväggig glaskolv, fylld med vatten, vilket gjorts fluorescerande genom tillsats av några droppar fluoresceinlösning. Vid ett sådant försök användes en kolv, vars nedre del var sfärisk med 10,0 cm diameter. Omedelbart framför kolven kunde man sätta en tunn lins i sådan ställning, att dess optiska huvudaxel gick genom kolvens medelpunkt. Man ville välja linsen så, att ett parallellt strålknippe, som fick infalla utmed huvudaxeln, skulle sammanbrytas till en punkt på bakre kolvväggen. Angiv linsens brännvidd till storlek och tecken.

5. Mellan två plana, parallella glasplattor är ett luftskikt inneslutet. Om vitt ljus från en lampa får infalla vinkelrätt mot glasplattan och det reflekterade ljuset analyseras med ett spektroskop, ser man i spektrum ett antal oskarpa mörka linjer. Dessa uppkomma genom interferens mellan de strålar, som reflekteras mot luftskiktets båda begränsningsytor. Huru många sådana mörka linjer ser man i spektrum? Det infallande ljuset innehåller alla våglängder mellan 7 500 och 4 000 ångström. Luftskiktets tjocklek är 65 000 ångström.

6. För att bestämma inre motståndet i ett torrelement anslöt man till dess poler en voltmeter med mycket högt motstånd. Voltmetern visade då 1,45 V. Därpå inkopplades mellan elementets poler jämväl ett motstånd på 10 ohm. Voltmetern visade nu 1,15 V. Beräkna det inre motståndet i elementet.

7. En rulltrappas längd är 48,0 m, och trappstegens rörelseriktning snett uppåt bildar vinkeln 21°,4 med horisontalplanet. Färdtiden med trappan är 2 min 6 sek. Trafiken tänkes ordnad på så sätt, att en person stiger på det lägsta trappsteget samtidigt som en annan person stiger av det trappsteg, som då nått högsta läget. Antalet trafikanter antages ständigt vara 96 med en genomsnittsvikt av 78 kg per person. Trappan drives av en elektrisk motor med verkningsgraden 80 %. Av motorns utvecklade effekt utnyttjas 64 % för trafikanternas uppforsling, och av återstoden alstras friktionsvärme. Huru mycket kostar den elektriska driften per timme, då 1 kWh kostar 15 öre? Ändringarna i trafikanternas rörelseenergi vid på- och avstigandet kunna lämnas ur räkningen.

8. Polonium är ett radioaktivt ämne, som utsänder α-strålning. Då α-partiklarna rusa genom luften, jonisera de denna och bromsas upp. Strålningens räckvidd i luft är tjockleken av det luftskikt, den förmår genomtränga utan att förlora jonisationsförmågan. Placeras ett aluminiumblad över ett poloniumpreparat, tränger α-strålningen igenom, om bladet är tillräckligt tunt. Men vid passagen bromsas partiklarna, så att det luftskikt, som joniseras, minskas med en sträcka, som är proportionell med bladets tjocklek. Vid en bestämning av räckvidden i luft för poloniums α-strålning begagnades en elektrometer, vars botten utgjordes av ett aluminiumblad. Dettas vikt per ytenhet hade bestämts till 0,94 mg/cm². Elektrometern laddades. Då ett poloniumpreparat placerades tätt under bottnen, joniserades luften i elektrometern, så att dennas blad föllo samman. Sänktes sedan preparatet, kom man till ett bestämt läge, för vilket joniseringen i elektrometern upphörde. Avståndet från elektro-

meterns botten till preparatet var då 31,8 mm. Därefter upprepades samma experiment, sedan man över preparatet lagt ett rektangulärt aluminiumblad med kanterna 3,00 och 3,30 cm och vikten 20,4 mg. Det största avstånd mellan elektrometerns botten och preparatet, vid vilket luften i elektrometern joniserades, var nu 17,9 mm. Huru stor är räckvidden i luft vid rådande temperatur och tryck? Strålningen antages passera aluminiumbladen vinkelrätt.

Resultat: **1.** 0,97 g/cm^3. **2.** 2,4 m (= 2,4 · 1,2 kg) kätting har löpt ut, och dess tyngdpunkt har sänkts (0,7 + 1,2) m. Rörelseenergien är alltså 1,9 · 2,4 · 1,2 = 5,47 kgm. **3.** 23 g/m^2. **4.** + 15 cm. **5.** På grund av olikhet vid reflexion mot ett tätare och ett tunnare medium uppkommer en fasdifferens på en halv våglängd. Vägen mellan plattorna (s = 2 · 65 000 Å. E.) måste därför utgöra ett helt antal våglängder. Man finner s : 7 500 = 17,3 och s : 4 000 = 32,5. Mellan 17,3 och 32,5 ligga de hela talen 18 t. o. m. 32. Alltså erhållas 15 mörka linjer. **6.** 2,61 ohm. **7.** 2 kr. 97 öre. **8.** Al-bladet, som väger $\frac{20.4}{3 \cdot 3{,}3}$ mg/cm^2, bromsar strålningen lika mycket som ett 13,9 mm tjockt luftskikt. Ur likheten $\frac{x}{13{,}9} = \frac{0{,}94 \cdot 3 \cdot 3{,}3}{20{,}4}$ erhålles elektrometerbottnens bromsningsförmåga $x = 6{,}3$. Räckvidden i luft är 6,3 + 31,8 = 38,1 mm.

Realexamen V. T. 1940.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $2(1-x)^2 + 3(1+x)^2 - 5(x+1)(x-1) = 12$.
2. Av sitt kapital, 10 500 kr, placerar en person 4 800 kr i 4 % obligationer till 96 % kurs och resten i aktier, som han inköper för 190 kr per styck. På varje aktie erhålles en årlig utdelning av 12 kr. Hur stor årlig inkomst har personen av sitt på detta sätt placerade kapital?
3. En affärsman har köpt ett parti tyg för 576 kr. Ena hälften säljer han med 25 % vinst. Andra hälften säljer han för 336 kr och förtjänar därvid 2 kr per meter. Beräkna, dels hur mycket affärsmannen gav per meter i inköp, dels hur mycket han förtjänar på försäljningen av hela partiet.
4. I en cirkelsektor *ABC* inskrives en cirkel, så att den tangerar sektorns båge *BC* och de båda radierna *AB* och *AC*. Den inskrivna cirkeln, vars radie är 2 cm, har sin medelpunkt i *O*; *OA* är 4 cm. Beräkna sektorns yta. $\pi = 3{,}14$.

5. Ett tomtområde har formen av ett parallelltrapets, i vilket de båda parallella sidorna gå vinkelrätt mot en av de övriga. På en karta i skalan 1 : 4 000 äro de parallella sidorna 1 cm och 2 cm och den större av de övriga sidorna 3 cm. Vad är tomtområdet värt efter ett pris av 2,25 kr per m²?
6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3(2x - \frac{1}{6}y) + 4(\frac{5}{3}x + 3y) = 61, \\ \dfrac{\frac{3}{2}(x-2) - 3y}{3x-2} - \dfrac{\frac{2}{3}x - 5(y+3)}{6x-4} = 1. \end{cases}$$

7. En båt avgick kl 8.00 från en stad A, som är belägen vid en flods mynning, och gick uppför floden till ett industrisamhälle B, dit den anlände kl 10.20. Kl 11.00 lämnade fartyget B och återvände till A kl 13.00. Kl 14.00 skall båten åter lämna A för att göra en tur till ett fiskeläge C, beläget vid kusten på 19,5 km avstånd från A. När kan man vänta båten till C? Båten antages gå för full maskin utan mellanlandning under var och en av dessa tre turer. Vattnet vid kusten antages vara i vila. Vattnet i floden antages flyta med en hastighet av 10 m/min.
8. Den buktiga ytan av en kon är $33\frac{1}{3}$ % större än bottenytan. Konens hela yta är 66 dm². Beräkna dess volym. $\pi = 3\frac{1}{7}$.

Resultat: 1. $x = 1$. 2. 560 kr. 3. 12 kr/m; 120 kr. 4. 18,84 cm². 5. 15 270 kr. 6. $x = 3$; $y = 2$. 7. Kl 16.30. 8. $\frac{66\sqrt{7}}{7} = 24{,}9$ dm³.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En 3 m lång planka med rektangulärt tvärsnitt 5 cm × 25 cm ligger vinkelrätt mot kanten av en kaj, och ett stycke av plankan når utanför kajkanten. Hur långt får detta överskjutande stycke högst vara, för att en gosse, som väger 32 kg, skall kunna gå längst ut på plankan utan att denna tippar över? Specifika vikten för plankan är 0,6.
2. Ett godståg kör med hastigheten 30 km/tim uppför en backe, vars stigning är 1 : 40. Av någon anledning brister plötsligt kopplet mellan två vagnar, så att ett par av de sista vagnarna skiljas från tåget. Hur långt fortsätta dessa vagnar att röra sig uppför backen, innan de börja rulla utför igen? Friktions- och luftmotstånd antagas för varje vagn uppgå till 0,8 % av vagnens tyngd. Tyngdkraftens acceleration = 9,8 m/sek².
3. Hur många mm regn av + 8° C måste falla på en isbelagd sjö för att smälta 1 mm is av 0° C? Isens specifika vikt = 0,9 och dess smältvärme = 80.

4. En öppen glaskolv, rymmande 1,14 dm^3, vägdes i ett rum, där temperaturen var + 23° C och barometerståndet 740 mm Hg. Vid nämnda temperatur och tryck väger 1 dm^3 luft 1,16 g. Kolven ökade i vikt 0,71 g, då luften utdrevs med koldioxid, som fyllde hela kolven. Beräkna härav vikten av 1 dm^3 koldioxid av 0° C och 760 mm tryck.
5. Då spänningen på en 25 W glödlampa, avsedd för 220 V, var 1,1 V, blev strömstyrkan 5,5 mA. Hur många gånger större är lampans motstånd vid full belastning än vid nämnda låga belastning?
6. Man har två lika element, vartdera med E.M.K. 1,2 V. För att bestämma inre motståndet hos vartdera elementet seriekopplar man först elementen och sluter det så erhållna batteriets poler med en ampèremeter och ett i serie därmed kopplat motstånd. Ampèremetern visar då 1,6 A. Därefter parallellkopplar man elementen och sluter ånyo strömkretsen med samma ampèremeter och samma motstånd som förut. Ampèremetern visar denna gång 1,0 A. Beräkna härav inre motståndet hos vartdera elementet.
7. En verkstad tar elektrisk energi från en kraftstation, som ligger 500 m från verkstaden. Strömmen överföres genom en tvåpolig kopparledning med 25 mm^2 area. I verkstaden önskas 220 V nätspänning, dels för belysningen, som alstras av 50 st 220 V lampor, vardera på 40 W, dels för motordriften, vartill åtgå 25,5 A, då motorerna äro fullt belastade. Beräkna den polspänning generatorn måste ha, då samtliga lampor äro tända och motorerna ha full belastning. Koppars specifika ledningsmotstånd är 0,0175.
8. En elektrisk spårvagn framdrives på horisontell bana med en jämn hastighet av 30 km/tim. Motorn arbetar med 600 V spänning och drager en ström av styrkan 8,5 A. Av den elektriska energi, som tillföres motorn, användes 80 % för vagnens framdrivande. Hur stora äro tillsammans luft- och friktionsmotstånden mot vagnens rörelse? 1 kW = 102 kgm/sek.

Resultat: 1. 6,2 dm. 2. 107 m. 3. 9 mm. 4. 1,99 g. 5. 9,7 gånger 6. 0,2 ohm. 7. 244 volt. 8. 49,9 kgf.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Vid ett dragprov användes en provstång med 14 mm diameter. Belastningen vid proportionalitetsgränsen var 3000 kg och vid brottgränsen 5950 kg. Förlängningen vid proportionalitetsgränsen var 0,093 mm på 100 mm ursprunglig mätlängd. Beräkna

materialets elasticitetsmodul samt proportionalitetsgräns och brottgräns i kg/cm^2!

2. Hjulen till en kuggväxel med utväxlingsförhållandet 2 : 3 skola fräsas med modulfräs. Det mindre hjulet skall hava 30 kuggar, och centrumavståndet mellan axlarna skall vara 150 mm. Till vilken diameter skall man svarva de båda hjulen? Beräkna modulen och fräsdjupet!
3. Spindeln till en domkraft har en enkelskuren plattgänga med ytterdiametern 60 mm och stigningen 10 mm. Mutterhöjden är 95 mm. Hur stor blir skjuvpåkänningen i skruvens gängor, då en last av 15 ton lyftes? Hur stor blir tryckpåkänningen i skruven?
4. Lintrumman i en hiss har 500 mm diameter. Den drives av en elmotor, som gör 1000 varv per minut, över en snäckväxel och en kuggväxel med utväxlingsförhållandena 1 : 25 respektive 1 : 5.
   a) Sök lyfthastigheten!
   b) Hur stor effekt utvecklar motorn, då en last av 3 ton lyftes? Hissens totala verkningsgrad är 60 %.
5. Klargör begreppen aktion och reaktion vid turbiner! Beskriv en vattenturbin av aktionstyp!
6. Totala åkmotståndet vid framdrivning av en bil på horisontell väg var 48 kg vid en hastighet av 50 km i timmen. Bensinförbrukningen var då 1,3 liter per mil. Hur stor var totala verkningsgraden? Bensinens specifika vikt var 0,73 och dess värmevärde 10400 kcal/kg.
7. Redogör för metoder att värme- och ljudisolera väggar och bjälklag i ett trähus! Förtydliga redogörelsen med skisser!
8. I ett bjälklag med en fri spännvidd av 6 m och ett centrumavstånd mellan bjälkarna av 60 cm skall användas $6'' \times 10''$ bjälkar. Hur stor blir största böjpåkänningen vid en belastning av 400 kg per m^2?
9. I en källare skall anordnas skyddsrum, varför bjälklaget måste förstärkas med järnbalkar, upplagda på 1,8 m avstånd från varandra och med en fri spännvidd av 4,6 m. Förstärkningarna beräknas vid husets instörtande få upptaga en jämnt fördelad last av 1 ton/m^2. Vilken balkprofil bör användas, om tillåten påkänning sättes till 1450 kg/cm^2?

Resultat: 1. Elasticitetsmodul 2 100 000 kg/cm^2, proportionalitetsgräns 1950 kg/cm^2, brottgräns 3870 kg/cm^2. 2. Yttre hjuldiametrar 128 och 188 mm, modul 4 mm, fräsdjup 8,7 mm. 3. Skjuvpåkänningen 201 kg/cm^2, tryckpåkänningen 764 kg/cm^2. 4. Lyfthastigheten 0,21 m/sek, effekten 14,0 hk. 6. 0,114. 8. 66 kg/cm^2. 9. Erforderligt motståndsmoment 328 cm^3, INP 24 eller hellre DIP 16.

Något om matrisräkning.

Av STIG COMÉT.

1. I mitten av förra århundradet infördes matrisbegreppet i matematiken genom CAYLEY, räkneregler uppställdes och teorien fullbordades i många avseenden, väsentligen av FROBENIUS och WEIERSTRASS. Matriserna användes då huvudsakligen vid studiet av kvadratiska och bilineära former (t. ex. kägelsnitt). Från år 1925 har matriskalkylen fått ett nytt användningsområde: detta år framkom nämligen den HEISENBERG-BORN-JORDAN-ska kvantummekaniken, vars lämpligaste matematiska redskap visade sig vara just matriskalkyl. Sedan dess, och ännu mera sedan DIRAC ytterligare fördjupat teorien, har matriskalkylen varit stadd i en livlig utveckling.

Här skall endast givas en i möjligaste mån enkel översikt över grunderna för matrisräkning — utan anspråk på fullständighet, vare sig det gäller sakinnehållet eller de meddelade bevisen. Uppsatsen vill endast vara en första orientering inom området. För den, som mera på allvar önskar stifta bekantskap med matriser, meddelas här ett litteraturval:

H. BOHR-J. MOLLERUP, Lærebog i matematisk Analyse. Anden omarbejdede Udgave ved *A. F. Andersen-R. Petersen.* I. Lineær Algebra. København 1938. 148 s. Utmärkt, elementär bok.[1]

M. BÔCHER, Einführung in die höhere Algebra (deutsch von *H. Beck*). 2. Aufl., Teubner 1932. 340 s. Innehåller även annat än matriser.

P. MUTH, Theorie und Anwendung der Elementartheiler. Leipzig 1899.

C. C. MAC DUFFEE, The Theory of Matrices. Springer 1933. 110 s.

B. L. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra. I, II. Springer. 266 + 212 s. Innehåller även mycket annat.

—, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Springer. 157 s.

Särskilt i de nämnda arbetena av MUTH och MAC DUFFEE finnas talrika litteraturhänvisningar. Historik och en troligen fullständig litteraturförteckning fram till år 1928 återfinnes i ett arbete av

---

[1] Rec. i denna tidskrift, sept. 1939, s. 184.

W. E. Roth, A solution of the matric equation $P(\mathrm{X}) = \mathrm{A}$. (Transactions of the American Mathematical Society, **30**, 1928, pp. 579—596).

Determinantteori finnes, utom i ovannämnda arbeten av Bohr-Mollerup och Bôcher, i t. ex. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909. 544 s.

2. För matristeorien måste ett visst *talsystem* läggas till grund. Vi överenskomma att med *tal* (i denna uppsats) mena *komplext tal* (alltså reellt eller ej). Det må endast nämnas, att det för vissa ändamål kan vara nödvändigt att använda andra talbegrepp, såsom »heltal», »hyperkomplexa tal» o. a. Härpå skola vi emellertid ej ingå. — Omedelbart förbundna med talbegreppet äro de lagar, enligt vilka man kan räkna med talen. Elementär algebra kan sägas vara en sammanfattning av dessa räkneregler för det talsystem, vi valt.

Bland storheter,[1] som kunna bli föremål för matematisk behandling, finnas sådana, för vilkas igenkännande det räcker att ange ett enda tal (t. ex. skalära storheter; vektorer, bundna till en given rät linje, resp. bundna till »det komplexa talplanet»). Å andra sidan finns det storheter, för vilka ett enda tal ej räcker, då man vill ange storheten (t. ex. en vektor i rymden; spektrum av en atom). Antag, att ett visst slag av storheter kräva angivandet av n st. tal. Om dessa tal, storhetens *element* eller *komponenter*, äro x_1; $x_2, \ldots, x_n$, beteckna vi storheten själv med $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eller kortare (x_j) eller $\mathbf{x}$. Det ifrågavarande slaget av storheter kallas *vektorer av n dimensioner*, om vissa räkneregler låta sig tillämpa på dem. De för oss viktigaste reglerna äro:

Regel om likhet: Två vektorer, $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, sägas vara lika, om $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$, och endast i detta fall. Detta tecknas $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Häri ligger en viktig överenskommelse om ordningsföljden mellan vektorns element. Sålunda äro vektorerna (5, 6, 7) och (5, 7, 6) icke att betrakta som lika.

Addition: Summan av två vektorer, $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, är den vektor, vars element äro summorna av motsvarande element av $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, alltså $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Tecknas $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Sålunda är $(5, 6, 7) + (4, -3, 0) = (9, 3, 7)$.

För addition gäller tydligen den kommutativa lagen: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, liksom den associativa: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, emedan dessa lagar gälla för storheternas element.

---

[1] Ordet »storhet» bör tagas i vidsträckt bemärkelse — betyder alltså ej nödvändigt »något, som har en viss storlek», utan allmänt »något, som skall behandlas matematiskt».

Multiplikation med talfaktor: En vektor, $\mathbf{x}$, multipliceras med ett tal, a, genom att dess element multipliceras med a. Tecknas $a\mathbf{x}$, resp. $\mathbf{x}a$.

Omedelbart inses:

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} &= \mathbf{x}a, \\ (ab)\mathbf{x} &= a(b\mathbf{x}), \\ (a+b)\mathbf{x} &= a\mathbf{x} + b\mathbf{x}, \\ a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= a\mathbf{x} + a\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Specialfallet $a = -1$ ger: $-(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Härigenom behöver ej subtraktion särskilt definieras. Vektorn $(0, 0, \ldots, 0)$ kallas *nollvektor* och betecknas ofta helt enkelt med 0; den har egenskapen $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$.

Reglerna för multiplikation av två vektorer ha vi ej här någon användning för. Det må blott framhållas, att definitionen på produkten av två storheter i själva verket är det, som ger en bestämd karaktär åt hela den för sådana storheter gällande algebran. Vi komma att lägga märke därtill vid behandlingen av matriser.

3. En *matris* är en storhet, vars element man (för överskådlighetens skull vid produktbildningen) uppskriver i ett rektangulärt schema, ordnade i vågräta och lodräta rader, kallade *rader* resp. *kolonner*. Mest praktiskt är att förse elementen med dubbla indices, av vilka det första anger den rad, det andra den kolonn, i vilken elementet står. En matris med m st. rader och n st. kolonner kallas en *mn-matris* och kan alltså tecknas

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Ibland användes det kortare skrivsättet (a_{jk}), där $j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Matrisen som helhet betecknas med en bokstav av avvikande tryck, t. ex. $\mathbf{A}$.

Vi överenskomma att, om så visar sig nödvändigt för tillämpningen av någon regel, tillfoga nollor till höger om den sista kolonnen, resp. under den sista raden av matrisen, utan att denna skall anses ha undergått någon förändring. Sålunda kan man alltid åstadkomma, att en matris får samma radantal som kolonnantal. I så fall kallas matrisen *kvadratisk*. Om ej annat säges, förutsätta vi i det följande alla matriser vara kvadratiska.

Beträffande reglerna för likhet, för addition av matriser och för multiplikation av en matris med ett tal gäller vad som anförts i mom. 2, alltså:

$(a_{jk}) = (b_{jk})$, om och endast om $a_{jk} = b_{jk}$ för varje indexpar;
$(a_{jk}) + (b_{jk}) = (a_{jk} + b_{jk})$;
$x(a_{jk}) = (x a_{jk})$.

I analogi med dessa lagar göra vi följande överenskommelse: Antag, att matriselementen i **A** äro funktioner av en variabel, t (eventuellt flera variabler). Den matris, vars element äro derivatorna med avseende på t av motsvarande element i **A**, kalla vi derivatan av **A** med avseende på t. Den betecknas $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ eller $\frac{d}{dt}(a_{jk})$ eller kortare t. ex. $\dot{\mathbf{A}}$. Vi ha alltså

$$\frac{d}{dt}(a_{jk}) = \left(\frac{da_{jk}}{dt}\right).$$

För produkten av två matriser har man av flera skäl stannat vid följande definition. Som redan nämnts är det denna, som åt matriserna giver deras särskilda egenskaper.

Multiplikation av två matriser: Låt $\mathbf{A} = (a_{jk})$ vara en mn-matris och $\mathbf{B} = (b_{jk})$ en np-matris. Om man för varje indexpar j, k ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, p$) uträknar

$$a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \ldots + a_{jn} b_{nk} = c_{jk},$$

så bilda talen c_{jk} en mp-matris, $\mathbf{C} = (c_{jk})$, som säges vara produkten av **A** och **B** i nu nämnd ordning. Tecknas $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ eller $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Vid det praktiska uträknandet av **AB** följer man alltså följande regel: Det av produktmatrisens element, som skall stå i j-te raden och k-te kolonnen, erhålles, om elementen i j-te *raden* av **A** *i tur och ordning* multipliceras med elementen i k-te *kolonnen* av **B**, varefter de erhållna produkterna adderas.

Vi belysa regeln genom att multiplicera två 2-radiga matriser:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz; & ay + bu \\ cx + dz; & cy + du \end{pmatrix}.$$

Läsaren torde själv utföra multiplikation av två 3-radiga matriser och kontrollera riktigheten av följande sifferexempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 0 & 12 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Av definitionen framgår, att matrismultiplikation i allmänhet ej är kommutativ, d. v. s. **AB** är i allmänhet icke $= \mathbf{BA}$. Dock finnas fall, då $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$; på villkoren härför skola vi ej ingå, men exempel framkomma i fortsättningen.

Stundom har man anledning att jämte en given matris, $\mathbf{A}$, betrakta den matris, $\tilde{\mathbf{A}}$, som uppstår, om man skriver raderna i $\mathbf{A}$ såsom kolonner i $\tilde{\mathbf{A}}$ och vice versa. Matrisen $\tilde{\mathbf{A}}$ kallas den *transponerade* matrisen till $\mathbf{A}$. Läsaren kan själv övertyga sig om riktigheten av följande: Om $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, så är $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$.

Läsaren kan även lätt själv visa (t. ex. för 3-radiga matriser), att matrismultiplikation är associativ och distributiv, d. v. s. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ och $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. De algebraiska lagar, som följa härav, få alltså användas vid räkning med matriser. Sådana lagar däremot, som även fordra kommutativitet, få naturligtvis i regel ej användas, vilket tarvar en viss uppmärksamhet. Två enkla exempel härpå: Man har $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{AC} + \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{BD}$, vari faktorernas ordningsföljd ej har omkastats. Vidare har man $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$, vilket i allmänhet *ej* får skrivas $= \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$; det senare är tillåtet, endast om $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, d. v. s. om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ äro kommutativa med varandra.

Nyss användes beteckningen $\mathbf{A}^2$ för $\mathbf{AA}$. Eftersom matrismultiplikation är associativ, kan man införa begreppet *dignitet* av en matris. Ty $(\mathbf{AA})\mathbf{A}$ är ju $= \mathbf{A}(\mathbf{AA})$ eller $\mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{AA}^2$, vilket alltså kan tecknas $= \mathbf{A}^3$. Vidare $[(\mathbf{AA})\mathbf{A}]\mathbf{A} = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) = \mathbf{A}[\mathbf{A}(\mathbf{AA})]$ eller kortare $\mathbf{A}^3\mathbf{A} = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}^3$, vilket alltså kan tecknas $= \mathbf{A}^4$. På detta sätt kan successivt $\mathbf{A}^p$, där $p =$ positivt heltal, definieras. För dessa digniteter gäller den vanliga lagen: $\mathbf{A}^p\,\mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q}$. Vidare se vi, att två digniteter av en och samma matris alltid äro kommutativa med varandra.

Låt $\mathbf{A}$ vara en godtycklig, n-radig matris och vidare $\mathbf{E} = (e_{jk})$ en n-radig matris, vars element äro: $e_{jj} = 1$; $e_{jk} = 0$ för $j \neq k$. Direkt uträkning visar, att $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$. Matrisen $\mathbf{E}$ har alltså vid matrismultiplikation samma egenskap som faktorn 1 vid multiplikation av tal och kallas därför *enhetsmatris*. Den är kommutativ med alla kvadratiska matriser av samma radantal. Exempel: Den 3-radiga enhetsmatrisens utseende är

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ofta har man anledning att bilda polynom av en matris och menar då vanligen sådana, där koefficienterna äro *tal*. Ett sådant polynom:

$$c_0\mathbf{A}^p + c_1\mathbf{A}^{p-1} + \ldots + c_{p-1}\mathbf{A} + c_p\mathbf{E}$$

kan tänkas erhållet ur ett vanligt polynom av en talstorhet x:

$$c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \dots + c_{p-1} x + c_p = f(x),$$

därigenom att talet x ersättes med matrisen **A**, varjämte den av x oberoende termen c_p ersättes med matrisen c_p**E**. Man kan ju i viss mån tolka **E** såsom $\mathbf{A}^0$. Ovanstående polynom i **A** tecknas lämpligen $f(\mathbf{A})$ och utgör i sin tur en matris. Två polynom av samma matris äro tydligen kommutativa med varandra, ty digniteter (samt **E**) äro kommutativa.

Faktoruppdelning av ett matrispolynom $f(\mathbf{A})$ kan utföras, om faktorerna till motsvarande talpolynom $f(x)$ äro kända. Ty om

$$f(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \dots (a_p x + b_p),$$

så är (digniteter av **A** äro kommutativa med varandra och med **E**)

$$f(\mathbf{A}) = (a_1 \mathbf{A} + b_1 \mathbf{E})(a_2 \mathbf{A} + b_2 \mathbf{E}) \dots (a_p \mathbf{A} + b_p \mathbf{E}).$$

Varje faktor av $f(\mathbf{A})$ är som synes en matris.

En viktig omständighet, som måste hållas i minnet, är att en produkt av två matriser (eller flera) kan vara $= 0$ (d. v. s. $=$ en matris, vars alla element äro 0), utan att någondera faktorn $= 0$. Detta visas enklast genom exempel, såsom

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -12 & -30 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

vilka läsaren uppmanas att kontrollera. Om $\mathbf{AB} = 0$, kallas såväl **A** som **B** för *nolldelare* (nolldivisor). Exemplen visa, att en nolldelare ej behöver själv vara $= 0$. Det finnes t. o. m. matriser, av vilka en dignitet $= 0$, utan att matriserna själva äro $= 0$. Ett exempel på dylika, s. k. *nilpotenta* matriser är

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Läsaren kan själv visa, att $\mathbf{A}^3 = 0$.

Av det sagda framgår, att man ej kan lösa en matrisekvation, d. v. s. bestämma den allmännaste matris **X**, som satisfierar ekvationen $f(\mathbf{X}) = 0$, endast genom att uppdela $f(\mathbf{X})$ i faktorer och därpå sätta varje faktor $= 0$; beträffande faktorerna av $f(\mathbf{X})$ vet man ju endast, att de skola vara nolldelare. För bestämmandet av **X** fordras mera ingående undersökningar.

4. Av det hittills framlagda materialet kunna vi göra en enkel, kvantummekanisk tillämpning, nämligen på problemet om den

lineära oscillatorn. Läsaren uppmanas livligt att själv utföra alla förekommande uträkningar.

Först några ord om svängningar: En lineär svängningsrörelse, t. ex. en partikels oscillationer, då kraften är proportionell mot avståndet till jämviktsläget och riktad mot detta, beskrives av formeln

$$q = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t},$$

där q = partikelns koordinat, t = tiden, $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$ = antalet svängningar per tidsenhet (frekvensen) samt a och b = komplexa tal, som bestämma svängningens amplitud och fasvinkel. Av partikelns massa, μ, och hastighet, $\dot{q}$ (punkten betecknar derivation med avseende på t), bestämmes dess *impuls* (rörelsemängd): $p = \mu\dot{q}$. Dess rörelseenergi $= \frac{p^2}{2\mu}$. Dess potentiella energi $= \int_0^q - \mu\ddot{q}dq =$ $= \mu\omega^2 \int_0^q qdq = \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}$. Dess totala energi är alltså

$$H = \frac{1}{2\mu}(p^2 + \mu^2\omega^2 q^2).$$

Nu övergå vi till kvantummekanik. Ett strålningsemitterande eller -absorberande system (lineär oscillator, atom, molekyl) kan karakteriseras av vissa experimentellt tillgängliga storheter, nämligen dels frekvenserna för systemets strålning (spektrallinjerna), dels intensiteterna för de olika spektrallinjerna. Man finner experimentellt, att frekvenserna låta ordna sig i spektralserier:

$$\begin{array}{llll} \nu_{12}, & \nu_{13}, & \nu_{14}, & \ldots \\ & \nu_{23}, & \nu_{24}, & \ldots \\ & & & \ldots\ldots, \end{array}$$

där numreringen kan genomföras så, att

$$\nu_{jk} + \nu_{kl} = \nu_{jl}.$$

Man kan sålunda för varje system (atom o. s. v.) finna en följd av tal, $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3, \ldots$, sådana att varje frekvens, ν_{jk}, kan uträknas som differensen mellan två bland dessa:

$$\nu_{jk} = \nu'_k - \nu'_j.$$

Talen $\nu'_1, \nu'_2, \ldots$ kallas spektraltermer och äro för varje system entydigt bestämda.

De partialsvängningar, systemet kan utföra, anges av uttrycken

$$q_{jk} = a_{jk} e^{i\omega_{jk} t}, \text{ där } \omega_{jk} = 2\pi\nu_{jk}.$$

Här tillåtes även $j \geqq k$, varvid $\omega_{jj}=0$, $\omega_{jk}=-\omega_{kj}$. Dessa uttryck bilda en matris:

$$\mathrm{Q}=(q_{jk}),$$

systemets *koordinatmatris*. Även de härur beräknade impulserna

$$p_{jk}=\mu\dot{q}_{jk}=\mu i\omega_{jk}a_{jk}e^{i\omega_{jk}t}$$

bilda en matris:

$$\mathrm{P}=(p_{jk}),$$

impulsmatrisen.

Kvantummekanikens grundantaganden äro nu:

1) Systemets energinivåer bilda en matris, **H**, som beräknas ur P och Q på samma sätt, som totalenergien H enligt den klassiska mekaniken beräknas ur p och q.

2) P och Q äro ej kommutativa; i stället gäller för dem följande »Vertauschungsrelation»:

$$\mathrm{PQ}-\mathrm{QP}=\frac{h}{2\pi i}\,\mathrm{E},$$

där E = enhetsmatrisen. Konstanten $\frac{h}{2\pi i}$, där h = Plancks konstant, är vald så att de erhållna resultaten skola stämma med experimentella fakta.

Vi tillämpa detta på den lineära oscillatorn. Dess partialsvängningar satisfiera alla differentialekvationen: $\ddot{q}_{jk}+\omega^2 q_{jk}=0$, vilket ger:

$$\omega_{jk}=\omega \text{ eller } \omega_{jk}=-\omega \text{ eller } a_{jk}=0.$$

Spektraltermerna kunna alltså numreras så, att de bilda en aritmetisk serie med differensen $=\frac{\omega}{2\pi}$. I så fall är $\omega_{jk}=(k-j)\omega$. Endast sådana svängningar äro emellertid (enligt diff.-ekv.) möjliga, för vilka $k-j=\pm 1$. I alla övriga fall måste sålunda $a_{jk}=0$. Koordinatmatrisen blir alltså

$$\mathrm{Q}=\left|\begin{matrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_{21} & 0 & q_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_{32} & 0 & q_{34} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right|$$

d. v. s.

$$\mathrm{Q}=(q_{jk}),\ \text{där } q_{jk}=\begin{cases} a_{jk}e^{i(k-j)\omega t}, & \text{om } k-j=\pm 1, \\ 0, & \text{om } k-j\neq\pm 1. \end{cases}$$

Impulsmatrisen: $\mathrm{P}=(p_{jk})$, där $p_{jk}=i\mu\omega(k-j)q_{jk}$.

Läsaren kan nu lätt kontrollera, att $PQ - QP =$ en matris, vars alla element äro $= 0$ utom de, vars rad- och kolonnindices äro lika (*diagonalmatris*). Diagonalelementen bli:

1:sta raden och kolonnen: $-2i\mu\omega a_{12}a_{21}$;
j:te » » » , $j > 1$: $-2i\mu\omega(a_{j,j+1}a_{j+1,j} - a_{j,j-1}a_{j-1,j})$.

Enligt »Vertauschungs»-relationen skola alla dessa element vara $= \frac{h}{2\pi i}$, varav följer:

$$a_{12}a_{21} = \frac{h}{4\pi\mu\omega};$$

$$a_{j,j+1}a_{j+1,j} - a_{j-1,j}a_{j,j-1} = \frac{h}{4\pi\mu\omega} \qquad (j > 1).$$

Talen $a_{j,j+1}a_{j+1,j}$ bilda alltså en aritmetisk serie med differensen $=$ första termen $= \frac{h}{4\pi\mu\omega}$. Härav följer

$$a_{j,j+1}a_{j+1,j} = \frac{jh}{4\pi\mu\omega} \qquad (j \geqq 1).$$

Då värdet härav är ett reellt tal, är det plausibelt att antaga $a_{j,j+1}$ och $a_{j+1,j}$ vara konjugerat komplexa (f. ö. brukar generellt antagas, att q_{jk} och q_{kj} äro konjugerat komplexa). Absolutvärdet av $a_{j,j+1}$ blir sålunda

$$|a_{j,j+1}| = \sqrt{\frac{jh}{4\pi\mu\omega}}.$$

Därigenom äro partialsvängningarnas amplituder (och därmed deras intensiteter) bestämda.

Återstår att beräkna energimatrisen, $H = \frac{1}{2\mu}(P^2 + \mu^2\omega^2 Q^2)$. Läsaren kan själv påvisa, att den blir en diagonalmatris, vars diagonalelement äro:

1:sta raden och kolonnen: $\mu\omega^2 a_{12}a_{21} = \frac{h\omega}{4\pi} = \frac{h\nu}{2} = E_1$;
j:te » » » , $j > 1$: $\mu\omega^2(a_{j,j-1}a_{j-1,j} + a_{j,j+1}a_{j+1,j}) =$

$$= \left(j - \frac{1}{2}\right)h\nu = E_j.$$

Den lineära oscillatorns kvantummekaniskt tillåtna energinivåer äro just dessa element av matrisen H. Som sig bör äro de oberoende av tiden. Om oscillatorn övergår från nivån E_{j+1} till E_j, minskas som synes dess energi med

$$E_{j+1} - E_j = h\nu,$$

vilket är den emitterade strålningens energi, i överensstämmelse med Bohrs frekvensregel.

Slutligen är det anmärkningsvärt, att den lägsta möjliga energinivån är $= \frac{h\nu}{2}$ (icke $= 0$), vilket emellertid stämmer med experimentella fakta (»nollpunktsenergi», NERNST).

5. Vid studiet av matriser måste man ofta använda vissa determinanter. Den determinant, som bildas av hela matrisen **A**, d. v. s. vars element utgöras av samtliga element i **A** med sina platser bibehållna, kalla vi »determinanten av **A**». Den betecknas på många olika sätt; vi välja beteckningen $|\mathbf{A}|$.

Vi söka determinanten av en matris, som erhållits genom addition eller multiplikation av andra matriser. Först må då påpekas, att $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ icke kan allmänt uttryckas i $|\mathbf{A}|$ och $|\mathbf{B}|$. Vi visa detta genom att åter taga ett exempel med 2-radiga matriser: Vi sätta

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{pmatrix}.$$

Då är enligt kända determinantlagar:

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11};\ a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21};\ a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} b_{12} \\ a_{21} b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} a_{12} \\ b_{21} a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{vmatrix}.$$

Det torde vara klart, hur utvecklingen göres vid större radantal.

Om **A** är en n-radig matris och k är ett tal, så är $|k \cdot \mathbf{A}| = k^n \cdot |\mathbf{A}|$. Detta är att observera, ty enligt definitionen multiplicerar man en matris med talet k genom att multiplicera alla dess element med k; en determinant däremot blir k gånger större, när elementen i en enda rad (eller kolonn) multipliceras med k.

Determinanten av en produkt av två (eller flera) matriser erhålles mycket enkelt, ty enligt multiplikationssatsen för determinanter är $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. Elementen i en produktmatris äro ju bildade på ett av de sätt, som man kan använda vid uträknandet av en produktdeterminant.

Slutligen anmärkes, att $|\mathbf{E}| = 1$.

Stundom måste man använda determinanter, i vilka endast en del av matrisens element ingår. Om man i en (kvadratisk) matris **A** bortstryker vissa rader och ett lika stort antal kolonner samt därefter bildar determinanten av de återstående elementen, så kallas denna en *minor* av **A**. Oss intressera mest de minorer, som erhållas vid strykandet av en rad och en kolonn; den minor, som erhålles genom bortstrykande av den j-te raden och den k-te kolonnen ur **A**, och som därpå förses med tecknet $(-1)^{j+k}$, komma vi att beteckna med A_{jk}.

Om $\mathbf{A} = (a_{jk})$ är en given matris, så kalla vi $\mathbf{A}' = (a'_{jk})$ för dess *adjungerade* matris, om $a'_{jk} = A_{kj}$. För tydlighets skull ett exempel:

$$\text{Om} \qquad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{så är} \quad \mathbf{A}' = \begin{vmatrix} A_{11} A_{21} A_{31} \\ A_{12} A_{22} A_{32} \\ A_{13} A_{23} A_{33} \end{vmatrix}.$$

Man torde observera omkastningen av rader och kolonner, vilken har betydelse för fortsättningen.

Från determinantteorien anse vi såsom känt, att

$$a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \ldots + a_{jn}A_{kn} \begin{cases} = |\mathbf{A}|, \text{ om } j = k; \\ = \ \ 0 \ \ , \text{ om } j \neq k. \end{cases}$$

Om vi bilda produkten $\mathbf{AA}'$, erhålla vi därför som resultat en matris, där alla element äro $= 0$ utom diagonalelementen; de sistnämnda elementen äro alla $= |\mathbf{A}|$. Detta kan skrivas: $\mathbf{AA}' = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$. Analogt visas, att även $\mathbf{A}'\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$.

I slutet av mom. 3 visades, att man av likheten $\mathbf{AB} = 0$ ej får draga slutsatsen, att antingen $\mathbf{A} = 0$ eller $\mathbf{B} = 0$. Vi skola nu behandla likheten $\mathbf{AB} = 0$ i ett viktigt specialfall. Multiplicera densamma från vänster med $\mathbf{A}'$, så erhålles $\mathbf{A}'\mathbf{AB} = 0$, alltså enligt det föregående: $|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{EB} = 0$, d. v. s. $|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{B} = 0$. Om $|\mathbf{A}|$, som ju är ett *tal*, är skild från noll, ger den sistnämnda likheten omedelbart, att $\mathbf{B}$ måste vara $= 0$. Är däremot $|\mathbf{A}| = 0$, ger den ingen upplysning beträffande $\mathbf{B}$. Om vi kalla en matris, vars determinant $= 0$, för *singulär*, kan resultatet uttryckas i följande ord: Om en produkt av två matriser är $= 0$ och den ena av faktorerna är icke-singulär, så måste den andra faktorn vara $= 0$. Beviset blir analogt, om det är den högra faktorn, som är icke-singulär.

Vi kunna nu lösa följande problem: $\mathbf{A}$ är en given matris. Sök en matris, $\mathbf{A}^{-1}$, med den egenskapen, att $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$, om någon dylik matris överhuvudtaget existerar. Först se vi, att likheten $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ ej kan gälla, om $\mathbf{A}$ är singulär; ty om likheten gäller, så är också $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{E}| = 1$, vilket är orimligt, om $|\mathbf{A}| = 0$. Ett nödvändigt villkor för att en matris $\mathbf{A}^{-1}$ med den angivna egenskapen skall existera, är alltså, att $\mathbf{A}$ är icke-singulär. Men detta villkor är även tillräckligt, ty så snart $\mathbf{A}$ är icke-singulär, kunna vi angiva ett explicit uttryck för $\mathbf{A}^{-1}$, nämligen $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|}$. Att denna matris uppfyller den fordrade likheten framgår av vad som ovan sagts om $\mathbf{A}'$. Dessutom gäller $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, d. v. s. $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^{-1}$ äro kommutativa med varandra. Det återstår endast att visa, att mot varje (icke-singulär) $\mathbf{A}$ svarar endast en enda

$\mathbf{A}^{-1}$. Vi utgå från $\mathbf{A}\mathbf{A}' = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$. Om nu $\mathbf{A}^{-1}$ är någon matris, som satisfierar likheten $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, så framgår successivt:

$$|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}'; \quad \mathbf{A}(|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}') = 0;$$

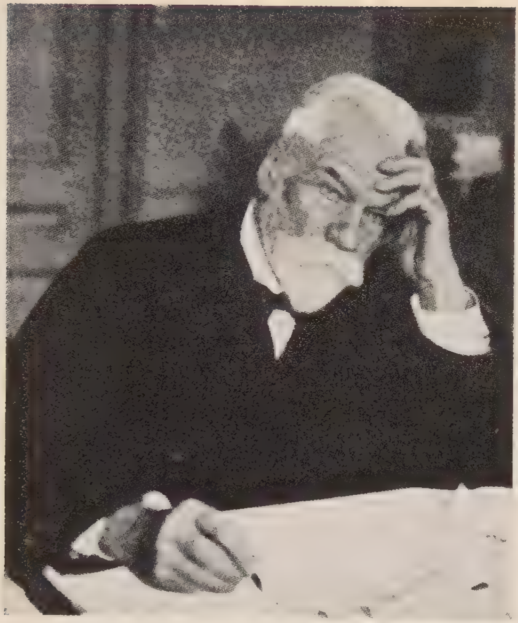
här är $\mathbf{A}$ icke-singulär, och enligt vad som nyss visats måste då den andra faktorn vara $= 0$, $\therefore |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}' = 0$, varur $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|}$ följer, ty $|\mathbf{A}| \neq 0$.

$\mathbf{A}^{-1}$ brukar kallas den *inversa* matrisen till $\mathbf{A}$. Det viktiga resultat, vi ha funnit, är alltså följande: Nödvändiga och tillräckliga villkoret för att $\mathbf{A}$ skall ha en invers matris är, att $\mathbf{A}$ är icke-singulär. Är detta villkor uppfyllt, så är den inversa matrisen $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|}$, och denna är entydigt bestämd.

Ett slags division av matriser blir nu i vissa fall möjlig. Det gäller att bestämma en matris $\mathbf{X}$ så, att $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Om vi antaga $\mathbf{A}$ icke-singulär, kunna vi multiplicera ekvationen från höger med $\mathbf{A}^{-1}$, varvid erhålles $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$, alltså $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$. På samma sätt erhålles till ekvationen $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ lösningen $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Hur dessa ekvationer lösas, om $\mathbf{A}$ är singulär, kan här ej beskrivas.

Slutligen söka vi determinanten av $\mathbf{A}^{-1}$. Av $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ följer, att $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = 1$, alltså $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$.

(Forts. följer i ett senare häfte.)



Ernest Solvay

Ur sodans historia.

2. ERNEST SOLVAY.

Av **JOHN LUNDBERG.**

Vi ha i en föregående uppsats (Elementa, *23*, sid. 105, 1940) sett, hur den av Leblanc funna metoden att framställa soda gav upphov till en stor och blomstrande industri, vilken fram på 1860-talet hade utvecklat sig till imponerande dimensioner. Under nämnda årtionde började man emellertid framställa soda enligt ett nytt tillvägagångssätt, och på denna grund uppväxte en fabrikation, som snart visade sig vara en utomordentligt farlig konkurrent till Leblanc-industrien.

Redan 1811 hade fransmannen Augustin Fresnel, i övrigt mest bekant för sina undersökningar över ljusets interferens, funnit, att natriumbikarbonat kan erhållas genom inverkan av ammoniak och koldioxid på en lösning av koksalt. Ur bikarbonatet kan man mycket lätt få soda. Fresnel vände sig till åtskilliga andra vetenskapsmän för att höra deras mening om metodens användbarhet för sodafabrikation i stor skala. Vid denna tid kostade den enligt Leblanc-metoden framställda sodan nära 900 francs pr ton, varför projektet att lancera en konkurrentmetod kunde tyckas frestande. Fresnel blev emellertid, trots detta, så allmänt avrådd, att han avstod från försöket. Under de följande årtiondena utvecklades emellertid gasverksindustrien, och detta gjorde, att ammoniak kunde erhållas i tillräckliga mängder och till sådant pris, att den med fördel kunde användas som råmaterial inom den kemiska industrien. Under denna tid dyker därför också den av Fresnel först framlagda tanken åter och åter upp. Det första försöket att omsätta idén i stor skala gjordes av engelsmännen Dyar och Hemming i London, vilkas patentbrev på metoden är av år 1838. Under två år sökte de genomföra sådana anordningar, att tillverkningen skulle bli lönande, men slutligen måste de ge tappt utan att ha lyckats. Tanken var likväl så lockande, att t. o. m. Muspratt beslöt försöka sig på att realisera den och för detta ändamål byggde en fabrik i Newton i Lancashire. Men förlusterna av ammoniak visade sig bli så stora, att fabriken måste nedläggas, sedan den utan resultat slukat tio tusen pund. Ännu många andra sökte utnyttja metoden men med lika liten framgång. På 1850-talet voro två franska forskare, Schloesing och Rolland nära att lyckas, men den ekonomiska framgången hindrades av att ännu vid denna tid en skatt av tio francs pr 100 kg påvilade koksaltet i Frankrike. T. o. m. så framstående fabrikanter av Leblanc-soda som Gossage och Deacon försökte den nya metoden, men förgäves.

Den, som slutligen lyckades, där så många förut gett upp, var en fullkomlig outsider, en man utan någon som helst vetenskaplig skolning. Han hette Ernest Solvay och var vallon, född 1838 i den lilla byn Rebecq ett par mil sydväst om Bryssel. Hans far var stenhuggare men hade för att skaffa sig en biförtjänst anlagt en liten fabrik, där han renade koksalt genom omkristallisering. Ernest växte alltså upp mellan saltsäckar och kristalliseringskar, och hans barndoms omgivningar blevo bestämmande för hela hans livsgärning. Då han var klen till hälsan, ansågs han ej orka med några grundligare skolstudier utan fick i stället gå fadern tillhanda i fabriken. Han hade här god tid till läsning och begagnade den också väl. Han studerade allt, vad han kunde komma över, som väckte hans intresse. »Såsom en reaktion mot fångenskapen inom en trång horisont utvecklades hos honom ett starkt behov att lära känna och att förstå, vilket kom att behärska hela hans liv», säger en av hans biografer.

En morbror till Ernest var föreståndare för gasverket i en av Bryssels förstäder. År 1859 erbjöd han den då blott 20-årige Ernest att bli hans biträde, ett anbud, som denne med förtjusning accepterade. Morbrodern gav den unge mannen i uppgift att söka efter något sätt, varpå man kunde utnyttja gasvattnet. Ernests första tanke var att göra detta lättare transportabelt och därigenom lättare säljbart genom att koncentrera det. Detta utförde han så, att han upphettade gasvattnet och lät de bortgående gaserna — ammoniak och koldioxid — lösa sig i en betydligt mindre mängd kallt vatten. Han fann också, att han genom destillation av denna koncentrerade lösning med kalk kunde framställa ren kaustik ammoniak. Gasverkets styrelse upptäckte snart, att Ernests idéer voro ekonomiskt värdefulla och tillerkände honom därför en belöning av två tusen francs, något, som väl torde ha uppmuntrat honom till ytterligare ansträngningar. Kanske på grund av de starka intryck, han mer eller mindre medvetet mottagit i faderns lilla saltfabrik, kom han nu på idén att leda ammoniaken och koldioxiden ner i en koksaltlösning i stället för i rent vatten. Solvay trodde, att han på detta sätt skulle lyckas få en mera koncentrerad produkt, än när han använde rent vatten. Till sin stora överraskning erhöll han i stället en vit, kristallinisk fällning. Det vållade honom ingen större svårighet att komma underfund med, att denna fällning bestod av natriumbikarbonat. Solvay kände mycket väl till, att man av detta ämne med lätthet kan erhålla soda. Och där stod han nu helt oväntat som upptäckare av en förträfflig och — som han trodde — fullkomligt ny metod att framställa soda.

Det är egendomligt att konstatera, att själva den grundläggande principen i Solvays likaväl som i Leblancs metod upptäcktes genom en ren slump. Som Solvay själv en gång uttryckte det: »Le point de départ de ce résultat ne fut donc pas un enseignement scientifique car je n'étais ni ingénieur ni chimiste et je connaissais simplement les lois de Berthollet».

Solvay insåg till fullo, att en industri borde kunna uppbyggas på den av honom funna metoden för sodatillverkning. Han skyndade därför att taga patent på tillvägagångssättet (15 april 1861). Man får en något underlig föreställning om det sätt, varpå patent vid den tiden beviljades i Belgien, när man hör, att Solvay erhöll sitt patent utan minsta svårighet. Med hjälp av de penningmedel, hans familj kunde uppbringa, startade Ernest Solvay därpå genast en liten fabrik i Schaerbeck. Som trofast medhjälpare nu såväl som i framtiden hade han sin två år yngre bror Alfred. Resultaten av försöksdriften syntes så lovande, att de båda bröderna snart började söka förlagsmän för en större fabriksanläggning. Men de belgiska kapitalisterna visade sig fullkomligt ointresserade av Solvays upptäckt. Under loppet av dessa underhandlingar gjorde bröderna Solvay emellertid en mycket värdefull bekantskap. De ansågo sig nämligen behöva rådfråga en advokat och vände sig för den skull till en ansedd jurist, Endore Pirmez, sedermera bl. a. belgisk statsminister. Denne gav de båda unga männen en del goda råd. Bl. a. övertygade han dem om, att de borde söka noggrant utforska, om ej tilläventyrs någon annan redan varit inne på samma banor som de och kanske rent av gjort samma upptäckt. De började nu göra omsorgsfulla forskningar i litteraturen och härvid funno de till sin häpnad, att Ernest ingalunda var den förste upptäckaren av sin metod att framställa soda, utan att han — som vi sett — haft en lång rad föregångare. Det faktum, att ingen enda av dessa lyckats omsätta reaktionen i industriell skala, och att flera under sina försök förlorat hela förmögenheter, var knappast ägnat att uppmuntra de bägge bröderna, vilka ju icke ägde något kapital att sätta till. Ernest Solvay måtte emellertid ha varit en man, som ej lätt lät sitt mod nedslås. Och så bildade han år 1863 tillsammans med sin bror, advokaten Pirmez och några andra, som han lyckats övertyga om sin metods framtidsutsikter, bolaget »Société Solvay et C:ie» med ett aktiekapital av 136 tusen francs. I Couillet i utkanten av Charleroy uppfördes en fabrik och i januari 1865 kunde tillverkningen igångsättas. Och nu började den hårda striden mot alla de tekniska svårigheter, som genast trädde i dagen, då man övergick till fabrikation i stor skala. Redan i maj samma år var hela aktiekapitalet förbrukat! Lyckligtvis hade bröderna Solvays far just då fått ett litet arv och han satsade genast så mycket han kunde för att hjälpa sina söner. Men i oktober var även detta tillskott förbrukat. Inför den samlade familjen framlade Ernest ställningen och meddelade, att inget annat återstod för honom än att gå i konkurs. Men vid detta ord ingrep modern och förklarade, att hellre skulle familjen släppa till allt, vad den ägde, än att en sådan skandal skulle inträffa, som att hennes söner skulle göra konkurs. Alla familjens medlemmar offrade sitt yttersta för att rädda Ernest och Alfred.

Och nu vände sig lyckan. Orsaken härtill låg däri, att Ernest under dessa prövningens månader lyckats bygga apparater, med vilkas hjälp processen kunde ledas så, att den blev ekonomiskt bärkraftig. Vad ingen av hans vetenskapligt skolade föregångare kunnat åstadkomma, det hade nu den i högsta grad självlärde unge gasverksteknikern lyckats med. Hans medfödda uppfinnargeni, understött av hans starka vilja och uthållighet i svårigheterna, ledde honom till seger, där så många, med vida större teoretiska förutsättningar, misslyckats.

Det var framförallt de apparater, där gaserna, koldioxiden och ammoniaken, absorberades i lösningarna, som av Solvay utvecklades till en mycket hög grad av effektivitet. Det s. k. Solvaytornet, där koldioxiden absorberas, är byggt av gjutjärnstrummor och ända till 40 meter högt. Varje trumma har i bottnens mitt ett ganska stort hål. Över detta finnes en välvd sil, vars understa kant ej når fullt ned till trummans botten. Den uppstigande gasen, som under flera atmosfärers tryck pressas in vid tornets botten, kommer upp genom hålet i trum-bottnen och fördelas av silen över hela tornets genomskärningsyta, varigenom dess absorption i lösningen underlättas. De utfallande bikarbonatkristallerna åter kunna under silen spolas ned genom hålet till den närmast under liggande trumman. Då reaktionen utvecklar mycket värme, måste man genom lämpliga anordningar sörja för att tornen avkylas.

Även för ammoniakens möjligast fullständiga återvinning lyckades Solvay finna anordningar. Numera användas även för detta ändamål kolonnapparater, liknande de ovan beskrivna och liksom dessa av upp till 40 meters höjd. Dessa ha införts av den längre fram omtalade engelsmannen Mond. En mycket viktig roll i fabrikationen spela kalkugnarna. Dessas konstruktion fullkomnades i hög grad av Solvay. Såväl deras beskickning som tömning automatiserades samtidigt som man lyckades ernå en betydande minskning i koksåtgången. Solvay lyckades överhuvudtaget redan på ett ganska tidigt stadium komma fram till en mycket höggradig automatisering av förfarandet, så att hela processen utspelas i slutna rörsystem och med ett minimum av personal.

Tack vare de tekniska förbättringarna började fabrikationen i slutet av 1865 äntligen taga fart. I juni 1866 producerade anläggningen 1 $^1/_2$ ton soda om dagen, ett år senare 3 ton. Det gällde nu för Solvay att arbeta sig upp i konkurrens med Leblancindustrien. Kampen mot denna var i början mycket svår. Leblancfabrikerna hade under de många år, de varit i gång, hunnit fullständigt amortera sina anläggningskostnader, medan Solvay givetvis i början hade betydande utgifter härför. De äldre fabrikerna hade också en högst betydande inkomstkälla i biprodukterna. Det var just konkurrensen med Solvay, som mer än all lagstiftning tvang till ett möjligast fullständigt utnyttjande av dessa. Sålunda använde Newcastle Chemical Works 1890 25 tusen pund på installerandet av apparater, medelst vilka man skulle återvinna svavlet ur svavelkalciet och 1894 återvunnos i England ej mindre än 31 tusen ton svavel vid Leblanc-fabrikerna. Solvays metod gav däremot ingen nyttig biprodukt. Det enda, som bildas jämte sodan är klorkalcium, vilket visserligen är oskadligt och alltså kan få rinna bort i vilket vattendrag som helst, men som å andra sidan icke har någon större avsättning. Det är först på allra senaste tiden, man börjat använda det som dammbindningsmedel. Å andra sidan gömde Solvays metod, när den väl hunnit bli fullständigt utarbetad, mycket stora ekonomiska fördelar, detta trots att den innebar ett kraftigt slöseri med koksaltet. Detta omsättes nämligen ej på långt när fullständigt till bikarbonat utan stora mängder rinna ständigt outnyttjade bort tillsamman med klorkalciet. Metoden gör emellertid å andra sidan fabrikationen fullständigt oberoende av svavelsyra, och därtill är bränsleåtgången ojämförligt mycket mindre än i Leblanc-anläggningarna. Om fabriken anlägges över ett i jorden förekommande saltlager, behöver saltet ej brytas och forslas upp i dagen, utan man kan leda ner vatten till saltlagret och sedan pumpa den mättade lösningen upp till fabriken, där den efter rening kan användas direkt. Vidare producera Solvayfabrikerna omedelbart vattenfri soda under det att Leblanc-fabrikerna enligt själva metodens princip först måste få kristallsoda, vilken sedan får kalcineras, innan den kan användas i glasbruken. På grund av alla dessa förhållanden måste Solvays metod i längden segra över Leblancs.

En starkt bidragande orsak till att ammoniaksodametoden fick så snabb framgång var bröderna Solvays rent personliga insatser i fabriksbolagets affärsdrift. Ernest Solvay var ej blott en stor uppfinnare på den kemiska teknikens område utan även ett förstklassigt affärsgeni. Och hans broder Alfred stod honom i det sistnämnda avseendet ej efter. De båda bröderna förstodo att helt utvinna de ekonomiska värden, som den nya metoden för sodaframställningen kunde skänka. De gjorde det genom skapandet av en världsfamnande organisation, tack vare vilken vid all sodaframställning denna metod blev allenahärskande och kom under bröderna Solvays kontroll. Från fabriken i Charleroy växte under åren ut ett företag av jättelika dimensioner med dotterbolag i ett stort antal länder. Denna expansion började omedelbart efter fransk-tyska krigets slut 1871 med byggandet av en stor sodafabrik i Nancy. Kort därefter följde en fabrik i södra Frankrike, nära mynningen av Rhone. Det var Solvays avsikt att till en början inskränka sin verksamhet till kontinenten och lämna den mäktiga Leblanc-industrien i England i fred. Men 1872 erhöll han ett besök, som blev av största betydelse för den av honom skapade industriens framtid. Han uppsöktes nämligen då av en från England kommande herre vid namn Ludwig Mond. Denne var en tysk jude, född i Cassel. Efter studier för bl. a. Kolbe och Bunsen hade han 1862 vid 23 års ålder rest över till England för att finna ett vidsträcktare fält för sin verksamhet. Han hade där ganska snart lyckats få anställning i firman Hutchinson & Son i Widnes, vilken firma framställde soda enligt Leblancs metod. Här införde han anordningar, genom vilka svavlet åtminstone till en viss grad kunde återvinnas ur svavelkalciet. Men trots att han sålunda var aktivt verksam för den gamla metodens förbättring, insåg han tillfullo överlägsenheten hos Solvays tillvägagångssätt. Han ville därför nu förvärva rätten att i England utöva Solvays patent. De båda männen kommo utan större svårigheter överens i frågan. Efter återkomsten till England bildade Mond tillsamman med en annan av de i Hutchinsons firma anställda, den då 31-årige John Brunner, firman Brunner, Mond & Co. med ett begynnelsekapital av fem tusen pund. Den första fabriken byggdes i Winnington, direkt ovanpå de i Cheshire, söder om Liverpool belägna saltgruvorna. I början mötte Mond stora svårigheter i konkurrensen med de gamla kapitalstarka och väl inarbetade Leblancföretagen och ett slag stod hans företag nära ruinen. Men det hävdade sig dock till slut, något, som även här mycket berodde på tekniska förbättringar i metoden. Sålunda var det, som redan nämnts, Mond, som konstruerade de ovan omtalade kolonnapparaterna för möjligast fullständig återvinning av ammoniaken ur salmiaklösningarna. Så småningom började därför Brunner, Mond & Co. producera allt större sodamängder och dessa växte mot århundradets slut till väldiga mått, allt givetvis mot en viss royalty till Solvay, som sålunda förtjänade även på verksamheten i England. Redan 1881 var Brunner, Mond & Co:s aktiekapital uppe i över en million pund. Bolaget blev i sinom tid Englands största industriföretag i den kemiska branschen och familjen Mond den ledande inom Englands kemiska industri. En son till Ludwig Mond, Alfred, adlad lord Melchett, skapade mot 1920-talets slut den stora brittiska kemikoncernen Imperial Chemical Industries (»I. C. I.») genom sammanslagning av Brunner, Mond & Co. med det i föregående artikel omnämnda United Alkali Co. samt det Nobelska dotterbolaget i England och det största brittiska färgämnesbolaget.

Mond hade således tagit hand om sodafabrikationen i England, där han i sinom tid framgångsrikt konkurrerade ut de slutligen i United Alkali sammanslutna Leblanc-fabrikerna, så att denna sammanslutning, som vi nyss sett, tvingades in i den stora engelska kemitrusten. Men på kontinenten arbetade under tiden Solvay själv oavlåtligt för verksamhetens utvidgning. 1880 byggde han den första fabriken i Tyskland, vid Rhen nära gränsen mot Schweiz. För fabrikationen i Tyskland grundades ett särskilt dotterbolag, Deutsche Solvay-Werke, vilket snabbt försäkrade sig om fabriksområden, där såväl salt som kol funnos i jorden. Den största tyska sodafabriken anlades sålunda i Bernburg vid Saale. För att säkra avsättningen förvärvade Solvay dessutom stora intressen även i den tyska glasindustrien.

Solvay nöjde sig emellertid ej med den europeiska marknaden utan utsträckte snart sin verksamhet även till Nord-Amerika, där två särskilda dotterbolag bildades i början av 1880-talet. Det ena av dessa uppförde världens två största sodafabriker, en i Syracuse i staten New York, en i Detroit i staten Michigan. Numera kan tyngdpunkten i Solvay-koncernens verksamhet sägas ligga i Förenta staterna. Genom Allied Chemical and Dye Corporation behärskar den här en stor del av den kemiska industrien och kontrollerar därjämte i hög grad även glasfabrikationen. Att glastillverkningen i så hög grad blivit föremål för Solvays intresse är ganska naturligt, då denna industri ju är en av de allra största sodaförbrukarna.

I Europa behärskar Solvay-koncernen sodatillverkningen ej blott i Belgien, Frankrike och Tyskland, utan även i Italien, Schweiz och Spanien samt kontrollerar dessutom så gott som all kemisk industri i sydöstra Europa. I sitt hemland Belgien innehar den ledningen utom av sodaindustrien även av det största kemiska fabriksbolaget, Union Chimique Belge, vidare av ett bolag för framställning av kväveföreningar ur luften samt av den belgiska konstsilkeindustrien. Här ligger också hela det väldiga internationella företagets högsta ledning, vilken, så länge Ernest Solvay levde, förblev i hans händer.

Hela den strid med Leblanc-industrien, som slutligen ledde till fullständig seger för Solvay, sökte denne ständigt föra på ett sådant sätt, att öppen kamp med ömsesidigt nedpressande av priserna i möjligaste mån undveks. Genom att bilda syndikat i de olika länderna ville han i stället få konkurrenterna medintresserade i sina företag och gav dem på så sätt andrum att lägga om sin egen fabrikation. Avsättningen till sådana länder, som ej ha egen sodafabrikation — t. ex. de skandinaviska länderna — fördelades noga mellan de olika dotterbolagen. Skandinavien har sålunda länge försetts med soda från de tyska Solvay-fabrikerna.

År 1887 nådde produktionen av Leblanc-soda sin kulmen med 540 tusen ton. Följande år var den enligt Solvays metod framställda mängden större och växte sedan undan för undan. Det, som till sist gjorde fullständigt slut på Leblanc-industrien, var införandet av elektrolytiska metoder för framställning av natriumhydroxid och klor direkt ur koksaltet. I Frankrike nedlades den sista Leblanc-fabriken 1910 och i England 1927. Efter kriget 1914—18 upplevde Leblanc-metoden en come-back i Tyskland. Man utnyttjade då de väldiga natriumsulfatmängder, vilka erhållits som biprodukt vid rening av kalisalterna från Stassfurtlagren och som under kriget ej kunnat avsättas. Härvid användes ej kalksten utan man behandlade natriumsulfiden med koldioxid och vattenånga vid 300°—500°:

$$Na_2S + H_2O + CO_2 = Na_2CO_3 + H_2S$$

Ur svavelvätet kan, som nämnts, svavlet utvinnas. Metoden lär vara mycket effektiv och påstås ha kommit till användning även i Ryssland. Den bör under lämpliga yttre betingelser — billigt natriumsulfat ur naturliga tillgångar och billigt kol i dessa tillgångars omedelbara närhet — i viss mån kunna konkurrera med Solvay-metoden men synes likväl ej ha fått någon nämnvärd betydelse.

Då man talar om, att Leblanc-metoden numera fullständigt försvunnit, bör man likväl ej glömma, att dess första fas — t. o. m. svavelnatriet — alltjämt har en ofantlig användning, särskilt i de s. k. sulfatfabrikerna för pappersmasseframställning.

Men sodatillverkningen i egentlig mening enligt Leblancs metod förekommer ej mera. Medan produktionen enligt detta framställningssätt avtog, steg den i de av Solvay-koncernen ägda fabrikerna oavbrutet och utgjorde strax efter sekelskiftet c:a en million ton pr år, medan Brunner, Mond & Co. samtidigt producerade mer än en halv million ton. År 1937 uppgick världens totala fabrikation av ammoniaksoda till c:a sju millioner ton, varav Solvay-koncernen producerade fyra och en halv millioner. Samtidigt framställdes nära två millioner ton soda dels ur på elektrolytisk väg erhållen natriumhydroxid, dels direkt ur naturliga förekomster (speciellt kring Magadi-sjön i Brittiska Ost-Afrika). Användningen av denna ofantliga mängd soda fördelade sig med nära 30 % på glasfabrikationen, 25 % på framställningen av natriumhydroxid, i det närmaste 15 % till tvål och andra tvättmedel samt resten till framställning av andra kemikalier eller för andra ändamål. Härtill kan läggas, att medan ett ton soda år 1855 kostade 500 kronor, hade priset 1939 — före krigsutbrottet — sjunkit till mindre än 90 kronor.

Solvay, som var medborgare i ett litet land och likväl kom att behärska världen inom sitt fabrikationsområde, påminner i detta avseende starkt om Nobel. Ekonomiskt var han kanske t. o. m. ännu skickligare än denne. Nobelkoncernen är för länge sedan uppdelad i de olika dotterbolagen, av vilka några numera ingå som delar i andra, nyare koncerner, såsom I. G. och I. C. I. Men den av Solvay skapade affärssammanslutningen existerar alltjämt och är i all huvudsak i hans efterkommandes ägo.

Solvay och Nobel liknade varandra emellertid ej blott i sin industriella och ekonomiska verksamhet. Liksom Nobel hade Solvay vuxit upp i en omgivning, som redan i den tidigaste barndomen skänkte impulser för det kommande livsverket. För bägge voro familjen och framför allt bröderna ett aldrig svikande stöd i deras verksamhet. Liksom Nobel var även Solvay personligen mycket tillbakadragen och framträdde ej gärna inför offentligheten. Skulle han nödvändigt omtalas, såg han till, att det blev hans skicklighet som bergbestigare eller hans donationer till allmännyttiga ändamål, som omnämndes, och ej hans verksamhet som industrifurste.

Ernest Solvay måste ha varit en sällsynt fascinerande personlighet med en ovanlig förmåga att övertyga andra och rycka dem med sig i arbetet för de idéer, han ville förverkliga. »Ernest kan inte ta fel» lär hans bror Alfred en gång ha sagt, och detta yttrande återspeglade nog tankarna hos nästan alla dem, som voro anställda hos eller eljest lärde närmare känna den store industriledaren.

De väldiga belopp, som de av honom ledda företagen inbragte i vinst, använde han i första hand, och detta redan på ett mycket tidigt stadium, till alla slags välfärdsanordningar för de vid hans företag anställda. Men därutöver lät han, liksom Nobel, dessa vinster i imponerande utsträckning gå till understöd åt vetenskaplig forskning inom skilda områden. Solvay hörde till den vid sekelskiftet ej ovanliga typ av människor, som man skulle kunna kalla materialistiska idealister. Han trodde fullt och fast, att naturvetenskapens framsteg skulle lösa alla gåtor och i sinom tid skapa en lyckligare och ädlare mänsklighet. Naturforskningen var för honom en religion. Därför skänkte han ej blott en handelshögskola till staden Bryssel och en helt ny fakultet till Bryssels universitet, en fakultet »de sciences politiques et sociales», utan han upprättade därutöver i Bryssel tre särskilda institut, avsedda att gagna den naturvetenskapliga forskningen. Dessa äro fysiologiska institutet och de internationella instituten för fysik och kemi. Alla dessa av Solvay skapade forskningshärdar ha givetvis blivit till det största gagn för de ifrågavarande vetenskapernas utveckling.

Omedelbart efter utbrottet av kriget 1914 förstod Solvay, att, om Belgien skulle kunna möta de faror, som hotade civilbefolkningen, måste en särskild organisation för detta ändamål skapas.

Han tog därför omedelbart initiativet till bildande av en nationell hjälpkommitté, vilken blev av ofantlig betydelse för landets räddning undan hungersnöd och fullständigt sammanbrott. Då tyskarna samma år erövrade Bryssel, togo de ett antal framstående medborgare som gisslan för erläggandet av den kolossala krigsskatt, vilken pålades staden. Bland dessa var Solvay en. Åtgärden väckte betydlig uppmärksamhet, emedan den store industriledaren alltid visat synnerlig sympati för tysk vetenskap och tyska institutioner och bl. a. 1913, då hans verksamhet firade sitt 50-årsjubileum, skänkt Berlins Vetenskapsakademi medel till en akademikerplats, avsedd att representera de tekniska vetenskaperna.

Solvay kvarstannade jämte sin maka i Bryssel under alla fyra krigsaren och framstod inom det av fienden ockuperade området som personifikationen av civilbefolkningens passiva motstånd. Under hela denna tid bidrog han också genom sitt arbete inom den av honom frammanade hjälpkommittén i hög grad att stärka landets uthållighet genom alla lidanden. Efter krigets slut drog kung Albert i spetsen för den belgiska armén i triumf in i Bryssel. Och redan samma dag begav han sig ensam till Ernest Solvays bostad och frambar där sin och hela folkets tacksamhet för vad den nu 80-årige Solvay genom sin storartade patriotism gjort för sitt land.

Ända in i döden framträdde kontrasten mellan Leblanc och Solvay. Den förre tog, övergiven, utarmad och förtvivlad, själv sitt liv. Den senare gick som en av Europas största industrifurstar bort, omgiven av hela det belgiska folkets vördnad och tacksamhet. Den 26 maj 1922 avled han helt stilla.

Kemiska notiser.

Av BROR GUSTAVER.

1. I Elementa årg. 22, s. 153 har i försök 3 beskrivits ett sätt att hastigt och vackert visa jonvandringen vid elektrolys. Försöket lämpar sig även för uppmätning av väte- och hydroxyljonernas vandringshastigheter. Mässingsblecken läggas på 3 cm avstånd från varandra på det med brassikanlösning indränkta läskpapperet. Spänningen mellan blecken mätes med en mellan polskruvarna inkopplad voltmeter. I olikhet med beskrivningen i det ovan angivna försöket fuktas ej papperet med syra- resp. baslösning. Då strömmen slutes, börja väte- och hydroxyljonerna vandra mot varandra, och på det ställe, där »fronterna» råkas, bildas en skarp blå rand. I detta ögonblick brytes strömmen och

man noterar tiden i sekunder. Denna var vid ett försök 115 sekunder, och vätejonerna hade då vandrat 20 mm och hydroxyljonerna 10 mm. Spänningsfallet var under försöket 180 volt, d. v. s. 60 volt/cm. Vandringshastigheten per sekund för ett spänningsfall av 1 volt per cm var alltså för vätejonen $\frac{20}{60 \,.\, 115} = 0{,}00290$ mm och för hydroxyljonen $\frac{10}{60 \,.\, 115} = 0{,}00145$ mm.

Upprepade försök gåvo liknande värden.

De rätta värdena på vandringshastigheten äro för vätejonen 0,00325 mm och för hydroxyljonen 0,00178 mm. De funna värdena äro alltså 10 à 20 % för små.

2. Att tillverka en bra osmotisk cell för att kvalitativt visa det osmotiska trycket är en rätt kinkig sak. Den klassiska lercylindern med i dess vägg utfälld ferrocyankoppar lider av vissa brister. Dels är det mellan den utfällda ferrocyankopparn och gummiproppen med stigröret en porös rand utan någon semipermeabel utfällning och dels är det svårt att sätta fast gummiproppen alldeles tätt i den rätt bräckliga lercylindern. I Elementa årg. 7, s. 43 har OLOF HAMMARSTEN redogjort för tillverkning av kollodiumhinnor för osmotiska försök. Undertecknad har visserligen ej prövat metoden men föreställer sig, att det ej är så lätt att åstadkomma goda dylika kollodiumhylsor. Jag har i stället med gott resultat framställt en osmotisk cell på följande enkla och billiga sätt.

I en vanlig medicinflaska av glas om 200 cc och med avsprängd botten (kan lämpligen beställas, t. ex. hos firman Rudolph Grave, Stockholm) gjutes en botten av gips av ung. 1 cm tjocklek. Flaskan ställes på en flat kork och tunn gipsvälling hälles ned genom en glastratt, så att inte gipsen stänker omkring på innerväggen i flaskan. Sedan gipsen hårdnat, ställer man ned flaskan i en lösning av ferrocyankalium och häller i en lösning av kopparsulfat. Efter några dagar har ett tunt skikt av ferrocyankoppar bildats och synes som en skarpt markerad brun rand ung. mitt i gipslagret. Flaskan sköljes, fylles med 10 à 20 %-ig sockerlösning och förses med gummipropp och stigrör samt ställes ned i rent vatten. Vid användning av ett stigrör av 4 mm vidd steg lösningen i stigröret ung. 2 cm i timmen. Då stighöjden uppnått ca. 70 cm, började ferrocyankopparn tränga ut genom gipsbottnen på grund av trycket inifrån och hängde i fina, rödbruna trådar ned till bägarens botten. Stighöjden är en bråkdel av den teoretiska och tydligen ett mått på det tryck, som den semipermeabla kolloiden i gipslagret förmår uthärda. Med användande av ett kapillärt stigrör bör givetvis den maximala stighöjden kunna uppnås hastigare.

Förslag till enskilda arbeten i kemi.

Av **EINAR NORDEFELDT.**

Världen genomgår i vår tid stora kulturella förändringar, vilka ovillkorligen inverka på den kommande generationens uppfostran. Den kanske största orsaken till tidens oro ligger i naturvetenskapernas snabba utveckling, vilken fordrar nyanpassning inom alla livsområden. Det är ej blott undervisningens metod som härav påverkas genom att elevernas intressen, tänkande och verksamhet börjar träda i förgrunden, utan även skolkurserna omorganiseras till att alltmer taga hänsyn till dessa faktorer genom att koncentreras kring problem, områden och verksamheter ur elevernas egen värld.

Alltför mycket av skolkursernas innehåll är statiskt och rent intellektuellt, utan tillfälle till utveckling av elevernas känslovärld, intressen eller praktiska verksamhetslust. I viss utsträckning kvarstår tyvärr alltjämt det intellektuella snobberi som fordrar att elevens arbete skall insnöras i den traditionella teoretiska kursen och som ogärna ser att det får en praktisk inriktning, även då det blir uppenbart att detta skulle ge eleven ökade tillfällen att odla sina aktuella intressen samt omdömesförmågan och redobogenheten att arbeta och samverka med andra mot ett bestämt mål. Elevens studier måste dock för honom äga mening och liv och böra därför utgå från hans personliga erfarenheter eller intressen, medan lärarens roll blir ej blott att lära honom en viss föreskriven kurs utan även att stimulera hans verksamhetslust. I detta syfte spelar det enskilda arbetet en mycket stor roll, och det är att hoppas att vi lärare alltmer får ögonen öppna för de möjligheter som här erbjudas att föra våra elevers livsinställning över till ett högre och mer aktivt plan, där de bliva ej blott vetande utan även kunnande.

Såsom kemilärare vid Högre allm. läroverket å Södermalm i Stockholm har jag i mån av förmåga sökt tillämpa dylika synpunkter på mina elevers arbetsuppgifter vid utväljandet av ämnen för enskilt arbete, och då dessa numera uppgå till mellan ett och två hundra, kan det möjligen intressera mina medlärare att taga någon del därav. Konsekvent har jag härvid undvikit att lämna eleven en bok att referera eller en samling räkneuppgifter att lösa, enär jag anser detta vara att i grund förfuska det enskilda arbetets idé och att beröva eleven ett enastående tillfälle till upptäckarglädje och egen manuell verksamhet som motvikt mot det passiva inhämtandet av färdiglagad kunskap i så mycket annat av skolans undervisning.

I stället söker jag låta eleven äntligen få utföra ett sammanhängande experimentellt arbete, där han själv deltager i planeringen och där en uppgift skall diskuteras och lösas, som har ett påtagligt praktiskt eller teoretiskt värde, så att eleven känner att han gör en positiv insats, om än av anspråkslös art. Låter man eleven förstå, att hans arbete tjänar ett bestämt och nyttigt ändamål, blir han oftast fylld av entusiasm för sin uppgift, och det kan då inträffa att eleven efter studentexamen återkommer till skolans laboratorium med anhållan att få fortsätta sina undersökningar eller att han utger sitt arbete i tryck.

Så vitt möjligt böra uppgifterna vara av sådan art, att varierande arbetsmetodik eller arbetsdetaljer förekomma, vilka i viss mån lämnas åt eleven själv att utvälja genom att studera handböcker. Manuell noggrannhet och logisk tankeverksamhet befordras, om uppgifterna innefatta kvantitativa bestämningar, vilkas resultat ge anledning till kritisk värdesättning från elevens sida. En påtaglig praktisk nytta av uppgiftens lösande stimulerar till dess fullföljande, varvid elevens egna intressen eller planerade framtidsbana — ingenjör, läkare, apotekare — i viss mån får bestämma uppgiftens art.

Sedan jag vid läsårets början eller tidigare — eleverna önska stundom börja med arbetet redan året före dess egentliga utförande — diskuterat ämnets huvuddrag med eleven, hänvisas denne till att i förelagda handböcker (ofta engelska eller tyska) studera vissa kapitel för att sätta sig in i arbetets teori och metodik. Stundom kunna redogörelser över tidigare utförda enskilda arbeten av ungefär likartat innehåll framläggas till begrundan. Någon vecka därefter erhåller han behövligt material och apparatur att förvara i eget skåp, varefter arbetet börjar under lärarens direkta tillsyn och eventuella medverkan. Redan efter några dagars övning — eleven arbetar t. ex. två dagar i veckan från middagslektionernas slut till kl. 6 em samt å tillfälliga håltimmar — reder han sig vanligen på egen hand och behöver lärarens aktiva medverkan blott, då ny metodik tillkommer eller då vissa beräkningar skola utföras och kontrolleras. Läraren är dessa dagar tillgänglig på laboratoriet och beskådar då och då hans arbete samt följer genom samtal eller inlämnade rapporter hans framsteg och resultat.

Uppgiften bör vara löst och arbetet slutfört efter c:a 70—80 timmars effektivt arbete — i högsta ringen hälften härav — men kan få taga längre tid — eleven håller själv reda på sin timsumma — om det delvis utföres under ferier, vilket stundom inträffar. Eleven skriver nu en redogörelse i koncept, som han genomdiskuterar med läraren, varefter arbetet maskinskrives på folioark som insättas i ett enkelt omslag och inlämnas till bedömning och förvaring på institutionens arkiv, varvid eleven behåller en eller flera genomslagskopior. På avhandlingens första sida infästes ett amatörfotografi av eleven i arbete, vilket brukar öka läsarens intresse för detsamma. Det blir en högst aktuell och saklig uppsats och sammanfattande arbetsbeskrivning samt en betydligt mer högtstående och förnämare prestation än hans vanliga svenska uppsatser. Vid studentexamen framläggas elevernas arbeten för censorerna.

Jag har funnit lämpligt att ej låta två eller flera elever dela en uppgift, utan varje elev får sitt eget arbete, varigenom han tvingas att stå på egna ben och ensam ansvara för det som presteras. Däremot får nybörjaren gärna rådföra sig med någon mer försigkommen elev, som arbetar inom närbesläktat område, t. ex. titreranalys, eller studera en tidigare utförd redogörelse inom likartat kapitel, t. ex. organisk elementaranalys, för att få teknik eller beräkningsmetod klarlagda. Likaså få eleverna gärna året innan deras eget arbete börjar besöka laboratoriet och åse de äldre kamraternas verksamhet samt åhöra deras utläggningar.

Av de uppgifter som mina elever bearbetat ha så gott som alla kunnat fullföljas på tillfredsställande sätt, och blott i något ytterst enstaka fall har det experimentella utförandet stött på alltför stora svarigheter eller elevens energi eller logiska skärpa ej hållit måttet. I det sist nämnda fallet har arbetet underkänts och elevens betyg i ämnet sjunkit, medan å andra sidan de väl utförda arbetena ofta något höjt betygen.

En uppgift som jag sedan några år tillbaka principiellt ej längre ger är att kvalitativt analysera en blandning av 10—12 joner, som i svårare fall kunna föreligga som fällningar. Dylika *analyser av sammansatta prov* vädja nämligen mer till den ungdomlige elevens detektiva instinkter och lust att samla poäng än till hans forskarintresse samt nedsjunka oftast till monotont följande av ett fixerat analysschema. Däremot kunna dessa i något förenklad form förekomma som frivilliga uppgifter i första ringen eller i realskolan, där elever stundom anhålla härom. Hos 35 elever som förr sysslade med dessa uppgifter såsom enskilt arbete blev emellertid medelvärdet av de rätt funna jonerna 84 procent, vilket får anses vara normal skicklighet på detta stadium. — Ej heller ger jag så enkla uppgifter som att framställa några *titrerlösningar,* utan att eleven sedan får någon användning av dessa, vilket är ungefär lika verklighetsfrämmande som att låta en person förfärdiga ett verktyg utan att därefter få bruka det. Titrerlösningarnas framställande och standardisering ingå som en självklar och därför ej särskilt omnämnd detalj i mina elevers arbetsuppgifter.

Bland de uppgifter som av mig givits, finnas emellertid många som visat sig lämpliga, varför till mina kollegers tjänst här angivas deras rubriker och viktigaste innehåll jämte antalet maskinskrivna foliosidor som redogörelserna omfatta, varigenom en ungefärlig uppfattning av deras omfång erhålles.

I. Uppgifter inom preparativ oorganisk kemi.

Framställning av krom och 26 kromföreningar samt monografi över krom, varvid de nämnda preparaten bilades, 34 sidor. *Studium av selen och framställning av ett trettiotal selenföreningar,* innefattande undersökning av selenvätebildningens hastighet vid olika surhetsgrad, titrimetriska bestämningar av selenväte, försök att framställa selenväte enligt ny metod, framställning av 28 bilagda preparat samt selencell, teoretiska utredningar med tillhörande diagrammer, 17 sidor. *Framställning av några titanföreningar samt undersökning av deras tekniska användbarhet,* omfattande framställning av trevärda och fyrvärda titanföreningar, emalj, glasyr, betning, 20 sidor. *Framställning av 28 komplexa oorganiska föreningar,* teoretiska utredningar, omfattande bl. a. elektrovalens, kovalens och koordinativ bindning samt fysikaliskt karakteristiska egenskaper, 28 bilagda preparat, 17 sidor. *Framställning av oorganiska färgämnen,* varvid bilades 12 mineralfärger samt en därmed målad oljetavla, 7 sidor. *Framställning och studium av kolloider,* där hos de framställda lösningarna undersöktes viskositet, kornstorlek, diffusion, elektriska egenskaper och stabilitet samt studerades adsorption, suspensioner och emulsioner, 24 sidor.

II. Uppgifter inom organisk kemi.

Syntes av ett tiotal organiska parfymämnen, bensylalkohol, bensoesyra, nitrobensol och sju estrar, 17 sidor. *Framställning av 25 organiska färgämnen,* nämligen nitrofärgerna pikrinsyra, martiusgult och naftolgult S, azofärgerna aminoazobensol, betanaftolorange, sudan I, metylorange, tropeolin OO, alisaringult GG, alisaringult R, krysamin G, alfanaftolazodifenylazoalfanaftol (!), ketonfärgerna alisaringult A och alisaringult C, antracenfärgerna alisarin och antragallol, kinonimidfärgen anilinsvart samt trifenylmetanfärgerna fuksin, anilinblått, fluorescein, eosin, resorcinortohomoftalein, gallein och coerulin, varjämte gjordes bestämning av halten kol, väte och kväve i krysamin G för bestämning av formeln, bilaga 25 färger i preparatrör jämte 21 därmed färgade tygprover, 30 sidor. I ett annat arbete med *likartad titel* framställdes ett fyrtiotal färger, däribland indigo, varå gjordes förbränningsanalyser för kontroll av formeln, bilaga 40 färger i preparatrör och 76 därmed färgade tygprover samt färgat trä, 33 sidor. *Framställning av tolv konsthartser,* nämligen av fenol och paraformaldehyd, av resorcin och formalin, av alfanaftol och formalin, av betanaftol och formalin, av urinämne och paraformaldehyd samt hartsernas färgning, varvid dessa bilades i etui, 21 sidor. *Framställning och studium av stridsgaser eller deras analoger,* varvid redogjordes för aktuella stridsgaser, framställdes bromaceton och undersöktes dess adsorption på aktivt kol, acetylklorid och dess förhållande till vatten, till ammoniak, till alkalier och till aktivt kol, urotropin och dess förmåga att binda acetylklorid, tiodiglykol, svavelsyradimma, aktiva kol ur olika material och deras olika adsorberande förmåga, bilaga 6 preparat, 23 sidor. *Framställning och rening av enzymet katalas samt studium av dess kinetik,* varvid enzymet framställdes ur hästlever och renades med dialys och adsorption på olika metallhydroxider, varjämte bestämdes dess temperaturkoefficient och temperaturoptimum för effektiviteten, 14 sidor. *Experimentella studier över enzymet lipas,* omfattande likartade undersökningsområden som i förra fallet jämte bestämning av stabiliteten, 8 sidor. *Jods inverkan på enzymet sackaras,* varvid studerades förgiftningsreaktioner hos enzymet för att söka bidraga till utredandet av dess sammansättning, 14 sidor (utfördes på Stockholms Högskolas biokemiska institut). *Undersökning av surhetsgradens betydelse för salivens förmåga att omvandla stärkelse till socker,* varvid försockringens hastighet följdes titrimetriskt vid varierade, puffrade surhetsgrader, varigenom erhölls diagram över sambandet mellan pH och hastigheten, 11 sidor. *Undersökning av de lämpligaste betingelserna för svavelvätebildning ur svavel, socker och jäst,* där reaktionens förlopp studerades titrimetriskt och varvid bestämdes optimalt pH, optimal temperatur och optimal tid, 5 sidor. *Polarimetrisk bestämning av reaktionshastigheter,* varvid dels bestämdes rörsockers inversionskonstant vid katalys med olika syror av varierande normalitet och temperatur, dels framställdes olika preparat av enzymet emulsin och jämfördes deras glukosavspaltande verkan på salicin vid olika temperaturer, 15 sidor. *Polarimetriska bestämningar av effektiviteten hos enzymet glukosidas,* varvid bestämdes tidskurvorna för emulsins inverkan på buffrade lösningar av salicin och amygdalin vid pH-värdena 3, 4, 5, 6, 7, 8, och vid temperaturerna 20, 30, 40, 50 grader för att utröna de optimala betingelserna för spaltningen, 7 sidor. *Vitaminerna och deras betydelse, experimentella bestämningar av margarins och paprikas vitaminhalt samt undersökning av hållbarheten hos vitamin C vid olika koncentrationer,* översikt av vitaminerna, deras förekomst, bestämning och kemiska struktur, avitaminoser, experimentella bestämningar (utförda å Stockholms Högskolas biokemiska institut) av halten vitamin A och C i margarin genom systematisk utfodring av c:a 100 unga råttor och studium av deras viktkurvor i förening med röntgenfotografering av varje djur, bestämning av halten vitamin C i ett handelns paprikapreparat genom utfodring av 20 marsvin med askorbinsyra, respektive paprika, och studium av djurens viktkurvor samt inre organ, bestämningar (utförda å läroverkets kemiska institution) av hållbarheten under ett halvt års tid hos olika lösningar av askorbinsyra och dess natriumsalt genom titrering, 21 sidor.[1]

III. Uppgifter inom analytisk kemi.

Elementaranalys av tre okända organiska substanser, varvid efter förövningar på ämnen med känd sammansättning bestämdes halten kol, väte, syre och kväve med Dennstedts förbränningsugn samt molekylvikterna, varur ämnenas formler beräknades (ämnena voro bärnstensyra, uretan och difenylamin), 9 sidor. *Födoämnesanalys,* kvalitativ och kvantitativ, varvid undersöktes smör, margarin, ost, ägg, fläsk, gädda, salt sill, potatis, bruna bönor, makaroner, vetebröd, franska bröd, äpplen och apelsiner och vari bestämdes halten fett, äggvita, socker, salt och aska samt surhetsgrad varjämte gjordes specialundersökning av mjölk, 30 sidor. *Undersökning av kolhydrater,* omfattande reduktion med Fehlings lösning, kvalitativa och kvantitativa sockerbestämningar i födoämnen, laktos i mjölk, stärkelse och dess hydrolys med syra och med enzym, prov på stärkelse i 12 födoämnen, framställning och prov på dextrin, hydrolys av cellulosa, jämförande diffusion, jäsning och dess produkter, 12 sidor. *Mjölkundersökningar,* omfattande bestämningar av specifik vikt, halten vatten, fett, kasein, socker, torrsubstans, fettfri torrsubstans och mineralbeståndsdelar, surhetsgrad, pastöriseringsprov, 14 sidor. Annat arbete med *samma titel* innehåller mikroskopisk undersökning, specifik vikt, utfällning av kasein med ättiksyra och med löpe, bestämning av fetthalt och bakteriehalt, påvisande av fosforsyra, framställning av mjölksocker, 13 sidor. *Kvantitativ analys av olika mjölsorter,* varvid i mjöl av vete, råg, korn och havre bestämdes halten fett, äggvita, kolhydrat och aska, 10 sidor. *Bestämning av nikotinhalten i olika tobaksmärken,* där nikotinprocenten bestämdes i cigarrer, cigarrcigarretter, cigarretter, piptobak, tuggtobak och snus av olika märken, 6 sidor (utgörande del av ett större arbete). *Vattenundersökningar,* omfattande bestämning av temporär och permanent hårdhet hos sex vatten från stockholmstrakten, kvantitativa analyser av tre vatten, vari bestämdes halten svavel, sulfat, klorid, nitrat, nitrit, fosfat, ammoniak, järn och mangan samt variationerna i salthalt och temperatur på ett flertal platser och på olika djup i vattensystemet Mälaren—Saltsjön från Lovö till Blockhusudden samt i Torsbyfjärden och Hårsfjärden, diagrammer och karta, 62 sidor. *Urinanalyser,* innehållande redogörelse över normala och patologiska beståndsdelar i urin, kvantitativa bestämningar av urinämne, urinsyra, hippursyra, klorid, surhetsgrad och specifik vikt hos elevens urin efter förtärande av stora mängder vanligt vatten eller salt vatten, efter fasta, efter svettdrivande motion i bastu och efter olika, närmare specificerad diet ävensom delvis motsvarande bestämningar i urin från häst, ko, svin, hund och katt, 27 sidor. *Undersökning av bergolja och dess destillationsprodukter,* där i oljan och i tre av dennas fraktioner samt i koksen bestämdes fysikaliska och kemiska konstanter samt 12 beståndsdelar kvantitativt, bilaga 18 preparat, 22 sidor. *Undersökning av mineralsmörjoljor,* varvid fyra oljor undersöktes med avseende på specifik vikt, viskositet, flampunkt, konsistens, vattenhalt, alkalihalt, asfalthalt, askhalt och koksrest, 14 sidor. *Kvalitativ och kvantitativ analys av stenkolstjära,* som fraktionerades och där i de fyra fraktionerna samt i becket bestämdes halten vatten, kol, svavel, bitumen, naftalin, paraffin, fenol, karbasol, pyridin, antracen och tiofen, 22 sidor. *Kvantitativ analys av vulkaniserat gummi,* omfattande bestämning av halten vatten, vattenlöslig substans, acetonlöslig substans, i paraffinolja olöslig substans, hårdasfalt, fritt svavel, bundet svavel, klor, äggvita, fritt kol samt aska, 14 sidor. *Analys av olika jordarter,* omfattande bestämningar av specifik vikt, surhetsgrad, porvolym, halten av grovjord, av finjord, av basiska ämnen, av fosfat, av humus och av vatten jämte prov på mangan, 13 sidor. *Analys av massagegyttja från Lannaskede kurort* med bestämning av halten vatten, koldioxid, svavel, kisel, kalium, natrium, järn och mangan, 15 sidor. *Mineralundersökningar och malmanalyser,* omfattande halten koldioxid i krita, i kalksten, i ortocerkalksten, i dolomit och i magnesit samt halten järn och mangan i fyra järnmalmer, 26 sidor. *Kvantitativ analys av två järnmalmer* med avseende på halten järn, mangan, kisel, fosfor och svavel, 11 sidor. *Kvantitativ analys av Bolidenmalm,* vari bestämdes halten svavel, kisel, arsenik, antimon, järn, koppar, bly, silver och guld, 23 sidor (delvis utförd i Boliden). *Mineralstudier,* kristallografiska undersökningar av ett stort antal mineral i Riksmuseets samlingar i förening med teoretisk utredning över röntgenanalys och lauediagram, förfärdigande med olika träkulor av två modeller över kristallers atomgitter, sexton mineralbestämningar, bestämning av halten koldioxid i åtta mineral jämte ett flertal fotografier och färglagda avbildningar, 48 sidor. *Kvantitativ analys av järnsorter,* omfattande analyser av vitt tackjärn, gjutjärn, svaveljärn och ferromangan, varvid bestämdes halten kol genom förbränning i dennstedtugn, mangan, kisel och fosfor, fotografier, 23 sidor. *Kvantitativ analys av produkter från kopparframställning,* varvid undersöktes malm, kisbränder, rostgods, tornsyra, kopparlut, ändlut, purple-ore, cementkoppar och raffinadkoppar och varvid i samtliga dessa ämnen bestämdes halten järn, järnoxid, zink, svavel, sulfat, svavelsyra, kiseldioxid, klor, klorväte, koppar i olika former samt specifik vikt, 48 sidor (delvis utförd i Hälsingborgs kopparraffinaderi). *Kvantitativ analys av tre legeringar,* i Roses, Woods och Lipowitz' legeringar bestämdes halten tenn, bly, kadmium och vismut, varvid varje legering analyserades tre gånger, 8 sidor. *Kvantitativ analys av fyra legeringar,* varvid bestämdes halten silver och koppar i silvermynt, nickel och koppar i nickelmynt, koppar i mässing samt tenn, bly, kadmium och vismut i Woods metall, varje bestämning utförd två gånger, 15 sidor. *Fysikalisk och kemisk undersökning av tolv lagerlegeringar,* innefattande kvantitativ analys av legeringar innehållande tenn, bly, antimon och arsenik samt bestämning av deras smältpunkter, specifika vikt, specifika värme och brinellhårdhet, 17 sidor. *Kvantitativ analys av ett kalciumpreparat från Pharmacia samt utredning om pH-mätningars användning,* där i preparatet bestämdes halten kalcium och fosfat, båda enligt två metoder, varvid gjordes 5 bestämningar på kalcium och 6 bestämningar på fosfat, och där av aciditetsmätningarna refererades användningar inom analytisk kemi, medicin, bakteriologi, celldelning, enzymverkan, jordlära, åkerbruk, vattenrening, pappersmassa, textilier, färgning och läderberedning, 20 sidor. *Kvalitativ analys av några toalettpreparat,* tandkräm, tandpulver, nagellack, hudkrämer och fotbadpulver, varvid huvudsakligen de oorganiska beståndsdelarna påvisades, 10 sidor. *Manganometriska och kromometriska titreringar,* bestämning av halten väteperoxid i handelsvara, kalcium i kalkspat, mangandioxid i brunsten, mangan i malm, krom i malm, järn i malm, i gyttja, i spik och i järnalun, antimon i stilmetall, renheten hos tekniska kvaliteter av kaliumnitrat, kaliumnitrit, kaliumpersulfat och blydioxid, 17 sidor. *Ett tiotal titreringar enligt acidimetrisk, alkalimetrisk, manganometrisk, jodometrisk och potentiometrisk metod,* omfattande teori, bestämning av temporär och permanent hårdhet hos vatten, halten mangan och järn i malm enligt två metoder, formaldehyd i handelsformalin, klor i klorkalk, fosforsyrans titreringsstadier, 16 sidor. *Tekniska tillämpningar av titreranalys,* innefattande framställning och standardisering av åtta titrerlösningar, bestämning av halten natriumkarbonat i teknisk soda, ättiksyra i handelns ättiksprit, temporär och permanent hårdhet, oxalsyra i handelspreparat, järn i malm enligt tre metoder, mangan i malm, mangandioxid i brunsten, klor i klorkalk enligt två metoder, antimon i kräkvinsten, formaldehyd i formalin, svavelväte i svavelvätevatten, 32 sidor. *Kolorimetriska kvantitativa analyser,* förövningar på kända lösningar, därefter i okända lösningar bestämning av mängderna tvåvärt och trevärt järn med tioglykolsyra och ammoniumrodanid, nickel med dimetylglyoxim, bly med svavelväte, titan med väteperoxid, alumin med aluminon, 16 sidor.

---

[1] En del av experimentmaterialet vid denna undersökning, liksom vid några av de övriga arbetena, har välvilligt ställts till förfogande av AB Pharmacia i Stockholm och av Apotekarnes Droghandels AB i Göteborg.

IV. Uppgifter inom fysikalisk kemi.

Bestämning av molekylvikter samt dissociationsgrader i lösningar, varvid med tre metoder bestämdes molekylvikterna hos antracen, koltetraklorid, eter, bensol, aceton, urinämne och rörsocker samt hos ett för eleven okänt ämne varjämte bestämdes dissociationsgraden hos sex olika utspädningar av kaliumklorid i vatten, 31 sidor. *Molekylviktbestämningar,* hos koltetraklorid och eter med volymmetoden, hos kloroform genom destillation med vattenånga, hos urinämne, naftalin och bensoesyra med kokpunktmetoden, hos urinämne och bensoesyra dessutom med fryspunktmetoden, hos kaliumklorid, kaliumbromid och kaliumjodid med fryspunkten i smält urinämne, 12 sidor. *Undersökningar över lågor, förbränningar och explosioner,* lågors sammansättning och kemiska egenskaper, lysande lågor med och utan närvaro av fasta partiklar, avskiljande av fasta partiklar ur lågor, förändring av ljusstyrkan, explosioner och deras förhindrande, 10 sidor (del av ett större arbete). *Undersökning av reaktionshastigheter,* inverkan av temperatur och koncentration på oxidation av jodidjoner till jod med väteperoxid, hydrolys av bensoldiazoniumklorid och etylacetat med olika syror, polarimetrisk bestämning av rörsockers inversion vid olika surhetsgrader, reaktionshastigheterna vid fotokemisk sönderdelning av jodoform samt vid jodbildning ur jodid och persulfat med och utan katalysatorer, 28 sidor. *Katalys,* undersökning av katalyser, orsakade av adsorberande kontaktsubstanser, av vatten, av lösta elektrolyter samt av enzymer, studium av mellanprodukter, kärnor och autokatalytiska reaktioner, mätning av reaktionshastigheter med och utan katalys, jämförelse mellan olika katalysatorers inverkan på kaliumklorats sönderfallande, 45 sidor. *Undersökningar över diffusion och osmos,* framställning av semipermeabla membraner, vätskeskikt som semipermeabelt membran, diffusion genom torra och fuktiga membraner, diffusionsfigurer, diffusionshastighetens beroende av temperatur och koncentration, fasta ämnens diffusion i gelatin, skiljande av kristalloid och kolloid med osmos, mätning av osmotiskt tryck, 27 sidor. *Undersökningar över fasta substansers förmåga att adsorbera gaser och lösta ämnen,* varvid studerades adsorptionsförmågan hos aktivt kol, träkol, benkol, kimrök, grafit, glas, jord, kaolin, talk, kiselgur, platina, aluminhydroxid, ferrihydroxid av olika framställningssätt samt filtrerpapper varjämte studeras värmeutveckling, kornstorlek och kromatografisk analys, 17 sidor. *Framställning och undersökning av kolloider,* varvid framställdes suspensoider, emulsoider, positiva och negativa kolloider samt undersöktes stabilitet, ytspänning, diffusion, dialys, elektrofores, adsorption, kapilläranalys samt geler, 15 sidor. *Undersökningar över kolloiders framställning och egenskaper,* framställning enligt kondensationsmetoden, dispersionsmetoden och ljusbågemetoden, undersökning av viskositet, kornstorlek, diffusion, adsorption, ytspänning, elektrisk laddning, faktorer som inverka på stabiliteten, kromatografisk analys, skyddskolloider, suspensoider och emulsoider, 24 sidor. *Fysikalisk-kemiska undersökningar av legeringar samt bestämning av halten järn och mangan i en järnmalm,* framställning av amalgamer, Woods legering, pyroforiskt järn samt silver ur silvernitrat, undersökning av smältpunktdiagram, metallkristaller i geler, »kvicksilverhjärtat», eloxering och färgning av alumin, bestämning av halten järn och mangan i malm enligt två metoder, 15 sidor. *Undersökning av några metallers utfällande med elektrisk ström,* dissociationsgrad, ledningsförmåga, överföringstal, jonhastighet, elektrometrisk mätning av surhetsgrader, elektrolytiska bad, galvanoplastik hos sex metaller vid olika surhetsgrader, 30 sidor. *Bestämning av några joners absoluta vandringshastighet i gelatinerad lösning,* 10 joner jämte teori, 12 sidor. *Elektrokemiska undersökningar av vattenlösningar,* specifik och ekvivalent ledningsförmåga, dissociationsgrad, överföringstal, sönderdelningsspänningar, jonhastighet, koncentrationsändringar vid elektrolys, förhållande i starka fält, stort antal diagram, 33 sidor. *Undersökning av elektromotoriska krafter, elektrometrisk bestämning av vätejonkoncentrationer samt upptagning av potentiometriska titreringskurvor,* teori, förfärdigande av tio element samt undersökning av deras elektromotoriska kraft och reversibilitet, förfärdigande av nifeackumulator, kvantitativ undersökning av olika depolariseringsmetoder, förfärdigande av kompensationspotentiometer samt skala till denna medelst buffertlösningar, potentiometriska titreringar av syror, halider och andra salter, bestämning av pH hos födoämnen, diagrammer, 41 sidor. *Undersökning av ljuskänsliga reaktioner,* såsom ferrisalt och oxalat, ferrisalt och ferricyanid, silversalter, tiourinämne och natriumnitroprussid, exponeringstidens inverkan, användning av luminoforplatta, 25 sidor. *Studium av fotokemiska reaktioner,* Ederska lösningen, kalium-natriumtartrat, jodoform, svavel, jod och ammoniumoxalat under inverkan av kvartslampa, 22 sidor. *Bromsilvergelatinemulsioner,* teori, framställning av fotografiska emulsioner och plåtar av olika känslighet, sensibilisering, upptagande av svärtningskurvor, 18 bilagor, 23 sidor. *Studier över fotografiskt positivmaterial med silversalter,* framställning och fotokemisk undersökning av silvernitratpapper, silverkloridpapper och modernt kopiepapper, jämförande svärtningsförsök, ovanligare kopieringsmetoder, 34 bilagor, 24 sidor. *Toning av bromsilverpapper enligt olika metoder,* direkt och indirekt svaveltoning, selentoning, ferrocyantoning, koppartoning, järntoning, nickeltoning och urantoning, 21 bilagor, 13 sidor.

V. Uppgifter inom teknisk kemi.

Tygfärgning enligt olika metoder och vid varierad surhetsgrad, varvid olika tygmaterial färgas med indigo, fuksin, kongorött, metylenblått, malakitgrönt, fluorescein och pikrinsyra med användning av substantiv färgning, basisk färgning, sur färgning, kypfärgning och färgning vid varierad surhetsgrad och varvid färgades 215 tyglappar, som bilades, 12 sidor. *Betmedels inverkan på olika färg- och tygsorter,* varvid olika tygsorter färgades med indigo, kongorött, metylenblått, malakitgrönt och tartrazin och varvid som betmedel prövades aluminacetat, blyacetat, ferrosulfat, ferrisulfat, kromsulfat och pyrogallussyra, bilaga 220 färgade lappar, 12 sidor. *Fläckurtagning på tyger,* då på ylle, bomull, linne och natursilke systematiskt prövades tolv olika fläckurtagningsmedel på fläckar av olika art, t. ex. bläck av olika sammansättning och färg, syror, baser, gräs, fett och tjära, varjämte temperaturens inverkan på fibrernas hållfasthet bestämdes genom tvättningar med lut av olika styrka, inalles undersöktes 324 fläckade och tvättade lappar av olika material vilka bilades, 21 sidor. *Framställning och färgning av konstsilke,* framställning enligt viskos-, acetat- och kopparammoniakmetoderna, färgning av stapelfiber, acetatsilke, alofan och diofan, bilaga kartong med 37 framställda och färgade prover, 20 sidor. *Samma titel,* teoretisk del, omfattande framställningsprinciper, egenskaper, färgning och statistik, experimentell del, omfattande behandling av sågspån och framställning härur av viskossilke, kopparsilke och acetatsilke samt dessas färgning med 17 olika färgmedel, varvid 9 betmedel prövades, bilaga kartong med 13 framställda halv- och helfabrikat samt 77 olikfärgade lappar, 23 sidor. *Framställning av textilmaterial ur äggviteämnen,* omfattande statistik, referat över nyaste industriella metoder, egna framställningar av cellulosaxantogenat ur sågspån, textilfibrer ur kasein från mjölk i blandning med xantogenat, ur fibrin från blod i blandning med xantogenat, framställning av ull ur alkalialbuminat i blandning med alkalicellulosa, ett flertal planscher och illustrationer, bilaga kartong med 12 mellanprodukter och prover, 15 sidor. *Framställning av råsocker ur betor samt rening av råsocker,* varvid även betornas sockerhalt bestämdes och råsockrets renhet höjdes från 43 till 97 procent, 15 sidor. *Vinjäsning,* omfattande ett stort antal jäsningar vid varierad halt av socker och näringssubstrat av olika slag samt vid varierad aciditet och temperatur, mätning av koldioxidutvecklingen samt alkoholbildningen och sockerhalten under jäsningens gång, 19 sidor. *Undersökning av alkoholjäsningens förlopp vid närvaro av vört som katalysator,* varvid variationerna i sockerhalt och alkoholhalt med tiden följdes vid och utan närvaro av vört, 13 sidor. *Kvantitativa undersökningar över vinjäsningens förlopp,* där socker förjästes till alkohol med pressjäst, varvid kvantitativt studerades alkoholhaltens och sockerhaltens variation med tiden samt surhetsgradens och temperaturens inverkan på jäsningen ävensom sockerartens betydelse, varjämte med vinjäst framställdes tre alkoholhaltiga viner av typen tokajer, madeira och haut-sauternes, 10 sidor. *Tvålindustrien ur kemisk* *synpunkt samt framställning och undersökning av tvålar,* teori, framställning av tvålar ur palmitin-, stearin- och oljesyra, förtvålning av talg, kokosfett och palmkärnfett, kvantitativ analys av sex handelstvålar med avseende på halten fettsyra och fritt alkali, bestämningar av deras förtvålningstal, jodtal och »titer», fotografier, 28 sidor (delvis utförd på kemisk-teknisk fabrik). *Tvål och andra tvättmedel jämte tvättförsök,* blekning av tyg, jämförande tvättningar av vita och färgade tyger av olika material samt nedfläckade av tjära, fett och sot med fyra av handelns tvättpulver, kvalitativ analys av dessa pulver, undersökning av temperaturens inverkan vid tvättning, kvalitativ analys av sex handelstvålar, egen framställning av tretton tvålar vilka bilades jämte 124 behandlade tyglappar, 53 sidor. *Kvantitativa analyser av tvättmedel och undersökning av deras effektivitet,* studium av tvättmedelsfabrik och tvättdemonstrationer genom besök, provtvättningar med sex av handelns tvättmedel, hållfasthetsprov på olika tygsorter efter tvättning med dessa vid varierad temperatur, analys av tre tvättmedel med avseende på halten vatten, fett, alkali och syra, bilaga 71 tvättade lappar, 22 sidor. *Födoämneskemi,* teoretisk behandling av kolhydrater, fetter och äggviteämnen, framställning av alkohol, ättiksyra och etylacetat, kvalitativ analys av ett tiotal födoämnen, bestämning av vattenhalten i åtta födoämnen, försök över födans sönderdelning, även enzymatiskt, undersökning av bakpulver, framställning av sju bakpulver, jämförande bakningsförsök med dessa samt med fyra av handelns bakpulver, bestämning av koldioxidutvecklingen hos de senare i samband med deras kvalitativa analys, potentiometrisk bestämning av deras surhetsgrad i lösning, bilaga 7 bakpulver samt 16 brödprover i kartong, 27 sidor. *Vattenrening och vattenanalys,* zeoliter, jämförande rening med kol av olika slag, kvantitativa undersökningar av gödselvatten med avseende på temporär och permanent hårdhet samt halten av ammoniak, fosfor, kalcium, magnesium, mangan, klorid, nitrat, nitrit, sulfat, svavelväte, avdunstningsrest och glödgningsförlust, 35 sidor. *Betongundersökningar,* där olika betonger framställdes, vari kvantitativt undersöktes vattenhaltens inverkan på temperaturstegring, struktur, styrka och volym, bilaga betongprover, 18 sidor. — *Amanuenstjänst vid laborationer,* varunder eleven vid de analysövningar som ett läsår förekommo vid de obligatoriska laborationerna i R II^{4} och R II^{3} skötte utdelningen av cirka 30 enkla prov och 8, respektive 6 slutprov per laborant samt rättade och protokollförde dessa, förde statistik över de enskilda jonernas svårighetsgrad, handledde likartade men frivilliga analysövningar med elever i R I^{4} samt de laboranter bland dessa som gjorde sammansatta prov (10—12 joner i varje prov) samt förberedde och ledde tre obligatoriska laborationer i sin egen klass R III^4, 14 sidor. — Slutligen ha genom vidsynt tillmötesgående från en kemisk storindustri några elever fått behandla aktuella uppgifter inom den *industriella kemiska forskningen* av i dag. Över dessa arbetens innehåll kunna dock här inga närmare redogörelser lämnas. Ej minst på grund av elevernas livliga intresse för dessa arbeten är det tydligt att just dylika aktuella uppgifter av påtagligt reellt värde äro idealiska ämnen för enskilda arbeten. Härtill kommer att nämnda storindustri brukat belöna dessa elevers flit och noggrannhet med välkomna penningpremier samt — liksom även enstaka andra kemiska industriföretag — anställa dem som biträdande laboratoriekemister under ferier.

* * *

Måhända får någon av mina kolleger vid genomläsandet av denna förteckning — omfattande mer än 80 arbeten på i medeltal 21 maskinskrivna foliosidor — intrycket att ämnena äro alltför *»svåra» för eleverna*? Mot denna uppfattning ber jag få påpeka att de ej äro skrivbordskonstruktioner utan att samtliga ha utförts av mina elever — stundom flera gånger — och att dessa, såsom av deras skriftliga redogörelser framgår, förstått dem, behandlat dem och löst dem på tillfredsställande och riktigt sätt. Totala antalet elever i de två högsta realringarna, som för mig läst kemi under de senaste sju läsåren, är 356. Av dessa valde 149 elever, dvs. 41 procent,[1] enskilt arbete i ämnet kemi, vilket ju ej tyder på att eleverna själva funnit de givna uppgifterna särdeles svåra eller motbjudande. Dessutom ha enstaka elever, som utfört enskilt arbete i annat ämne, anhållit att få utföra extra arbete i kemi. Läsåret 1939—40 hade jag sammanlagt 38 elever i de två högsta realringarna, vilka tillsammans presterat 25 enskilda kemiska arbeten, bestyrkande att uppgifterna ej uppfattas som svåra. — Naturligtvis måste läraren ibland bidraga med råd och dåd, i synnerhet vid arbetets början, och de teoretiska sidorna måste klarläggas för eleven i den mån han stöter på obekanta förhållanden. Härigenom bli svårigheterna för eleven ej större än att han övervinner dem, varigenom hans självförtroende och hans förmåga att planlägga sin verksamhet samt draga logiska slutsatser växa på ett högst påtagligt och glädjande sätt. För elevens andliga utveckling och mognad spelar det enskilda arbetet ofta en avgörande roll.

---

[1] Medelvärdet för landets alla realgymnasier var läsåret 1938—39 enligt lektor Wetterblad cirka 15 procent i kemi.

Däremot kan möjligen en eller annan av uppgifterna vara *»svår» för läraren* i den meningen att han måste studera och sätta sig in i ämnesområden som han tidigare kanske ej alls sysslat med och vilkas teorier eller metodik han ej fått tillfälle att lära känna under sina akademiska kurser. Men dessa hans nya studier bliva ingalunda bortkastade utan stimulera honom i hans dagliga gärning och giva honom vidgade utblickar över kemien och dennas allt mångsidigare tillämpningar. De nya synpunkterna och kunskaperna komma honom till godo i form av rikare och effektivare undervisning, honom själv till glädje och eleverna till gagn. Följandet av eleverna i dessa deras arbeten motverkar att läraren stelnar i gamla och alltmer förtorkade kurser och blir för honom ett föryngringens ferment.

Vid lösandet av arbetsuppgifter av den art som här ifrågasatts måste naturligtvis läraren och eleverna ha tillgång till en hel del *litteratur*. Enär utrymmet förbjuder någon utförligare lista över lämpliga arbeten, vill jag slutligen här blott nämna några få men innehållsrika och mångsidigt användbara böcker, som lärare och elev gemensamt kunna studera och som härmed rekommenderas till inköp för läroverkens kemiska institutioner. Cumming and Kay, Quantitative Chemical Analysis, 15 s.; van Klooster, Lecture and Laboratory Experiments in Physical Chemistry, 3 doll.; Taylor, Elementary Practical Physical Chemistry, 16 s.; Jasper, Laboratory Methods of Physical Chemistry, 2,50 doll.; Smith-Mess, Modern Experimental Chemistry, 1 doll.; Brownlee-Fuller-Hancock-Whitsit, Experiments in the Chemistry of Common Things, 0,60 doll.; Gatterman-Wieland, Die Praxis des organischen Chemikers, 12 RM; Hessenland, Praktikum der gewerblichen Chemie, 16 RM; Bujard-Baier, Hilfsbuch für Nahrungsmittelchemiker, 18,90 RM; Kordatzki, Taschenbuch der praktischen pH-Messung, 8 RM; Leonhardt, Wehrchemie, II. Teil, 4,40 RM. — Dessutom tidskriften Journal of Chemical Education, 3 dollar plus porto, som med tolv nummer årligen på sammanlagt cirka 600 stora och innehållsrika sidor ger många goda uppslag såväl rörande uppgifter för enskilt arbete som inom övriga områden av den kemiska undervisningen ävensom litteraturanmälningar.

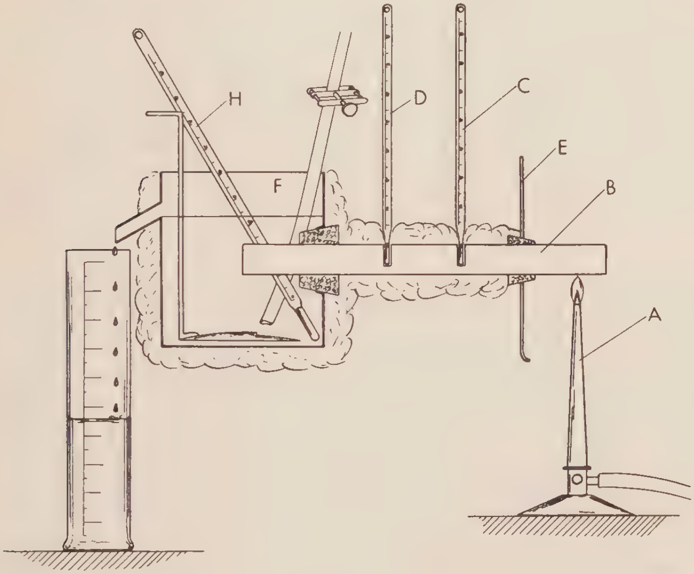
Apparat för bestämning av specifika värmeledningsförmågan för metaller.

Av **GÖSTA FUNKE.**

Värmets ledning är ett för en tekniker mycket viktigt kapitel. I allmänhet torde det väl vid läroverken endast kvalitativt behandlas, vilket nog är skada även med hänsyn till att värmets ledning och elektricitetens ju följa analoga lagar, samt med tanke på att problemet med enkla medel kan behandlas på en laboration.

I formeln $q = \frac{\lambda \cdot a \cdot \Delta t}{l}$ är q antalet cal, som per sek genomströmmar en ledare av längden l cm och arean a cm², då temperaturfallet är Δt; λ är specifika värmeledningsförmågan. Figuren visar ett sätt varpå λ experimentellt kan bestämmas. Värmekällan är en liten sticklåga vid A. Värmet ledes genom metallcylindern B (c:a 2 cm diameter) förbi termometrarna C och D, som äro inpassade i urborrningar i metallen. För att åstadkomma god värmekontakt äro hålen fyllda med kvicksilver. Skillnaden i temperatur hos termometrarna ger Δt, och l är deras avstånd (5,0 cm). B är isolerad med bomull, som skyddas för lågan av plåten E. Värmet fortsätter sin väg in i kalorimetern F, vilken genom vatten, som får rinna till genom en hävert från en hink (15 l), hålles *noga* vid rumstemperatur. Termometrarna i hinken och kalorimetern måste vara graderade i $^1/_{10}$ grader, C och D däremot i hela grader. Genom att reglera sticklågan och vattentillströmningen kan systemet bringas i jämvikt (tar c:a en halvtimme). Oundvikliga variationer i termometerutslagen utjämnas genom att alla fyra avläsas med jämna och täta mellanrum och medelvärdesbildning. Det utrinnande vattnet uppfångas under uppmätt tid i ett mätglas. Det genomströmmade värmet återfinnes i mätglaset, eftersom kalorimeterns F temperatur är oförändrad. För en apparat med figurens dimensioner äro lämpliga värden på temperaturen vid C: För järn 65°, för mässing 45° och för koppar 35°. Vattnet i hinken bör ha en temperatur 2° à 3° under rumstemperaturen. På grund av dess stora massa förändras dess temperatur knappast under de få minuter, som själva försöket varar. Laborationen medhinnes väl på två timmar, om den preparerats på förhand.

Följande värden gällande för koppar äro hämtade ur ett elevprotokoll. Termometern C $37^\circ{,}1$, D $29^\circ{,}8$, temperaturen i kalorimetern $16^\circ{,}53$ och i hinken $13^\circ{,}33$. Under 210 sek uppsamlades i mätglaset 243 cm^3 utrinnande vatten; q blir alltså $3{,}70$ cal/sek. Kopparstångens diameter var $19{,}0$ mm, varav $a = 2{,}83$ cm^2 och $\lambda = \frac{3{,}70 \cdot 5{,}0}{7{,}3 \cdot 2{,}83} = 0{,}90$.



Analogin med $I = \frac{V}{R}$ framgår bättre, om formeln skrives $q = \frac{\Delta t}{l\,\lambda \cdot a}$. Försöket torde även ge en mycket konkret illustration till skillnaden mellan potential och spänning, om termometerutslagen vid C och D var för sig jämföras med potentialer, under det att båda termometrarna tillsammans utgöra kretsens »voltmeter».

Elektriska rullgardinen.

Man har ibland använt en hopfällbar papperslykta för att på ett enkelt och påtagligt sätt visa kvalitativt, hur en konduktors potential vid konstant laddning ändrar sig med kapaciteten. Emellertid är metoden med lyktan icke pålitlig, vilket vid något tillfälle har framhållits i denna tidskrift. Däremot klickar aldrig den något gammalmodiga anordning, som går under benämningen elektriska rullgardinen. Det går lätt att improvisera den, om den skulle saknas i apparatsamlingen.

Man skaffar sig ett rektangulärt »metallpapper», c:a 40 cm i längd, och fäster dess ena kortända (med syndetikon) mitt på en ebonitstav.

Motstående kortända vikes upp en bit och klistras ihop till ett rör, i vilket man skjuter in en blyremsa som gardinkäpp. Här nere fäster man även ett par små flädermärgspendlar. Ebonitstavens ena ända fästes med lagom friktion i en stativklämma, vilken får göra tjänst som ett lager, när staven vrides runt. Kringvridningen sker bekvämt, om man förser stavens andra ända med en träbit som vev. Man tillför den nedfällda gardinen en sådan laddning, att flädermärgskulorna göra ett helt litet utslag. Detta förstoras kraftigt, under det att gardinen rullas upp.

T. Edqvist.

Ett par enkla bestämningar av ekvivalentvikter.

Magnesium: Ett 40 mm långt, vanligt magnesiumband vikes dubbelt och omlindas med 4 varv isolerad 0,5 mm koppartråd. I ett 25 cm^3, smalt mätglas hälles 2-normal saltsyra och — närmast mynningen — vatten. Om en 0,4 mm gummiskiva sedan sträckes över mynningen, kan röret bekvämt placeras i upp- och nedvänd ställning med mynningen i en skål (8—10 cm diam.) med vatten. Bandet instickes under mätglaset. — Eventuellt kan man använda 8 cm magnesium och ett 50 cm^3 mätglas.

Kalcium: Ett stycke kalcium lägges på ett stadigt städ och hamras något platt, varefter det kan sönderdelas med mejsel och hammare och slutligen med en avbitartång. Detta göres eventuellt före lektionens början. Bitarna utdelas, kanterna putsas med en sax och sidorna skrapas med en kniv. Vikten på varje bit 250—300 mg bestämmes så noga som möjligt. Man använder en något större skål än i föregående försök och ett 200 cm^3 mätglas med 0,5-normal saltsyra och vatten. Mätglaset placeras som ovan beskrivits och kalciumbiten inskjutes raskt under mynningen på mätglaset, som därefter skall beröra skålens botten. Eventuellt stänges glasets pip med en träpinne. — Man bortser från den obetydliga mängd vätgas, som går förlorad, när kalciumbiten inskjutes. Vägningen är den ojämförligt största felkällan, varför det är bättre men ej nödvändigt att använda större kalciumbit och mätglas.

Försöken giva acceptabla värden och passa som kemilaborationer i klass 4^5 eller 3^4.

Alfred Nilsson.

Bokanmälningar.

Matematisk problemsamling. Seminarie- o. tentamensproblem (2-betygskursen) givna vid Lunds universitet, 66 sid. (duplicerad), kr. 5: —; erhålles från Lunds studentkårs Intressebyrå.

De läroböcker, som användas vid våra universitet och högskolor, innehålla i regel icke tillräckligt antal övningsexempel och de problemsamlingar, som äro i användning, fylla ej helt denna brist, då de endast delvis äro anpassade efter våra lärokurser. Det är därför med intresse man tar del av föreliggande stencilerade samling, innehållande seminarie- och tentamensproblem, som givits vid undervisningen vid Lunds universitet. Redigeringen och bearbetningen av samlingen har utförts av fil. mag. C. E. Fröberg, fil. mag. M. Johansson, fil. mag. E. Staffansson och fil. lic. B. Svensson.

Samlingen är närmast avsedd för 2-betyg, och de olika kursområdena äro ganska allsidigt representerade. Särskilt rikligt företrädda äro kapitlen serier (41 ex.) och rymdanalys (60 ex.). Determinantteorin (2 ex.) är sparsammast representerad. Uppgifterna äro av växlande svårighetsgrad men genomgående nyttiga. Boken innehåller facit, som i allmänhet är korrekt. Endast ett ringa antal svar giva anledning till anmärkningar. De anvisningar till lösningar, som lämnas, äro mycket få, vilket förefaller mig förtjänstfullt, då bokens uppgift bör vara att lämna material till självverksamhet och ej att lämna färdiga lösningar, den mindre arbetsamme till tjänst.

Problemen rekommenderas varmt till alla, som förbereda sig till 2-betyg i matematik. Det är att hoppas, att samlingen röner en sådan uppmuntran, att den snart nog kan kompletteras med en avdelning, avsedd för aspiranter på 1-betyg, vilket betyg fått större frekvens än förut genom inrättandet av statsvetenskaplig examen.[1]

Arvid Uhler.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 17, 1939, 231 s. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavg. kr. 10, medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Svartbäcksg. 3, Uppsala.

De olika årgångarna av »Kosmos» bilda småningom tillsammans ett värdefullt encyklopediskt verk för fysiken och angränsande discipliner. I band 17 (1939) föreligger åter ett knippe välskrivna uppsatser på skilda områden.

---

[1] En dylik problemsamling har utkommit under sommaren 1940 och kommer att anmälas i dec.-häftet.

Fjolårets nobelpristagare i fysik, den amerikanske forskaren E. O. Lawrence, presenteras av fil. dr Anna Beckman i en artikel, som väsentligen formar sig till en kort beskrivning av cyklotronen, dess utveckling och de resultat, som uppnåtts med densamma såväl för kärnfysikens vidkommande som ock för studium av användbarheten av detta märkliga instrument inom medicinen och fysiologien. Fil. lic. E. Fredlund beskriver den nyare akustikens utveckling och landvinningar, dock med undantag av ultraakustiken, som tidigare behandlats särskilt i ett föregående band av »Kosmos». Han ger exakta definitioner av de storheter, den moderna akustiken arbetar med, anger sambandet mellan dem och beskriver de viktigaste metoderna för deras uppmätning. Olika förfaranden för analys av ljud av skilda slag, såsom språkljud och musikaliska toner, behandlas, och nyare undersökningar av ljuduppfattningen i det mänskliga örat beröras. I en uppsats om fotoelementen beskriver fil. dr A. E. Sandström de förekommande typerna, teorierna för deras verkningssätt samt deras egenskaper och användning under olika betingelser. Otvivelaktigt fyller denna artikel ett behov. Den innehåller trots sin korthet allt väsentligt om dessa instrument, som fått allt mera växande betydelse men tidigare endast i ringa utsträckning behandlats i svenskspråkig litteratur. Prof. G. Borelius skriver om ordningsomvandlingar i legeringar, d. v. s. om det fenomen, att legeringar, som vid högre temperatur innehålla de ingående atomslagen oordnat placerade i atomgittret, vid sänkning av temperaturen övergå till en mera ordnad fördelning. De olika fysikaliska egenskaper, som bero av ordningstillståndet och som kunna tjäna att bestämma detta tillstånd skildras, och de olika slagen av strukturer, som uppkomma, beskrivas. Ett värdefullt arbete för uppklarandet av dessa förhållanden såväl experimentellt som teoretiskt har utförts inte minst av prof. Borelius själv och av hans medarbetare. Nyare problem inom isotopforskningen behandlas av prof. E. Hulthén. Särskilt ingående beskrivas de intressanta och aktuella metoderna för separation av isotoperna, som utvecklats och delvis fullkomnats i synnerhet under de senaste åren. På dessa problem har prof. Hulthén själv kommit in i samband med sina undersökningar över molekylernas spektra. Prof. Waller lämnar en utförlig skildring av de framsteg, som på senare tid gjorts inom teorien för metallernas egenskaper, ett område, till vars utveckling prof. Waller själv verksamt bidragit. I uppsatsen behandlas den roll, elektronerna spela inom metallerna, och de resultat, vartill tillämpandet av den nyare kvantumteorien fört. En andra del är avsedd att inflyta i nästa band av »Kosmos». Det föreliggande bandet innehåller även en geofysisk artikel, författad av fil. dr K. Molin. I denna ges en sammanfattning av de viktigaste resultaten av de inklinationsbestämningar över hela Sverige, som under åren 1928—31 utförts genom Sveriges Geologiska Undersökning. Bestämningarna av deklinationen vid samma uppmätning ha tidigare skildrats av författaren i »Kosmos» (bd 14, 1936). Man får ett starkt intryck av noggrannheten och omfattningen av detta såväl teoretiskt som praktiskt värdefulla arbete.

Nils Ryde.

J. K. Eriksen, *Fysik for Realklassen,* I Varmelære, 37 s., II Elektricitet, 60 s., III Astronomi (tils. m. P. Pedersen), 58 s., J. H. Schultz Forlag, Kbhvn 1939.

Man kan inte ta miste på att en mycket erfaren undervisare har gjort dessa böcker. Metropolitanskolens energiske huvudlärare i fysik, lektor J. K. Eriksen, är också en känd och uppskattad läroboksförfattare i sitt hemland.

Efter sin Fysik for Mellemskolen (rec. i denna tidskrift 1938) har han nu kommit med en tredelad lärokurs för den s. k. Realklassen. Mellemskoleböckernas förtjänster återfinnas här i accentuerad grad. Kompositionen är fast, framställningen utmärkes av överskådlighet och klarhet. I en mängd detaljer, icke minst beträffande valet av illustrationer, märker man förf:s säkra omdöme och hans strävan efter effektivitet med enkla medel. Någon gång kan den formella stramheten utmynna i en viss schematiserande torrhet. Kanske det var detta, som en gång kom ett par danska kolleger att beteckna Eriksens läroböcker som »svåra». Jag finner för min del uttalandet malplacerat. Det är icke alltid bokens fel, om den verkar svår vid undervisningen. Icke ens det bästa instrument fungerar till belåtenhet, med mindre man använder de riktiga handgreppen på det.

Förf. har repetitionsvis tagit med rätt mycket stoff från Mellemskolens kurser, vilket nog är välbetänkt. Detta framlägges mest i form av laborationsövningar med utförliga anvisningar för den kvantitativa behandlingen.

Förhållandevis stort utrymme har ägnats åt nyare kursmoment. I värmeläran behandlas »Kinetisk Molekylteori» på drygt 4 sidor med 4 figurer, och i elektricitetsläran finns ett kapitel »Ioner og Elektroner» på icke mindre än 6 sidor med 7 illustrationer. »Ioner og Elektroner er omtalt ret udførligt, da dette Emne efter min Erfaring i høj Grad har Elevernes Interesse, og da instruktive Forsøg kan udføres med smaa Midler», säger förf. i förordet.

T. Edqvist.

STIG VEIBEL, *Kemien i Danmark,* I. Kemiens Historie i Danmark. Nyt Nordiskt Forlag, København 1939, 250 s., kr. 8: 50.

Köpenhamns universitet upprättades år 1470, men någon självständig kemisk forskning eller undervisning kan man givetvis inte räkna med under den därpå närmast följande tiden. Efter en kort tid av svårt förfall i början av 1500-talet återupprättades universitetet år 1537, och kemi lästes nu, men endast som en disciplin inom medicinen och av professorerna i detta ämne. Men samtidigt var kemiens studium av stort intresse även ur en annan praktisk synpunkt än den medicinska; den hade ett praktiskt ändamål, som låg dåtidens furstar, även de danska, varmt om hjärtat, nämligen som medel för guldmakeriet. Den förvärvade sig därigenom ett värdefullt stöd från högsta ort och kunde utvecklas snabbare än eljest säkerligen hade varit fallet.

1600-talet betecknar en guldålder för de naturvetenskapliga ämnena vid det danska universitetet. Kemi övades flitigt, ehuru huvudsakligen för praktiska ändamål, såväl vid universitetet som på herremännens gårdar, och som ett första tecken till att kemien nu höll på att arbeta sig fram till en självständig ställning kan man anteckna, att Oluff Borch 1660 utnämndes till professor vid universitetet med uppgift att undervisa bl. a. i kemi, tidigare som nämnt en uppgift för någon av medicinarna. Under 1700-talet befästes kemiens ställning ytterligare, alkemien och annan praktisk kemi trädde i bakgrunden. Omkring 1780 fick universitetet på initiativ av M. T. Brünnich, professor i historia naturalis, sitt första kemiska laboratorium — ett i botaniska trädgården beläget drivhus, 16 alnar långt, 8 alnar brett, till vars omdaning konungens kassa utanordnade 688 rdl, 1 mk, 12 sk.

Slutet av 1700-talet kännetecknades även i Danmark av striden mellan Stahls flogistonteori och Lavoisiers oxidationsteori, en strid, som var avgjord, då H. C. Ørsted 1805 utnämndes till professor extraordinarius i fysik med skyldighet att examinera både i fysik och kemi. Emellertid var ju Ørsted huvudsakligen fysiker, och de kemiska studierna vid universitetet togo fart först omkring 1821, då W. C. Zeise utnämndes till e. o. professor i kemi samtidigt med att genom Ørsteds ansträngningar ett nytt laboratorium upprättats som ersättning för det gamla Brünnich'ska.

1829 upprättades den Polytekniske Læreanstalt som en avdelning av universitetet, en förbindelse, som beträffande kemien ännu äger bestånd, ehuru anstalterna i övrigt äro skilda.

Med Ørsted och ännu mer med Zeise tog den kemiska forskningen i Danmark sin egentliga början. Zeise var en skicklig och noggrann kemist; han har upptäckt och undersökt merkaptanerna, och hans gedigna undersökningar över vissa organiska platinaföreningar avgjorde striden mellan de s. k. etyl- och eterinteorierna till den förras förmån.

Under senare hälften av 1800-talet och vidare fram till våra dagar har den kemiska forskningen och den högre undervisningen i kemi i Danmark haft en blomstringsperiod, som inger odelad aktning. Det är ett i förhållande till landets storlek imponerande antal forskare av mycket hög rang, som Danmark med berättigad stolthet kan hänvisa till. Främst bland dem står väl Julius Thomsen, de termokemiska mätningarnas mästare. S. M. Jörgensen ägnade sitt liv åt de metallammoniakaliska föreningarna, och även om hans uppfattning av deras konstitution måste ge vika för Werners teorier, bevara hans arbeten ännu i dag sitt värde tack vare den noggrannhet och absoluta tillförlitlighet, som utmärka dem. Bland de hädangångna må vidare nämnas H. Topsøe, kristallograf, Johan Kjeldahl, vars kvävebestämningsmetod överallt är i dagligt bruk, Odin Christensen, S. P. L. Sörensen, banbrytare genom sina arbeten över vätejonkoncentrationer och vätejonexponenten. Här må också nämnas J. C. Jacobsen, som genom att upprätta Carlsbergslaboratoriet och instifta Carlsbergsfonden inskrivit sitt namn i den danska kemiska forskningens historia.

De nu verksamma danska kemisterna upprätthålla värdigt sitt lands traditioner. C. S. Biilmann, S. Orla-Jensen, J. N. Brønsted och N. Bjerrum äro namn, välkända för alla kemister.

Bland åtgärder, ägnade att befordra kemisk forskning i Danmark, bör slutligen nämnas bildandet av Dansk Kemisk Forening år 1879. Föreningen omfattar såväl vetenskapligt som tekniskt arbetande kemister; den firade sitt 50-års jubileum 1929 och beslöt då utgiva en historik över kemien i Danmark. Det är detta arbete, varur här ovan några glimtar givits. Det är avsett att följas av en andra del, innehållande en bibliografi över av danska kemister publicerade undersökningar. Veibels arbete grundar sig på ingående och säkert mödosamma studier; det är rikt dokumenterat och ger en klar och fängslande bild av ämnet. En jämförelse med Sverige visar först och främst att vi här sakna en den svenska kemiens historia, men att man även utan en sådan torde kunna fastslå, att vår äldre kemiska historia, alltså före Torbern Bergman och Scheele, är mycket fattigare än den till tiden motsvarande danska. Det beror väl på de olika avstånden till den tidens av nordbor frekventerade utländska universitet, Padua, Köln, Basel, Montpellier o. a. Möjligen bör ett undantag göras för den metallurgiska kemien, som här i landet inte saknade fruktbar jordmån eller praktiska problem av stor betydelse.

Gunnar Starck.

F. G. Mann-B. C. Saunders, *Practical Organic Chemistry.* Longmans, Green and Co., New York 1939. 418 s., 2: 75 doll.

Efter en inledande del, behandlande allmän experimentell teknik, vidtager en rikhaltig samling typiska, preparativa experiment, innehållande teoretisk uppläggning och detaljerad arbetsbeskrivning, stundom åtföljd av diskussion över olika metoder. Därpå vidtager en avdelning, innehållande gången för organiska föreningars identifiering genom kvalitativ analys, åtföljd av metoder för deras kvantitativa analys jämte molekylviktbestämningar, varefter boken avslutas med en samling enkla enzymreaktioner.

Tack vare de noggranna beskrivningarna kunna åtminstone ett trettiotal av synteserna utan svårighet utföras av en händig och intresserad gymnasist i form av enskilt arbete, liksom även några av de enzymatiska experimenten. Dessa senare kunna delvis utnyttjas även av lärare i kemi och biologi för belysande av detta i skolkursen stundom föga beaktade kapitel. *E. Nordefeldt.*

H. Staudinger-W. Kern, *Anleitung zur organischen qualitativen Analyse.* Julius Springer, Berlin 1939. 157 s., RM 6: 90.

Enär kvalitativ analys av organiska ämnen i blandning — stundom även identifiering av en enstaka substans — är ett betydligt svårare och mer tidskrävande företag än en motsvarande oorganisk analys, torde kunskap häri knappast fordras i svenska akademiska examina och naturligtvis ej alls förekomma inom läroverkens kurser. Att föreliggande arbete — som sedan ett flertal år användes som laboratoriebok vid tyska universitetet och är översatt till bl. a. engelska och franska — dock här i korthet omnämnes, har sin grund i att dess sammanfattande analystabeller synas så pass överskådliga och enkla, att man möjligen kan våga sätta boken i händerna på en energisk gymnasist som vill ägna sig åt organisk analys såsom enskilt arbete. I stället för att som vid akademiskt arbete är brukligt analysera en blandning av 3—5 substanser torde man dock böra nöja sig med 2—3 ämnen av typisk och enkel art, vilkas påvisande ej bör bereda eleven alltför stora svårigheter. Det kan vara intressant att göra ett försök! *E. Nordefeldt.*

C. Schmidt-F. W. Allen, *Fundamentals of Biochemistry with Laboratory Experiments.* McGraw-Hill Book Co., New York and London 1938. 388 s., 3 doll.

Boken, tillhörande den förnämliga International Chemical Series, omfattar dels en välordnad framställning av de många biokemiska fakta, dock ej kolloidkemi, som kunna intressera en blivande läkare och fysiolog, dels ett 60-tal laboratorieexperiment för den enskilde eleven jämte ett 40-tal speciella experiment för en grupp av två eller flera elever. Noggranna beskrivningar jämte allmänna direktiv rörande kemisk teknik och resultatens siffermässiga behandling underlätta i hög grad det experimentella arbetet.

Ehuru närmast avsedd för medicinska universitetsstudier, blir boken tack vare det ovanligt klara och översiktliga framställningssättet en högst intressant lektyr även för den gymnasielärare i kemi och biologi, som söker tillförlitlig upplysning rörande vetenskapens nuvarande ståndpunkt inom olika områden av biokemien, t. ex. enzym-, hormon- och vitaminläran. Bland experimenten har anmälaren vid gymnasielaborationer med gott resultat använt ett flertal, t. ex. rörande urinanalyser och kolhydratbestämningar. Sitt kanske påtagligaste värde vid skolundervisningen har boken emellertid som underlag för enskilda arbeten i kemi och biologi, där den ger rika uppslag för blivande medicinare såväl i teoretiskt som i experimentellt avseende. *E. Nordefeldt.*

T. R. Hogness-W. C. Johnson, *Elementary Principles of Qualitative Analysis.* Henry Holt and Co., New York 1938, 325 s., 1: 40 doll.

Bland de många engelskspråkiga handledningar i kvalitativ oorganisk analys som de senaste åren framträtt, synes för anmälaren det föreliggande arbetet stå bland de främsta. Hela framställningen fylles av välgörande klarhet och fordrar blott elementära förkunskaper i kemi och matematik. Intressanta och väl illustrerade utredningar över t. ex. polaritet, hydratisering, kemisk jämvikt, massverkans lag, reaktionshastighet, hydrolys, komplexbildning, amfoteri etc. bilda bokens fundamentala och största avdelning, vilken ytterligare inpräntas genom en stor samling trevligt valda frågor och räkneuppgifter, varav några i detalj förklaras och matematiskt behandlas.

Efter denna teoretiska del följer den praktiska analysen, vilken för de 15 katjonerna börjar med alkaligruppen, för att över silver- koppar- arsenik- alumin- och zinkgrupperna avslutas med alkaliska jordmetaller, varefter de blott 5 anjonerna behandlas. Volymen hos utgångslösningen är reducerad till 3 ml, innehållande endast 5—15 mg av varje salt. Denna förbluffande lilla vätskevolym analyseras med en halvmikroteknik, där provrör och dropprör äro av motsvarande minimala storlek, varigenom eleven tvingas till renlighet och noggrann arbetsteknik, samtidigt som tiden i hög grad nedbringas samt materialåtgång och kostnad reduceras.

För en kemilärare ligger bokens stora värde framför allt i den beundransvärt väl skrivna teoretiska delen, som åtminstone för anmälaren utgjort en högst intressant lektyr. *E. Nordefeldt.*

Gradualavhandlingar.[1]

CARL-ERIK LIND, *Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins.* Disp. i Uppsala 22 maj 1940. Opponenter: docent HARALD BERGSTRÖM och fil. dr GUNNAR BILLING.

Avhandlingen innehåller talteoretiska undersökningar över förekomsten av rationella punkter på kubiska kurvor av normalformen

$$\xi^3 - A\xi - B = \eta^2. \tag{1}$$

Härvid tages ordet rationell i sin allmännare betydelse: tillhörande ett godtyckligt givet rationalitetsområde.

I kap. I lämnas en översikt över tidigare resultat. Drages tangenten i en rationell punkt på kurvan (1), så skär denna tangent i allmänhet kurvan i en ny rationell punkt; tangenten i sistnämnda punkt skär kurvan i ännu en rationell punkt etc. Om man vid denna konstruktion återkommer till en tidigare erhållen punkt, föreligger ett system *exceptionella* punkter, i annat fall ett system *ordinära* punkter. En *exceptionell kurva* är en sådan, vars alla rationella punkter äro exceptionella.

Förf. betraktar huvudsakligen sådana kurvor (1), vilkas vänstra led är reducibelt. Varje sådan kurva kan lineärt transformeras till formen

$$x^3 + Mx^2 + Nx = y^2. \tag{2}$$

Kurvan (2) har alltid ett jämnt antal exceptionella punkter — den har alltid minst två sådana, nämligen origo och den oändligt avlägsna punkten.

I kap. II angives ett samband mellan kurvan (2) och den analoga

$$x^3 - 2Mx^2 + (M^2 - 4N)x = y^2, \tag{3}$$

vilket består däri, att ur en rationell punkt på en av kurvorna kan härledas en rationell punkt på den andra.

I kap. III—VII betraktas endast det vanliga rationalitetsområdet $k(1)$. Med hjälp av sambandet mellan kurvorna (2) och (3) visas i kap. III, att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att dessa kurvor skola vara exceptionella är att vissa diofantiska ekvationer av typen

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$$AX^4 + BX^2Y^2 + CY^4 = DZ^2 \qquad (4)$$

sakna lösning i hela rationella tal.

I kap. IV undersöker förf. förekomsten av exeptionella punkter på kurvan (2) och fastställer nödvändiga och tillräckliga villkor för att antalet sådana punkter skall vara delbart med 4, 6, 8, 10, 12 och 16. Vidare visas, att detta antal ej kan vara delbart med 20, 24 eller 32.

I kap. V uppställas några hjälpsatser om kvadratiska och bikvadratiska rester, med vilkas hjälp det är möjligt att i kap. VI uppställa flera förut ej kända lösningsvillkor för ekvationen (4), medan för några tidigare kända nya enkla bevis erhållas.

I kap. VII anges exempel på exceptionella kurvor av olika typer. Särskilt undersökas härvid kurvor av typerna

$$\xi^3 - A\xi = \eta^2 \text{ och } \xi^3 + 1 = P\eta^2.$$

Numeriska exempel givas vidare på kurvor med exakt 6, 8, 10 och 12 rationella punkter.

I sista kapitlet, kap. VIII, betraktar förf. den allmänna kurvan (1) och anger villkor för förekomsten av rationella punkter i kvadratiska talkroppar.

Erik Vanäs, *A Spectrophotometric Study of Stars in Cygnus.* Disp. i Uppsala $^4/_{10}$ 1939. Opponenter: docent Åke Wallenquist och fil. lic. Gunnar Wernberg.

Under de sista tjugo åren har ett intensivt arbete ägnats undersökningen av strukturen hos vårt stjärnsystem (Vintergatsystemet). Man torde vara berättigad säga, att vi för närvarande känna huvuddragen av denna struktur med någon grad av säkerhet, men att vi däremot äga en mycket begränsad kännedom om detaljerna. Orsaken härtill är dels de olika stjärnornas mycket olika absoluta ljusstyrka, vilket förvirrar avståndsbestämningen, dels den efter allt att döma mycket komplicerade rymdfördelningen av stjärnorna, i synnerhet i närheten av Vintergatan, med stjärnmoln och moln av skymmande kosmisk materia, som i hög grad försvårar den statistiska bearbetningen av observationsmaterialet.

Föreliggande arbete utgör en detaljstudie av ett område i Vintergatan beläget i stjärnbilden Svanen och omfattande bland annat ett mycket markant stjärnfattigt område — med namnet »Norra

Kolsäcken» — väl synligt för blotta ögat som en mörk fläck mellan stjärnorna α Cephei och α Cygni. Undersökningen omfattar omkring 1900 stjärnor fotografiskt ljusstarkare än $11^{m},0$. Dessa stjärnors skenbara ljusstyrkor, deras spektra och absoluta ljusstyrkor ha bestämts och slutligen har på grundval av dessa data materialet underkastats en statistisk bearbetning främst syftande till ett klarläggande av Norra Kolsäckens natur.

Samtliga fotografiska plåtar, på vilka undersökningen baserats, ha tagits med Uppsala Observatoriums Zeiss-Heyde astrograf (öppning 15 cm, fokallängd 150 cm, bildfält 31 kvadratgrader). Stjärnornas skenbara ljusstyrkor ha bestämts ur runda, fokala bilder genom anslutning till nordpolsekvensen. I samband härmed ha de optiska egenskaperna hos instrumentet undersökts. Objektivets centrumkorrektion befanns vara obetydlig, uppgående till högst $0^{m},15$ vid plåtkanten. Färgekvationen, som i maximum uppgick till samma belopp, uppvisade ett markant beroende av bildstyrkan; ju svagare stjärnbilderna voro, desto större blev färgekvationen.

Stjärnornas spektra ha erhållits med objektivprisma och äro genomgående obreddade. De registrerades med observatoriets självregistrerande mikrofotometer. All klassificering utfördes sedan direkt från diagrammen genom skattning och mätning. Särskild uppmärksamhet ägnades åt studiet av felkällor samt åt standardisering av materialet. Såsom luminositetskriteria användes för de vita stärnorna intensiteterna hos vätgaslinjerna $H\gamma$ och $H\delta$ samt för de röda stjärnorna intensiteten hos cyanabsorptionen kring λ 4180. Luminositetsklassificeringen anslöts så nära som möjligt till den av Lindblad införda.

Den statistiska bearbetningen upptar först en undersökning av den skenbara fördelningen av stjärnor av olika spektraltyp över området. Resultatet är åskådliggjort i en serie kartor. De absolut ljusstarkaste, och därmed mest avlägsna stjärnornas ytfördelning befanns nära ansluta sig till Pannekoeks isofoter för Vintergatan, vilka därför accepterades som grund för en indelning av området i areor med olika ljusabsorption. Vid studiet av ljusabsorptionen på grundvalen av stjärntalen för olika spektral- och luminositetsgrupper har huvudsakligen använts en metod utarbetad av Malmquist. Diskussionen ledde till följande slutresultat: De observerade stjärntalen ned till fotografiska ljusstyrkan $10^{m},5$ i riktning mot Norra Kolsäcken kunna förklaras genom existensen av två nebulosor i synlinjens riktning. Det är omöjligt att representera observationerna med antagande av endast en nebulosa. Den första nebulosan, täckande endast den centrala delen av Kolsäcken, är belägen på 250 parsecs avstånd. Dess absorption uppgår till 1 magnitud, då medeltal tas över en area av 9 kvadratgrader. Den andra, vidsträckta nebulosan är belägen på ett avstånd av 630 parsecs. Absorptionen är även här 1 magnitud, då medeltal tas över 43 kvadratgrader.

Till slut innehåller avhandlingen en katalog över de undersökta stjärnorna.

EINAR LUNELL, *Liniengeometrische Studien, mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen mit vollständigem Zerfalle der Doppelkurve.* Almqvist & Wiksell. 162 sid. Disp. i Uppsala 25 maj 1940. Opponent: prof. T. NAGELL (ingen andre opponent).

Inom *linjegeometrien* betraktas den räta linjen som det element, varav olika geometriska mångfalder uppbyggas: alltefter-som den rörliga räta linjen beror av 1, 2 eller 3 föränderliga parametrar, alstras en *regelyta*, en *kongruens* eller ett *komplex.* Alla räta linjer i rummet bilda en 4-parametrig skara. Man brukar dock sedan mitten av 1800-talet, då linjegeometrien blev en självständig forskningsgren, tilldela den räta linjen 5 koordinater, vilka då måste vara förbundna genom en viss relation. Då denna visar sig vara kvadratisk, definierar den, om vi på vanligt sätt låta varje grupp av 5 tal betyda en punkt i ett 5-dimensionellt rum, en »hyperyta» Ω av andra graden i detta. Vi pläga säga, att rummets räta linjer *avbildas* av punkterna på Ω.

Denna Kleinska avbildning liksom överhuvudtaget dylika avbildningar, d. v. s. omvändbart entydiga motsvarigheter mellan en viss mångfald av räta linjer och en punktmångfald, bilda den röda tråden i avhandlingen. Kapitel I innehåller därför en översikt över sådana avbildningsmetoder. Särskild uppmärksamhet ägnas en reciprocitet mellan två (tredimensionella) rum, förmedelst vilken ett linjekomplex i det ena avbildas på punkterna i det andra och omvänt. Förf. ger därvid enkla algebraisk-geometriska bevis för satser, som den store norske geometrikern Sophus Lie fann inom ramen av sin »Berührungsgeometrie».

I kap. II ges med hjälp av hyperytan Ω ett definitivt svar på frågan om en regelytas högsta möjliga släkte, då dess ordning är given, i det förf. icke blott ger noggrannare gränser därför än de tidigare givna utan också i detalj anger arten av de regelytor, som uppvisa detta maximala släkte. Kapitlet inordnar sig i avhandlingen därigenom, att dessa regelytor uppvisas tillhöra de linjekomplex, som utförligt behandlas i kap. I och V, men är f. ö. fristående.

Kapitlen III och IV äro förberedelser för slutkapitlet. I det förra betraktas de regelytor, som bildas av sammanbindningslinjerna mellan de punkter på en algebraisk rymdkurva, som motsvara varandra i en flertydig korrespondens. Det är härvid att märka, att förf. helt rör sig inom den »abstrakta geometrien», att alltså »punkt» betyder ett godtyckligt valt geometriskt element, t. ex. rät linje. Förf. kan därför låta de generatriser på en regelyta motsvara varandra i en dylik »punktkorrespondens», som skära varandra. Skärningspunkterna bilda en kurva, *dubbelkurvan,* utefter vilken regelytan genomtränger sig själv. Grundformlerna för denna dubbelkurva låta sig nu uppställas på ett nytt, enkelt och enhetligt sätt.

Den ifrågavarande korrespondensen mellan generatriserna betraktar förf. som utgångspunkten för studiet av de algebraiska regelytorna och kallar den för *huvudkorrespondensen.* Om nu dubbelkurvan fullständigt sönderfaller, d. v. s. så, att dess delar träffas av generatriserna vardera i endast en punkt, sönderfaller också huvudkorrespondensen i idel entydiga korrespondenser. Den omvända satsen gäller ej, åtminstone ej bokstavligt. Detta analyseras i början av kap. IV, som f. ö. är ägnat åt studiet av entydiga korrespondenser och grupper av sådana.

I sista kapitlet påvisas existensen av en mångfald regelytor av nämnda typ, och i några slutord framhålles, att man troligen bör och kan utgå från dessa till synes extrema typer, då man söker lösa mera allmänna klassifikationsproblem.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1940: 5—7.

Ur innehållet: O. Holmbergh, Ueber die Reaktivierung der durch Oxydation inaktivierten Malzamylase; O. Samuelson, Om användningen av basutbytande ämnen i den analytiska kemien III; K. Myrbäck, Ueber die Natur der Glykosidbindungen in der Stärke; L. Ramberg, Om analytikerns exsickatorer och natriumkarbonat som urtitersubstans; O. Stelling och K. A. Wallén, Om sambandet mellan kemisk konstitution och K-röntgenabsorptionsspektra; R. Nilsson, Om baljväxtbakteriernas tillväxtbetingelser; E. Schjånberg, Några klorsubstituerade kinoners och hydrokinoners ultraviolettabsorption; K. Myrbäck, Die Oxydation der Digitoxose durch Hypojodit.

ERA, 1940: 5—7.

Ur innehållet: Elpumpar för vattenuppfordring i villor och lantgårdar; Elektrisk mätning av tryck och vibrationer; Elektrisk tvätt; Landsbygdselektrifieringen; Bestämning av verkningsgraden för kokplattor och kokkärl; Elnyheter.

(Forts. sid. 207.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1116) *Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, då den båge av parabeln* $y = ax^2$, *som avskäres av räta linjen* $y = kx$, *roterar ett varv kring denna räta linje.* *Stig Comét.*

1117) *Funktionerna* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ *och* $Y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ *äro givna. Då* $y = Y$, *är deras gemensamma värde* d_1 *eller* d_2. *Då* $y - Y$ *är extremum, är antingen* $y = p_1$, $Y = P_1$ *eller* $y = p_2$, $Y = P_2$. *Visa geometriskt, att* $d_1 + d_2 = p_1 + P_1 = p_2 + P_2$. *X.*

1118) *I talteorien visas, att varje primtal p kan skrivas* $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, *där a, b, c och d äro hela tal eller 0. Använd denna sats för att bevisa, att varje tal kan skrivas som en summa av fyra (ev. mindre antal) heltalskvadrater.*

B. Lindwall.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1119) Triangeln ABC omskrives av en cirkel. Tangenten till denna i punkten C skär AB:s förlängning i P. Uttryck BP i a, b och c.

Svar: $BP = \frac{a^2c}{b^2 - a^2}$ (om b större än a).

1120) Förkorta bråket $\frac{a^2 - b^2 + ab\,(c^k - c^{-k})}{a^2 + b^2 - ab\,(c^k + c^{-k})}$.

Svar: $\frac{a + bc^k}{a - bc^k}$.

1121) I triangeln ABC dragas bissektriserna. Dessa skära sidorna i punkterna $A'B'C'$. Ytorna av trianglarna betecknas med T resp. T'. Visa att $T' = T \cdot \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1119—1122 äro insända av F. EHRNST, 1123—1131 av M. D. KJELLERÅS, 1132 av G. NILSSON.

1122) I parallellogrammen $ABCD$ (yta $= T$) delas sidan DC av punkten E i förhållandet $m : n$. AE och BD skära varandra i F. Visa, att ytan av fyrhörningen $BCEF = \frac{T}{2} \cdot \frac{m^2 + 3mn + n^2}{(m+n)(2m+n)}$.

1123) I en likbent triangel är bissektrisen mot en av de lika sidorna dubbelt så stor som bissektrisen mot basen. Sök triangelns vinklar.

Svar: 36°, 36° och 108°.

1124) I triangeln ABC är vinkeln $A = 20°$. Bissektrisen till vinkeln B råkar AC i D. Ytan av triangeln ABD är dubbelt så stor som ytan av triangeln BCD. Beräkna vinkeln C.

Svar: $43°{,}_{16}$ eller $136°{,}_{84}$.

1125) En triangel har ett hörn i punkten (1; 4). Motstående sida skall vara den del av räta linjen $x + y = a$, som begränsas av koordinataxlarna. Bestäm a, då triangelns yta är 3 enheter.

Svar: —1; 2; 3; 6.

1126) Sök ekvationen för en rät linje, som bildar 45° med linjen $y = 3x + 4$ och med koordinataxlarna bildar en triangel, vars yta är 4 enheter.

Svar: $x - 2y \pm 4 = 0$ och $2x + y \pm 4 = 0$.

1127) Genom punkten (0; 4) drages en rät linje, som med räta linjen $x = -2$ och x-axeln bildar en triangel, vars yta är $16\frac{2}{3}$ enheter. Bestäm linjens ekvation.

Svar: $12x - y + 4 = 0$; $x - 3y + 12 = 0$; $3x + y - 4 = 0$; $4x + 3y - 12 = 0$.

1128) Räta linjen L, som är parallell med y-axeln, skär i första kvadranten hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i P och asymptoten i Q. Genom P drages en linje parallell med x-axeln. Den råkar y-axeln i R. Sök det värde ytan av triangeln PQR antar, då linjen L obegränsat avlägsnar sig från y-axeln.

Svar: $\frac{ab}{4}$.

1129) I ekvationssystemet

$$x^3 + y^3 + z^3 = 36;\; x^2 + y^2 = 10;\; x + y = 2z$$

betyda x, y och z kanterna i en rätvinklig parallellepiped. Beräkna dess volym.

Svar: 6 eller $15\sqrt{7} - 39$.

1130) För vilka x-värden är funktionen $\frac{1}{1+\cos 3x}$ lika med sin första derivata?

Svar: $12^\circ{,}29 + n \cdot 120^\circ$.

1131) Sök $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{4}{\operatorname{tg} x + \cot x} - \sin 4x\right) : x^3$.

Svar: 8.

1132) Hur stor är sannolikheten vid »tippning» av 12 matcher med vardera tre lika möjliga resultat att få minst 10 av dem rätt?

Svar: Summan av de tre första termerna i utvecklingen $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{12} \sim \frac{1}{1840}$.

Lösn. till uppg. 1085—1087.

1085) *På övre ändan av en lodrät axel är fästad en plan spegel, vars speglande yta är vänd uppåt och bildar vinkel med axeln. Spegeln belyses med vågräta parallella ljusstrålar. Vad ser en iakttagare, som håller sitt öga på axelns förlängning, då axeln roterar?* *X.*

De reflekterade strålarnas förlängningar under spegeln träffa ett plan i punkter, för vilka orten sökes. Ögats avstånd till spegeln inverkar ej, endast strålarnas riktning. Under rotationen beskriver spegelnormalen en kon med toppvinkeln 2α, då $\alpha =$ spegelns lutningsvinkel. Vi sätta basradien $= 1$ och lägga en y-axel parallell med strålriktningen genom basytans centrum O (origo). En stråle ST träffar spegeln i konens topp T. Den reflekterade strålens förlängning träffar basplanet i P. Om tillhörande normal (generatris) är TE, blir enligt reflexionslagen $PE // ST$ och $\wedge PET = \wedge PTE \; (= u)$, $\therefore PT = PE$. Ur den likbenta triangeln PTE erhålles $PE = \frac{1}{2} \cdot \frac{TE}{\cos u} = \frac{1}{2 \cos u \sin \alpha}$. Om PE skär bascirkeln i E_1 och OE gör vinkeln v med y-axeln, erhålles ur den likbenta triangeln TEE_1 $\cos u = \frac{EE_1}{2} : TE = \frac{\cos v}{TE} = \cos v \sin \alpha$, $\because PE = \frac{1}{2 \cos v \sin^2 \alpha}$. Ortens ekvation blir $x = \sin v$, $y = \frac{1}{2 \cos v \sin^2 \alpha} - \cos v$. Sätta vi $\frac{1}{2 \sin^2 \alpha} = k$ och eliminera v, fås $y = \frac{x^2 + (k-1)}{\sqrt{1-x^2}}$, som lätt diskuteras för olika α-värden.

Anm. Av två cirklar med konstanta radier är den enas medelpunkt fix och den andras rörlig utefter centrallinjen. De gemensamma (inre eller yttre) tangenternas kontaktpunkter med den rörliga cirkeln beskriva den erhållna kurvan, vilket kan bevisas rent geometriskt.

S. B.

Även löst av *S. L.*

1086) *För vilka trianglar ABC gäller relationen*

$$8 \cos A \cos B \cos C + 16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 3\,? \qquad X.$$

Triangeln är inskriven i en cirkel med radien 1 och medelpunkten O. Tyngdpunkten är T och $OT = t$. Enl. uppg. 673 (årg. *17*) är $3t^2 + \frac{1}{3}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \frac{3}{4}$, varav enl. samma uppg. $2 \cos A \cos B \cos C = \frac{1}{4} - 9t^2$. Enl. en känd formel är $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$. Insättning i lydelsens relation ger $r - \frac{1}{2} = (3t)^2$. Då alltid $r \leqq \frac{1}{2}$, kan endast likhetstecknet gälla, d. v. s. $r = \frac{1}{2}$, $t = 0$. Triangeln ABC är liksidig.

S. L.

Anm. Enl. bekanta formler kan relationen skrivas

$$\left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

1087) *Rötterna till ekvationen* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *betecknas med* x_1, x_2, x_3, *och* x_4. *Bestäm den ekvation, vars rötter äro* $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ *och* $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

B. Lindwall.

Den ursprungliga ekvationen ger $\Sigma x_p = -a$, $\Sigma x_p x_q = b$, $\Sigma x_p x_q x_r = -c$ och $x_1x_2x_3x_4 = d$, varvid summationen tänkes utförd över tillgängliga indices. Betecknas den nya ekvationens rötter med y_1, y_2 och y_3, erhålles, om summationen utföres över för y_p möjliga indices, $\Sigma y_p = 2b$. Av ekv. $b - y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $b - y_2 =$ $= x_1x_3 + x_2x_4$, $b - y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ fås genom parvis multiplikation och addition av produkterna $3b^2 - 2b\Sigma y_p + \Sigma y_p y_q = \Sigma x_p^2 x_q x_r =$ $= ac - 4d$. Alltså blir $\Sigma y_p y_q = b^2 + ac - 4d$. Genom multiplikation fås $(b - y_1)(b - y_2)(b - y_3) = b^3 - b^2\Sigma y_p + b\Sigma y_p y_q - y_1 y_2 y_3 =$ $= \Sigma x_p^3 x_q x_r x_s + \Sigma x_p^2 x_q^2 x_s^2 = d\Sigma x_p^2 + c^2 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_p x_q =$ $= d(a^2 - 2b) + c^2 - 2bd$. Alltså blir $y_1 y_2 y_3 = abc - a^2d - c^2$.

Ekvationen är $y^3 - 2by^2 + (b^2 + ac - 4d)y + a^2d - abc + c^2 = 0$.

S. L.

Även löst av *E. Smn.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1940.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 6; \end{cases}$$

och angiv svaret i så enkel form som möjligt.

2. Ett lån återbetalas medelst annuiteter på 1 600 kr. Första annuiteten erlades ett år efter lånets upptagande. Då sjunde annuiteten erlagts, uppgick återstoden av lånet till 523 kr. Hur stort var lånet från början? Ränta på ränta beräknas efter 4 %.

3. I en cirkel med radien 4 cm är en fyrhörning $ABCD$ inskriven. Sidorna AB och AD äro båda 3 cm, diagonalen AC är 6 cm. Hur stor är fyrhörningens yta?

4. Upprita de båda kurvorna $x^2+2x-y=0$ och $x^2-x+y-6=0$. De skära varandra i två punkter, som sammanbindas. Vilken vinkel bildar sammanbindningslinjen med x-axeln?

5. Från ett hörn i en liksidig triangel drages en rät linje, som delar den i triangeln inskrivna cirkelns omkrets i förhållandet 1 : 3. Beräkna vinkeln mellan denna linje och höjden från samma hörn.

6. I en triangel är en sida 4 cm och summan av de övriga sidorna 11 cm. Medelproportionalen till de in- och omskrivna cirklarnas radier är 2 cm. Bestäm triangelns sidor och största vinkel.

7. I triangeln ABC är sidan AB 6 cm och ytan 15 cm². Parallellt med den nämnda sidan drages en transversal A_1B_1; A_1 ligger på BC och B_1 på AC. Transversalen avskär en topptriangel, vars yta är $^4/_9$ av den ursprungliga triangelns yta. AA_1 och BB_1 skära varandra i P. Hur stor del av triangeln ABC utgör triangeln ABP?

8. Bissektrisen till den räta vinkeln C i en rätvinklig triangel ABC skär hypotenusan i D. Från D drages normalen DE mot AC. Vidare är $DE=d$, $BC=a$, $AC=b$. Bevisa, att

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Resultat: **1.** $x_1 = y_2 = \sqrt{2} - 1$; $x_2 = y_1 = -(\sqrt{2} + 1)$. **2.** 10 000 kr. **3.** 12,52 cm² $\left(= \frac{27\sqrt{55}}{16}\right)$. **4.** 56°,31. **5.** 20°,70. **6.** 6 cm, 5 cm, 4 cm; 82°,82. **7.** $\triangle ABP = \frac{3}{5} \cdot \triangle ABB_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC = \frac{1}{5} \cdot \triangle ABC$; (*AB*:s och ytans storlek behöva ej angivas).

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Beräkna värdet av uttrycket $2^y \cdot 2^z + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{z}}$, där y och z äro rötterna till ekvationen $2x^2 + 5x + 1 = 0$.
2. I en oändlig geometrisk serie är summan medelproportional till första och tredje termerna. Skillnaden mellan tredje och andra termen är $= 1$. Bestäm seriens summa.
3. I en triangel ABC är vinkeln $C = 120°$. De vid sidorna AC och BC vidskrivna cirklarnas radier förhålla sig som 5 : 9. Bestäm triangelns vinklar.
4. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel med radien 65 mm. Sidorna AB och AD äro lika långa, diagonalen AC är 104 mm, sidorna BC och CD förhålla sig som 11 : 21. Bestäm sidornas längd.
5. I en rät cirkulär kon, vars höjd och bottenradie äro lika stora, inlägges ett regelbundet tresidigt prisma, så att en av sidoytorna ligger i konens bottenyta och de båda hörn, som icke höra till denna sidoyta, bli belägna på konens mantelyta. Bestäm förhållandet mellan baskanten och sidokanten i det största prisma, som uppfyller dessa villkor.
6. Lös ekvationen $4 \cos x \cos 2x = 1$.
7. $ABCD$ är en av begränsningsytorna till en parallellepiped. Kantlinjerna AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 skäras av ett plan i punkterna A_2, B_2, C_2 respektive D_2. Vidare är $AA_2 = a$, $BB_2 = b$, $CC_2 = c$, $DD_2 = d$. Bevisa, att $a + c = b + d$.
8. Diskutera kortfattat utseendet av kurvorna $y = x^n$ för olika positiva heltalsvärden på n. På en sådan kurva väljes en godtycklig punkt P med positiva koordinater. Genom P drages dels en rät linje parallell med x-axeln, dels normalen till kurvan i punkten. Dessa linjer bilda tillsammans med y-axeln en rätvinklig triangel. Undersök, om det finns något värde på n, för vilket ytan av denna triangel är oberoende av P:s läge, och angiv i så fall ytan för detta n-värde.

Resultat: **1.** $32+\frac{\sqrt{2}}{8}=32{,}18$. **2.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **3.** $38^\circ{,}21$ och $21^\circ{,}79$. **4.** $AB=AD=50$ mm; $BC=66$ mm; $CD=126$ mm. **5.** $2:\sqrt{3}$. **6.** $\pm 36^\circ+n\cdot 360^\circ$; $\pm 108^\circ+n\cdot 360^\circ$; $\pm 120^\circ+n\cdot 360^\circ$. **8.** $n=3$; $\frac{1}{6}$ ytenh.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. En korda i parabeln $y^2=4x$ går genom punkten (5; 2) och halveras i denna punkt. Bestäm koordinaterna för kordans ändpunkter.
2. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av x-axeln och asymptoterna till hyperbeln $9x^2-4y^2-18x-16y+29=0$.
3. I en given cirkelsektor, vars medelpunktsvinkel är mindre än 90°, inskrives en rektangel med två hörn på sektorns ena radie. När är rektangelns yta så stor som möjligt?
4. Ekvationerna för en fyrhörnings sidor äro i ordning $x-8y+16=0$, $7x+4y-18=0$, $32x-4y-73=0$ och $16x+28y+61=0$. Bevisa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen och att en cirkel kan inskrivas i densamma.
5. Storaxeln i en ellips är parallell med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Ellipsen tangerar båda koordinataxlarna, och dess ena brännpunkt ligger på linjen $x=1$. Sök och konstruera orten för den ändpunkt av ellipsens storaxel, som icke ligger på y-axeln.
6. Bestäm konstanterna a och b i funktionen
$$y=\frac{ax^3}{x^2+b},$$
så att motsvarande kurva får en inflexionspunkt för $x=3$ och linjen $y=2x$ blir asymptot. Konstruera kurvan i dess huvuddrag.
7. Av en given sfär utskäres ett sfäriskt segment, vars volym betecknas med v och totala yta med y. Då höjden h i segmentet varierar, ändras både v och y. Man kan då uppfatta v som en funktion av y. Bevisa, att
$$\frac{dv}{dy}=\frac{h}{2}.$$

Resultat: **1.** (1; -2) och (9; 6). **2.** $2\frac{2}{3}$ ytenh. **3.** Bågen halveras av rektangelns hörn. **5.** Parabeln $y^2=x-1$. **6.** $a=2$; $b=3$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En lina är spänd tvärs över en gata från hus till hus. I linans lägsta punkt hänger en lampa, vägande 10 kg. Beräkna spänningen i linans båda delar, om dessa bilda vinklarna 85° resp. 80° med lodlinjen.
2. På en tralla, som kan sättas i rörelse på ett horisontellt spår, står en låda med dimensionerna 5 × 5 × 20 dm, upprest på sin minsta sida. Lådan står på ett horisontellt underlag, dess tyngdpunkt ligger i dess geometriska medelpunkt, och en av dess kanter är parallell med skenorna. Trallan försättes i rörelse genom en på densamma verkande med skenorna parallell dragkraft. Vilket är det högsta värde denna dragkraft kan hava, utan att lådan välter vid igångsättningen? Trallan väger 300 kg, lasten inberäknad. Friktionen mellan lådan och dess underlag är tillräcklig för att hindra glidning. Däremot kunna friktionsmotstånden mot trallans rörelse lämnas utan avseende, likaså hjulens massa.
3. En kolv, vars volym är 90 cm^3, innehåller luft av 760 mm tryck jämte en ringa mängd kalk. Den förbindes med en annan kolv, vilken innehåller koldioxid av 730 mm tryck. Volymen av sistnämnda kolv är 75 cm^3; rörledningens volym kan försummas. Kalken upptager småningom en del av koldioxiden. Trycket minskas därigenom och nedgår slutligen i båda kolvarna till 615 mm. Huru stor volym intog den av kalken upptagna koldioxiden vid försökets början? Temperaturen var densamma vid försökets slut som vid dess början. Kalkens volym kan lämnas utan avseende.
4. Ett ihåligt prisma, förfärdigat av tunna planparallella glasskivor, fylldes med vatten och uppställdes på ett spektrometerbord, varefter minimideviationen för natriumljus bestämdes och befanns vara 23°,4. Då prismat i stället fylldes med klorbensol, befanns minimideviationen vara 39°,2. Brytningsindex för vatten är 1,333. Beräkna brytningsindex för klorbensol.
5. En tunn plankonvex lins med brännvidden 4 dm och en tunn plankonkav lins med brännvidden 10 dm hopfästas, så att de plana ytorna ligga intill varandra och de optiska huvudaxlarna sammanfalla. Angiv det sammansatta linssystemets styrka i dioptrier.
6. Då en ström på 1,50 ampère uttogs från ett ackumulatorbatteri, visade en voltmeter, som var ansluten till batteriets poler, ett utslag på 2,28 volt. När sedan ackumulatorbatteriet laddades

med en ström av samma styrka, visade voltmetern, som fortfarande var inkopplad på samma sätt, ett utslag på 2,76 volt. Beräkna härav batteriets inre motstånd. Man antager, att batteriets elektromotoriska kraft och inre motstånd icke ändras och att voltmeterns motstånd är mycket stort.

7. En elektrisk kabel av kopparbrons med diametern 5 mm skall ersättas med en aluminiumkabel med cylindrisk stålkärna. Den nya kabeln skall hava samma motstånd som den gamla, och stålkärnans diameter skall vara 2 mm. Beräkna den nya kabelns diameter. Specifika motstånden för aluminium, stål och kopparbrons antagas vara 0,032, 0,32 och 0,025 ohm i nu nämnd ordning.

8. En glödlampa för normalt 110 volt och 100 watt skall anslutas till anslutningsklämmorna för en sinusformad växelspänning om 127 volt effektivt. Till skydd mot överbelastning inkopplas en lämplig induktionsspole, en s. k. drosselspole, i serie med lampan, för att denna må få sin normala strömstyrka. Denna anordning medför, att strömmen genom ledningen får en viss fasförskjutning i förhållande till spänningen mellan anslutningsklämmorna. Beräkna denna fasförskjutning, då likströmsmotståndet i drosselspolen är så litet, att effektförbrukningen i densamma kan försummas.

Resultat: **1.** 38,05 och 38,48 kgf. **2.** 75 kgf. **3.** 29,7 cm^3 av 730 mm tryck. **4.** $1{,}528\left(=\frac{1{,}333 \sin 19^\circ{,}6 - \sin 7^\circ{,}9}{\sin 11^\circ{,}7}\right)$. **5.** 1,5 diop. **6.** 0,16 ohm. **7.** 6,0 mm $\left(=2\sqrt{8{,}9}\right)$. **8.** $\varphi = 30^\circ$; $\left(\cos\varphi = \frac{110}{127}\right)$.

(Forts. från sid. 198.)

Teknik för alla, 1940: 14—26.

Ur innehållet: Nylon — en triumf för den syntetiska kemien; Hur en två-krona blir till; Rudolf Diesel; Elektronmikroskopet; Ultrakortvågsterapi; Med segelflyg till stratosfären; Teknik på farfars tid; Blindflygningen och gyroskopet; Lättmetallernas tidsålder; Raketvapnet; Skeppsbyggeri på Karl XI:s tid; Reologi — en ny vetenskap; Spektroskopet; Reningsverket vid Henriksdal; Kemisk antikbehandling av metaller; Luftkonditionering. Ett stort antal notiser om tekniska nyheter och anvisningar för tillverkning av apparater till nytta och nöje.

Flygning 1940: 10—15.

Ur innehållet: Nya erfarenheter inom vågsegelflyg; Kontroll vid flygplantillverkning; Flygarens klädsel och utrustning; Modern jaktplansbeväpning; Den elektriska utrustningen på flygplan och på flygmotorer; Blir butan framtidens motorbränsle?; Luftfartsmedicinens grunder; Metallernas korrosionsutmattning; Flygtekniska nyheter.

IVA, 1940: 1—3.

Ur innehållet: Forskningens beredskapsorganisation; Prov med alkoholbränslen; Bestämning av smälttiden för säkringar; Skogen som ravarukälla i fred och krig; Våra flytande motorbränslens användbarhet för olika motortyper; De tekniska högskolornas utveckling; Tillgodogörandet av landets oljeskiffertillgångar.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1940: 2.

Ur innehållet: B. STRÖMGREN, Om energiproduktionen i Stjernernes Indre; K. THERNØE, Maaling af Stjernediametre ved Hjelp af Maaneokkulationer; E. LORENSEN, Interessante Planetkonstellationer i 1940.

Fysisk Tidsskrift, København 1940: 1—3.

Ur innehållet: CHR. WINTER, Fra Fotografiens Barndom og Ungdom; A. J. PETERSEN, Ultrakorte Lydbølger; M. PIHL, Biologi og Kvanteteori; R. E. H. RASMUSSEN, Et Forsøg over Radiometerkræfter; H. HANSEN, Et Termoelement; J. HARTMANN, Den akustiske Luftstraalegenerator; N. ARLEY, Om nyere teoretiske Synspunkter for Tydningen af Højdestraalingen; E. JØRGENSEN, En Kugles Bevægelse paa Skraaplan.

Naturens Verden, København 1940: 2—4.

Ur innehållet: N. NIELSEN, Plantevækststoffer; R. EGE, Nobelpris i Kemi 1939; V. MADSEN, Jordens næstdybeste Boring; A. KROGH, Norbert Casteret, en fransk Huleforsker og hans Gerning; S. L. TUXEN, Kan Insekter høre?

Naturen, Bergen 1940: 4—7.

Ur innehållet: H. SCHETELIG, Professor W. C. Brøgger; T. GAARDER, Salter og organisk produktion i havet; H. HAARALDSEN, Syntetisk gummi; N.-H. KOLDERUP, Saltutvinning og steinsalt.

Föreläsningar för lärarkanditaterna vid provårsläroverken under läsåret 1939—1940.[1]

Göteborg: adjunkt Y. KÄLLÉN, Den experimentella behandlingen av växelströmsläran på gymnasiet; adjunkt J. LUNDBERG, Demonstrationsexperiment och Historiska synpunkter i kemiundervisningen; lektor A. WAHLUND, Numerisk noggrannhet.

Lund: lektor A. LEIDE, Undervisningen i elektromagnetisk induktion på gymnasiet och Något om projektionsteknik; lektor B. SVENSSON, Valda delar av gymnasiets geometrikurs och Allmänna anvisningar angående problemlösningens metodik.

Stockholm: lektor E. JÖNSSON, Elevlaborationerna i fysik på gymnasiet; lektor E. NORDEFELDT, Om pH-begreppets användning i kemiundervisningen och De kemiska laborationerna i realskolan; adjunkt B. WAHLSTRÖM, Fysikaliska demonstrationsförsök (centripetalkraft m. m.); adjunkt S. ÅSTRAND, Matematikkursen i 4^5, svårigheter och nödfallsutvägar.

Uppsala: lektor G. BOLINDER, Matematikens ställning i de svenska gymnasierna under olika tider, Matematikundervisningens allmänna metodik på gymnasiet och Logaritmer och deras införande i skolan; adjunkt P. GRANATH, Om fysiklaborationerna i realskolan och Om läroverkets lokaler för undervisningen i fysik i realskolan; lektor B. HEDENSTEDT, Om undervisningen i fysik på gymnasiet; adjunkt V. LENANDER, Om matematikundervisningen i realskolan; adjunkt J. PALMGREN, Om läroverkets lokaler för undervisningen i kemi.

---

[1] Uppgifterna ha lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska byrå, som även meddelat, att inga avhandlingar förekomma i läroverkens årsredogörelser 1939—1940.

Om Mersennes tal och liknande tal.

Av **HJ. TALLQVIST.**

I företalet till sin år 1644 utkomna bok »Cogitata Physico-Mathematica» anför Mersenne följande talteoretiska sats:

Om p är ett primtal, icke större än 257, så äro de enda p-värden, som göra

$$M = 2^p - 1$$

till ett primtal, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 och 257. (Här bör 67 betraktas som tryckfel för 61.[1]) För alla övriga primtalsvärden av p är M ett sammansatt tal.

Ända härtills hava dessa påståenden endast till en del kunnat verifieras. Antalet primtal, icke större än 257, är 56; de tolv ovan uppräknade av dessa göra M till ett primtal, men verifikation eller bevis saknas ännu i två fall, nämligen för $p = 127$ (åtminstone ej publicerat) och $p = 257$. För 44 p-värden är M ett sammansatt tal, men saken är klarlagd eller i M ingående faktorer gjorda kända endast för de 25 fallen $p = 11$, 23, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 79, 83, 97, 113, 131, 151, 179, 191, 197, 211, 223, 233, 239 och 251; för $p = 89$ påstås ett bevis ha givits, men ej publicerats eller några i M ingående faktorer bekantgjorts. De återstående fallen, då M är sammansatt, utgöra $p = 71$, 89, 101, 103, 107, 109, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229 och 241, tillsammans 19 st.

Såsom här uppgivet stod saken år 1905; det enda veterligen kända senare tillägget torde bestå i att E. Schmidt år 1908 uppvisade, att för $p = 181$ M är sammansatt och innehåller faktorn 43 441 (se Elementa, sept. 1928). Sålunda är Mersennes påstående ännu icke bevisat i inalles 20 fall. Dessutom har Schmidt för den händelse att $p > 257$ visat, att värdet $p = 263$ gör M sammansatt, innehållande faktorn 23 671, samt utlovat (och möjligen publicerat) upplysning i ännu några sådana fall.

Talen kallas Mersenneska tal och hava givit de största matematiker såsom Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Jacobi huvudbry.

---

[1] Min källa är W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays, 4:de uppl., London 1905, varav jag äger förf:s eget exemplar, med hans Exlibris.

De bilda en av gåtorna i den högre talteorin. Det är ej troligt att Mersenne själv uppställt sin sats, men möjligt att han fått densamma av FERMAT, som redan 1640, således för 300 år sedan, i ett brev meddelat faktorerna i M i fallen $p = 11$, 23 och 37. Det ser ut som om Fermat eller någon av hans samtida ägt en för oss obekant metod att igenkänna primtal, vilken sedan ej återupptäckts. Det är nämligen ej tänkbart, att Mersennes resultat skulle erhållits enbart empiriskt, genom aritmetisk provning, ty t. ex. för $p = 257$ innehåller M 78 st. siffror. Icke heller äger man just mera än en enda härtill hörande allmännare sats, som uppställts av Euler, vilken givit resultatet i 10 av de 35 kända och bevisade fallen.

På Mersennes tal stöder sig läran om de fullkomliga talen, varmed förstås sådana, som äro lika med summan av alla sina heltaliga divisorer, inbegripet 1, men talet självt uteslutet. Det minsta av dem är $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$, sedan följer 28, som har divisorerna 1, 2, 4, 7 och 14, vilkas summa ju är 28, därefter 496 o. s. v. EUKLIDES visade, att talen av formen

$$2^{p-1}(2^p - 1),$$

där $2^p - 1$ är ett primtal, omfatta de fullkomliga talen, och Euler bevisade, att nämnda uttryck anger alla jämna fullkomliga tal; om det ej existerar udda sådana, vilket man har skäl att tro, men ej kunnat bevisa, omfattar det samtliga fullkomliga tal. Enligt Mersennes sats är $2^p - 1$ ett primtal för $p = 2, 3, 5, 7, 13$ o. s. v. (ej för $p = 11$), och de motsvarande fullkomliga talen beräknas utgöra 6, 28, 496, 8128, 33550336 o. s. v. Med $p = 11$ skulle fås 2096128, som emellertid ej är ett fullkomligt tal.

Man frågar sig vidare, när talen

$$F = 2^m + 1$$

äro primtal och när sammansatta. Antag först att m är jämnt, men innehåller en udda faktor, sålunda har formen $m = 2s(2r + 1)$, så är F divisibelt med $2^{2s} + 1$. Man behöver därför endast betrakta tal av formen

$$F - 2^m + 1, \text{ där } m - 2^n.$$

Fermat hade påstått, att alla tal av denna form äro primtal, men tillika sagt, att han ej lyckats finna något bevis härför. Denna hans utsago torde vara den enda av hans talteoretiska spådomar, som ej visat sig riktig. Den stämmer för $n = 1, 2, 3, 4$, då man i ordning har $m = 2, 4, 8, 16$ och $F = 5, 17, 257, 65537$, vilka alla är primtal, men år 1732 visade Euler, att för $n = 5$, som ger $m = 32$,

$$F = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,$$

sålunda ett sammansatt tal. Senare har man uppvisat, att detsamma inträffar med $n = 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36$ och 38. De båda sista talen F innehålla flera tusen millioner siffror. Också denna fråga står sålunda liksom den om Mersennes tal fortfarande öppen.

I förbigående må anföras, att man ännu ej lyckats allmänt bevisa Fermats kanske berömdaste påstående, det om den stora eller sista Fermatska satsen, att nämligen ekv.

$$x^n + y^n = z^n$$

ej har någon lösning i hela tal för $n \geqq 3$.

Ännu återstå talen av formen $N = 2^m + 1$, där m är udda. De äro alla divisibla med 3. Har man $m = (2r + 1)(2s + 1)$, så kan N divideras med $2^{2r} + 1$ och med $2^{2s} + 1$, således ock med dessa tals minsta gemensamma dividend. Ett enkelt exempel härtill är

$$2^{15} + 1 = 32769 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 331 = (2^3 + 1)3641 = (2^5 + 1)993 = 99 \cdot 331.$$

Man behöver därför endast taga $m =$ ett udda primtal p och betrakta talen

$$T = \tfrac{1}{3}(2^p + 1),$$

om vilka det frågas, när de äro primtal och när sammansatta, vilket möjligen är det nya i denna uppsats. Gå vi t. o. m. $p = 47$, gäller följande: Primtal erhållas för $p = 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ och sammansatta för $p = 29, 41, 47$. De senare innehålla faktorerna 59, 83, 283 resp. För $p = 31, 37, 43$ är frågan öppen.

Den första faktorn i de tre anförda fallen, då T är ett sammansatt tal, har erhållits av lektor Agne Wahlgren med tillhjälp av teorin för kvadratiska rester (enligt privat meddelande), men härledningen skall ej anföras här. Med $p = 29$ är den andra faktorn i T ett primtal. Lektor W. har vidare visat, att för fallen $p = 53$ och 89 talen 107 och 179 resp. äro divisorer till T.

De nu betraktade talen bilda ett analogon till de Mersenneska talen $2^p - 1$ och de Fermatska talen $2^m + 1$, där $m = 2^n$. Andra problem skulle erhållas, om basen 2 ersattes med något annat tal, så t. ex. kan man fråga, när tal av formerna

$$\frac{1}{2}(3^{2m+1} - 1), \quad \frac{1}{4}(3^{2m+1} + 1), \quad \frac{1}{2}(3^{4m} + 1),$$

$$3^{2m+1} - 2^{2n+1}, \quad \frac{1}{5}(3^{2n+1} + 2^{2n+1})$$

äro primtal eller sammansatta tal. Men härpå skall ej mera ingås.

Om faktorer till talen $a^p + 1$.

Av **AGNE WAHLGREN.**

I föregående uppsats ställer Professor Tallqvist problemet: För vilka primtal p är $\frac{1}{3}(2^p + 1)$ ett sammansatt tal? Detta problem är redan *delvis* utrett. För dess behandling måste jag först anföra några satser ur talteorien.

Två hela positiva eller negativa tal a och b sägas vara kongruenta med avseende på modylen m, om deras differens är delbar med m, så att man får

$$a = k \cdot m + b,$$

där k är ett helt positivt eller negativt tal. Detta tecknas

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Man har funnit, att om $P = 2n + 1$ är ett primtal, satisfieras kongruensen

$$x^{2n} \equiv 1 \pmod{P} \tag{1}$$

av alla hela tal, som ej äro delbara med P. För vissa x-värden kan kongruensen gälla för en lägre dignitet av x; men det finnes alltid sådana tal g, att digniteterna g^s för $s = 1, 2 \ldots 2n$ bli kongruenta med var sitt av de $2n$ första hela talen (i annan ordning!) och först g^{2n} blir $\equiv 1$. Ett sådant tal kallas en primitiv rot till kongruensen (1) eller helt enkelt till talet P. Allteftersom ett tal är kongruent med en jämn eller en udda dignitet av g, kallas talet en kvadratisk rest eller en kvadratisk icke-rest till P. Man har funnit, att 2 är kvadratisk rest till P, om $P = 8k \pm 1$, men kvadratisk icke-rest, om $P = 8k \pm 3$. Likaså är 3 kvadratisk rest till P, om $P = 12k \pm 1$, men icke-rest, om $P = 12k \pm 5$. Man inser lätt, att om $a \equiv b$ och $c \equiv d$, så är $ac \equiv bd$. Med användning härav kan man visa, att

$$g^n \equiv -1 \pmod{P} \tag{2}$$

och att om $g^x \equiv -1$, måste x vara en udda multipel av n.

Antag nu, att p är ett primtal och P en primfaktor till $a^p + 1$. Detta kan skrivas

$$a^p \equiv -1 \pmod{P}.$$

Om $a \equiv g^t$, erhålles

$$g^{tp} \equiv -1.$$

Då måste tp enligt (2) vara en udda multipel av n, och vill man undvika den triviala lösningen $t = n$, som ger $a = -1$, måste p vara en divisor till n. Sättes $n = sp$, får man således $a \equiv g^{ks}$, där k är udda.

Tillämpas detta på kongruensen

$$2^p \equiv -1 \pmod{P} \tag{3}$$

fordras således, att P har formen

$$P = 2sp + 1,$$

och att

$$2 \equiv g^{ks}, \tag{4}$$

där k är udda. Om speciellt $s = 1$, innebär det sista villkoret endast, att 2 skall vara en kvadratisk icke-rest till $2p + 1$. För $p = 4r + 1$ blir $P = 8r + 3$, och villkoret är uppfyllt. På detta sätt finner man, att för $p = 5$, 29, 41, 53, 89 har $2^p + 1$ resp. 11, 59, 83, 107, 179 till faktor.

Om däremot $p = 4r + 3$, $P = 8r + 7$, är 2 kvadratisk rest till P, och kongruensen (4) och således även (3) är orimlig. Man får i stället $2 \equiv g^{2k_1}$ och

$$2^p \equiv g^{2p \cdot k_1} \equiv 1 \pmod{2p + 1}.$$

Härav får man den redan av Euler bevisade regeln: Om p är ett primtal av formen $4r + 3$ och $P = 2p + 1$ även är ett primtal, så är $2^p - 1$ delbart med P. (Jämför Elementa, årg. 12, sid. 10!)

För $s > 1$ gäller det att pröva kongruensen (4). Men som man ej har några regler för att finna en primitiv rot g annat än genom prövning, är det mindre besvärligt att direkt pröva kongruensen (3). Emellertid kan man på förhand visa, att vissa s-värden äro omöjliga. Om s är udda, måste 2 enligt (4) vara kvadratisk icke-rest till P, vilket innebär, att P måste ha formen $8k \pm 3$. Då måste sp ha formen $4k + 1$ (för det undre tecknet skulle sp bli jämnt), och detta inträffar endast, om s och p båda ha formen $4h + 1$ eller båda formen $4h + 3$. Detta kan även uttryckas genom kongruensen $s \equiv p \pmod{4}$. Om åter s är jämnt, måste 2 vara kvadratisk rest till P och P ha formen $8k \pm 1$. Härför fordras, att s är delbart med 4. De funna villkoren kunna sammanfattas i följande regel: Om p är ett primtal och P är en primfaktor till $2^p + 1$, måste P ha formen $2sp + 1$, där $s \equiv 0$ eller $p \pmod{4}$.

Jag skall anföra ett par exempel. Jag väljer $p = 47$, $s = 3$, $P = 283$ och skall således undersöka, om

$$2^{47} \equiv -1 \pmod{283}.$$

Man behöver ej räkna ut denna dignitet av 2, som blir ett 15-siffrigt tal; vid bildandet av successiva digniteter av 2 minskar man med multipler av 283, så ofta detta är möjligt. Man får

$$2^{12} = 4096 \equiv 134,\ 2^{24} \equiv 17956 \equiv 127,\ 2^{48} \equiv 16129 \equiv -2 \because 2^{47} \equiv -1.$$

Således är $2^{47} + 1$ delbart med 283.

På samma sätt finner man för $p = 83$, $s = 3$, $P = 499$:

$$2^{10} = 1024 \equiv 26,\ 2^{20} \equiv 676 \equiv 177,\ 2^{40} \equiv 31329 \equiv -108.$$
$$2^{80} \equiv 11664 \equiv 187,\ 2^{83} \equiv 8 \cdot 187 = 1496 \equiv -1.$$

Således är $2^{83} + 1$ delbart med 499.

För $p = 97$ ger $s = 5$ faktorn 971. För $p = 73$ ger $s = 12$ faktorn 1753.

Jag övergår till talen $3^p + 1$. För kongruensen

$$3^p \equiv -1 \pmod{P}, \tag{5}$$

där p och P äro primtal, fordras, att

$$P = 2sp + 1 \tag{6}$$

och att

$$3 \equiv g^{ks}, \tag{7}$$

där k är udda. Om s är udda, är 3 en kvadratisk icke-rest till P. Härför fordras, att

$$2sp + 1 = 12k \pm 5.$$

Det övre tecknet är omöjligt, ty då finge man $sp = 6k + 2$; men s och p äro udda. Det undre tecknet ger $sp = 6k - 3$, varav följer, att s måste vara delbart med 3. Om s är jämnt, är 3 en kvadratisk rest till P. Härför fordras, att

$$2sp + 1 = 12k \pm 1.$$

Det undre tecknet är omöjligt, ty då vore $sp = 6k - 1$. Det övre ger $sp = 6k$. Således måste även i detta fall s ha faktorn 3. Vi ha således funnit, att om P är en primfaktor till $N = \frac{1}{4}(3^p + 1)$, måste P ha formen

$$P = 6np + 1.$$

Genom prövning för $n = 1$ har jag funnit, att för $p = 11$ får N faktorn 67; den andra faktorn blir $661 = 6 \cdot 10 \cdot 11 + 1$. För $p = 17$ har jag för $n = 1$ och 3 funnit faktorerna 103 och 307 och sedan genom direkt division faktorn $1021 = 6 \cdot 10 \cdot 17 + 1$. För $p = 29$ har jag funnit faktorn 523.

Ett kärnomvandlingsförsök med på konstgjord väg accelererade projektiler.

Av NILS RYDE.

I allmänhet torde man föreställa sig, att det erfordras stor och dyrbar experimentell utrustning för att åstadkomma en kärnsprängning eller, rättare sagt, en kärnomvandling eller kärnreaktion med tillhjälp av projektiler, som på konstgjord väg bibringats stor hastighet. Så är emellertid ej fallet, utan tvärtom är det möjligt att med en förhållandevis blygsam apparatur och med tämligen lätt åstadkomna spänningar frambringa och påvisa dylika elementomvandlingar. Visserligen blir utbytet vid processerna därvid ej så stort, men detta är icke av avgörande betydelse, då iakttagelsemetoderna möjliggöra en registrering av individualprocesser. I det följande skall lämnas en beskrivning av ett försök, som gör det möjligt att utan användning av extremt höga accelererande spänningar påvisa reaktioner mellan det »tunga vätets», deuteriums (^{2}H eller ^{2}D), kärnor. Dessa antagas vara sammansatta av en proton och en neutron. Försöket är även i andra avseenden instruktivt. Då kärnreaktionerna åstadkommas med kinetiska energier hos projektilerna, som äro små jämförda med det arbete, som enligt den klassiska teorien erfordras för att forcera den beskjutna kärnans elektriska repulsionsfält, visar försöket, att den klassiska teorien slår slint. Från vågmekanikens ståndpunkt låter sig denna avvikelse från den klassiska teorien lätt förstås, och försöket ger således beträffande ett centralt problem ett experimentellt belägg för den vågmekaniska teoriens överlägsenhet över den klassiska teorien. För de vid reaktionerna bildade partiklarna kan absorptions- och räckviddsbestämningar utföras, och slutligen gör uppkomsten av neutroner det möjligt att studera karakteristiska egenskaper hos dessa partiklar och påvisa en annan kärnreaktion, som för till uppkomsten av konstgjort radioaktiva element.

Att bland mångfalden av nu kända kärnomvandlingar med konstgjort accelererade partiklar just de anförda processerna — reaktioner mellan tunga väteatomkärnor — valts, beror dels därpå, att utbytet vid dessa är förhållandevis mycket större än vid andra dylika processer, dels därpå, att dessa processer spelat en betydande roll inom kärnfysiken och varit föremål för ingående studium.

För att åskådliggöra förhållandena vid en kärnreaktion kunna vi använda oss av fig. 1, vari förloppet av den elektriska potentialen nära invid en atomkärna är tecknat. Av fig. framgår, att vid närmande intill kärnan potentialen först växer omvänt proportionellt mot avståndet från kärnans centrum. Inom detta område gäller den Coulombska lagen. Minskas avståndet ytterligare, komma attraktionskrafter från kärnans beståndsdelar att kunna

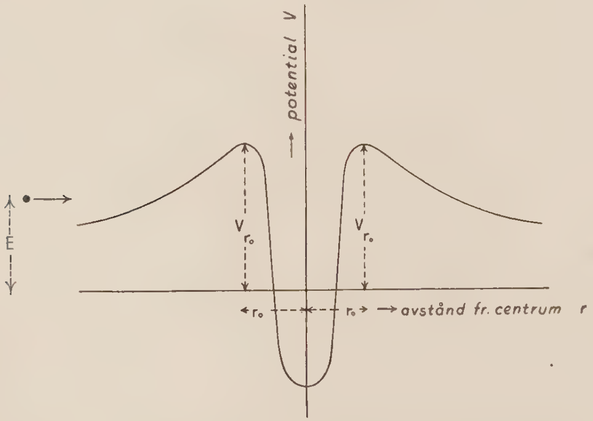


Fig. 1. Den elektriska potentialen vid en atomkärna.

göra sig gällande, avvikelser från Coulombfältet bli märkbara och potentialen når för $r = r_0$ ett maximum för att sedan snabbt avtaga. På så sätt uppkommer en »potentialgryta», vars radie r_0, »kärnradien», och sidohöjd V_{r_0} växer med växande ordningstal hos kärnan. För de lägsta elementen är »kärnradien» av storleksordningen 10^{-13} cm, medan den Coulombska lagen torde vara giltig intill 10^{-12} cm avstånd från kärnans centrum.

Vi antaga nu, att en positivt laddad partikel med kinetiska energien E skjutes mot kärnan. Är $E > V_{r_0}$, kan partikeln alltid forcera »potentialgrytans» kant och tränga in i kärnan, på samma sätt som ett klot, som slungas uppför en backe, alltid — vi bortse från friktion — når över backens krön, såvida dess kinetiska energi är större än differensen mellan dess potentiella energi på krönet och vid begynnelsen av backen. Hur gestalta sig förhållandena, om $E < V_{r_0}$, d. v. s. i det fall, som tecknats i fig. 1? Slunga vi klotet uppför backen med mindre utgångshastighet än den, som enligt den klassiska mekaniken erfordras, för att backen skall kunna forceras, så säger oss erfarenheten, att klotet aldrig når över backens krön. På samma sätt är det enligt den klassiska mekaniken ej möjligt för en partikel, för vilken $E < V_{r_0}$, att tränga in i atomkärnan; partikelns kinetiska energi räcker icke till för att övervinna de Coulombska repulsionskrafterna. Men helt annorlunda ställer sig problemet, om vi beakta, att partikeln enligt den de Broglieska hypotesen har vågkaraktär. Då blir ett inträngande av partikeln i kärnan icke omöjligt. Vissa partiklar tränga in i kärnan, andra studsa bort från densamma (fig. 2). Med vågmekanikens hjälp kan man beräkna sannolikheten N för det förra alternativet. Man finner för en stötande väteatomkärna

$$N = Ke^{-4\pi^2 Ze^2/hv},$$

där K är en konstant, v projektilens hastighet i förhållande till den träffade kärnan, Z antalet laddningsenheter eller ordningstalet hos den senare, e elementarladdningen och h Plancks konstant. Uttrycket visar, att sannolikheten för uppkomsten av en omvandling avtager hastigt med växande kärnladdning, men ökas snabbt med växande hastighet hos den stötande partikeln. Fig. 3 visar, hur omvandlingssannolikheten beror av den accelererande spänningen enligt av Döpel och andra utförda mätningar vid bombardemang av deuterium med deutoner. Denna kurva kan man använda sig av för att uppskatta storleken av potentialbarriären V_{r_0}. Mätningarna ha utförts med förhållandevis tjocka skikt av deuteriumhaltiga substanser. Nu visar kurvan, att vid spänningar högre än c:a 200 kV utbytet växer lineärt med växande spänning. Detta betyder, att för spänningar > 200 kV omvandlingssannolikheten är konstant, och antalet omvandlingar växer därför proportionellt med de bombarderande partiklarnas förmåga att intränga i substansen. Men omvandlingssannolikheten blir konstant först för $N = 1$, d. v. s. för energier hos de stötande partiklarna, som äro större än eller lika med den, vilken erfordras för att forcera potentialbarriären enligt den klassiska mekaniken.

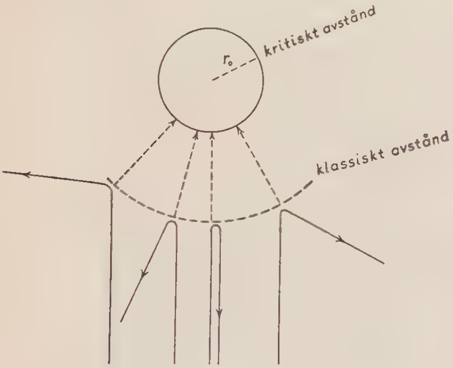


Fig. 2. Beskjutning av en atomkärna med snabba projektiler.

En energi av minst 200 ekV[1] bör således en deuton ha för att enligt denna kunna övervinna de repellerande Coulombska krafterna vid en annan deuton. Eftersom vid D → D-reaktionen båda de reagerande kärnorna ha lika massa, åtgår halva den stötande partikelns energi till det resulterande systemets kinetiska energi, och således är endast hälften av den bombarderande deutonens energi effektiv vid omvandlingen, d. v. s. deutonens potentialbarriär V_{r_0} torde uppgå till c:a 100 ekV. Detta är en förhållandevis låg barriär — vid t. ex. Li eller B ligger potentialtröskeln c:a 10 gånger högre — och häri ligger orsaken till att D → D-reaktionen ger så gott utbyte även vid låga accelererande spänningar. Ännu vid 5 kV spänning har kärnomvandling kunnat påvisas.

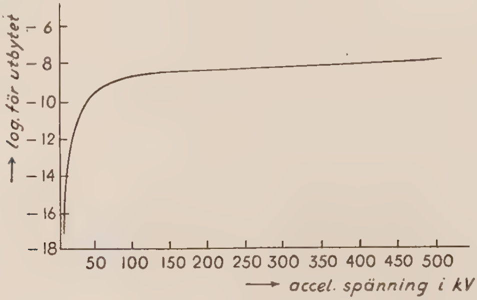


Fig. 3. Omvandlingssannolikheten vid D → D-reaktionen såsom funktion av projektilernas hastighet.

D → D-reaktionen kan förlöpa på två olika sätt. I ena fallet avger den ena deutonen en neutron till den andra, varvid således den förra övergår i en proton, den senare i en triton enligt formeln

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H}.$$

Vid omvandlingen reagera med varandra och uppkomma endast isotoper av ett och samma element; i detta avseende är reaktionen unik. Protonerna ha en räckvidd i luft av 15,3 cm och en energi av 3 MeV, medan för tritonen motsvarande värden är 1,7 cm resp. 1 MeV. Fig. 4 visar en Wilsonkammarupptagning av processen (det långa dimspåret t. v. härrör från protonen, det korta t. h. från tritonen).

---

[1] 1 elektronkilovolt (ekV) = 1000 elektronvolt. 1 elektronmegavolt (MeV) = 1000000 elektronvolt. 1 elektronvolt är det tillskott i rörelseenergi, som en elektron får vid genomlöpandet av ett elektriskt potentialfall på 1 volt.

Parallellt med den anförda reaktionen sker även en omvandling enligt formeln

$$^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{1}_{0}n.$$

Vid denna process avger således den ena deutonen en proton till den andra, varvid en heliumatomkärna med masstalet 3 uppstår och en neutron frigöres. Neutronens energi är 1,8 MeV, heliumkärnans 0,7 MeV. Den senare har en räckvidd av 4,3 mm. Alla dessa förhållanden ha klarlagts genom ingående försök och omsorgsfulla mätningar.

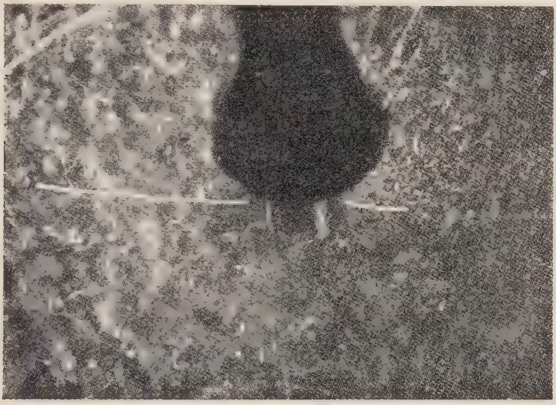


Fig. 4. Wilsonfotografi av D → D-process (enl. Dee).

För båda processerna är utbytets beroende av den accelererande spänningen inom mätningsfelens gränser detsamma, och förhållandet mellan utbytet för neutronemissionsprocessen och för protonemissionsprocessen har visat sig vara nära 1. Vad utbytets storleksordning beträffar, uppgår den till $1 : 10^{17}$ vid 5 kV, till $1 : 10^{9}$ vid 100 kV och till $1 : 10^{8}$ vid 500 kV. Dessa förhållandevis stora utbyten gör det möjligt att påvisa de båda omvandlingsprocesserna helt enkelt genom att bombardera någon substans med deutoner. Dessa hamras därvid in i substansen och bilda måltavlor för efterföljande partiklar. Denna effekt har tidigare givit upphov till misstolkningar, i det att vissa forskare trott sig kunna påvisa en söndersprängning av deutonen själv vid beskjutning av tunga atomkärnor.

För att experimentellt utföra och påvisa kärnomvandlingarna ifråga erfordras ett lämpligt urladdningsrör, en högspänningskälla, som kan leverera spänningar på helst 20 — 40 kV, en indikator för registrering av de utslungade partiklarna samt något »tungt vatten». Ett urladdningsrör, som möjliggör en lätt reproducering av försöket och avsetts att användas vid föreläsningsförsök, har konstruerats av Döpel.[1] I detta får en urladdning äga rum mellan en anod och en vattenkyld katod. Röret tillverkas av glas, kan evakueras genom ett rör vid katoden och tillföres ångor av tungt vatten genom två glasrör, ett av ordinär tjocklek och ett kapillärrör, båda fastsmälta vid urladdningsröret och på sätt, fig. 5 visar, förbundna med en kran, i vars kik några droppar tungt vatten befinner sig. Genom det tjockare glasröret kan urladdningsröret tillföras större mängder vattenånga, varigenom ett relativt högt tryck erhålles i urladdningsröret. En stark urladdningsström kan då ledas genom detta och ett stort antal deutoner därigenom på kort tid hamras in i ytan av en aluminiumplatta på katoden. Sedan denna sålunda preparerats, förbindes urladdningsröret genom kapillärröret med krankikens inre, och genom evakuering upprätthålles ett konstant, lågt tryck i urladdningsröret, vilket gör det möjligt att anlägga en hög spänning mellan anod och katod.

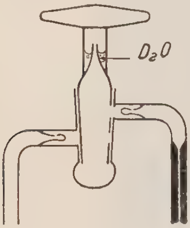


Fig. 5.
Anordning för tillförsel av D_2O-ångor till urladdningsröret enl. Döpel.

Författaren har använt den anordning, som fig. 6 visar. I behållaren *A* finnes deuterium, varav mellan kranarna K_1 och K_2 en lagom kvantitet kan uttagas. Önskas högt tryck i urladdningsröret *B*, öppnas kranen K_3; önskas lågt tryck, hålles denna kran stängd, och en svag ström av deuterium får passera genom väggarna av ett insmält palladiumrör, som uppvärmes på elektrisk väg med en motståndsspiral. Ett variabelt motstånd i serie med denna gör det möjligt att variera uppvärmningen, varigenom deuteriumströmmen kan regleras. Det tunga vätet framställes lätt genom elektrolys av tungt vatten. Urladdningsröret *B* av kvarts (eller glas) har vattenkyld såväl anod som katod. Det inre av katoden utgöres av en genomborrad aluminiumstång, som nedtill är tillsluten med en aluminiumpropp, avfräst så, att dess övre plana yta bildar 45° vinkel med rörets axel. De av spänningsfallet mellan anod och katod accelererade deutonerna träffa denna yta. Mitt för densamma är i katodväggen ett hål uppborrat, vilket tillslutits med ett kopparfolium av ung. 0,01 mm tjocklek, stagat av ett trådnät av mässing.

---

[1] Phys. Zeitschr. Bd 38 (1937), s. 979.

Såsom högspänningskälla använde författaren ett högspänningsaggregat, som kunde leverera likspänningar upp till 100 kV. Detta är dock ingalunda nödvändigt för försökets utförande utan härtill kan enklare anordningar mycket väl användas, t. ex. ett större induktorium med eller utan likriktare eller en influensmaskin, som kan leverera spänningar på några tiotal kV och strömstyrkor på ett par mA.

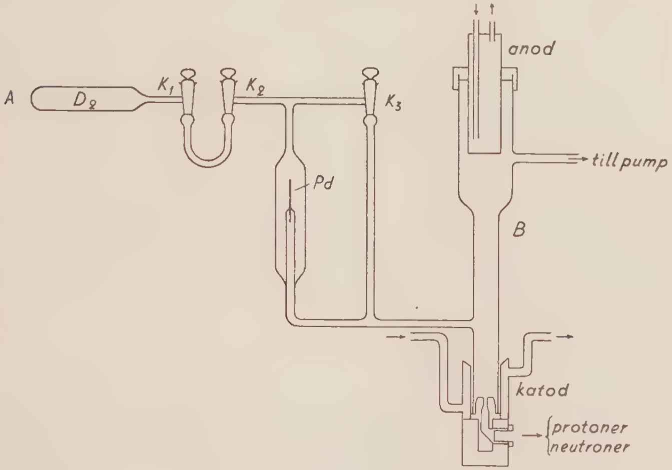


Fig. 6. Experimentell anordning för påvisande av D → D-reaktionen.

För att påvisa protonerna, som utslungas genom det av kopparfoliet täckta fönstret kan man enklast använda en scintillationsskärm. En sådan tillverkar man sig lätt genom att överdraga en glasplatta med ett tunt skikt av något bindemedel (t. ex. zaponlack) och i detta strö sidotbländepulver, silat genom tunn linneväv. Scintillationerna betraktas genom en lupp eller ett ljusstarkt, svagt förstorande mikroskop. I stället för scintillationsobservationer kan man med fördel använda sig av protonernas förmåga att utlösa ett räknerör, kopplat till en förstärkare med räkneverk. Därvid är det viktigt att sörja för god avskärmning av de känsliga delarna av indikatorn, för att icke störningar från urladdningen i urladdningsröret skola komma in. Lämpligen innesluter man därför räkneröret i en väl jordad metallåda och för tilledningarna till denna genom skärmade kablar eller metallrör till förstärkaren. Med dylika anordningar kan man studera protonstrålarnas absorption, t. ex. i tunna cellofanfolier.

Bildningen av neutroner vid den ena av de ovan nämnda → D-reaktionerna kan man påvisa genom att omge katoden med ett 15—20 cm tjockt paraffinblock och inuti detta anbringa ett tunt folium (c:a 0,1 mm) av en lämplig metall, t. ex. silver eller rhodium. De från katoden utgående snabba neutronerna passera genom detta folium utan nämnvärd absorption och kollidera vid inträdet i paraffinen med väteatomkärnorna i denna, varvid de undergå diffus spridning. Genom upprepade kollisioner nedsättas deras hastigheter, och småningom antagas de relativt låga hastighetsvärden, som tillkommer atomerna till följd av den termiska rörelsen. En del neutroner reflekteras tillbaka och träffar metallfoliet, där de reagera med metallatomkärnorna. Därvid kunna radioaktiva kärnor bildas. Sålunda uppkommer vid bombardemang av silverisotopen med masstalet 107 med neutroner en radioaktiv silverisotop med masstalet 108 enligt formeln

$$^{107}_{47}\mathrm{Ag} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{108}_{47}\mathrm{Ag} + h\nu,$$

där ν är frekvensen för en vid reaktionen emitterad γ-strålning. Den vid reaktionen bildade silverisotopen sönderfaller spontant under emissionen av en elektron, varvid en stabil kadmiumisotop uppkommer

$$^{108}_{47}\mathrm{Ag} \rightarrow {}^{108}_{48}\mathrm{Cd} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}.$$

Halveringstiden för silverisotopen $^{108}\mathrm{Ag}$ är 150 sek. Denna process kan man påvisa genom att hålla foliet framför ett känsligt räknerör. Avlägsnar man paraffinblocket, uppkommer ingen radioaktivitet, då utbytet vid bombardemang med snabba neutroner är mycket mindre än det, som erhålles med användning av mindre snabba sådana. Detta antages bero därpå, att en långsam neutron, då den flyger genom en atomkärna, tillbringar förhållandevis lång tid i denna, varför chansen, att den skall fastna i kärnan är större för en neutron med mindre hastighet än för en sådan med större hastighet. Detta är en fundamental egenskap hos neutronerna.

Experimentell behandling av grundämnenas periodiska system vid kemiundervisningen.

Av **BERTIL ENGLUND.**

Den oorganiska kemiens ställning i kemiundervisningen har under senare år stått under diskussion.[1] Det har med rätta påpekats, att stundom alltför mycket tid ägnats åt den rent deskriptiva oorganiska kemien på bekostnad av viktigare områden av ämnet, fysikalisk kemi, modern organisk kemi med biokemi, vilka nu äro mera aktuella. Den oorganiska kemien är emellertid alls icke ett avslutat kapitel, såsom det ibland påstås, tvärtom erbjuder den alltjämt problem av största betydelse, exempelvis inom valensläran. Ur en intressant artikel av prof. H. KLEMM, Tekniska Högskolan i Danzig, citerar jag[2]: »Die am Anfang dieses Jahrhunderts geäusserte Ansicht, die anorganische Chemie besässe keine Probleme mehr, ist grundfalsch. Ein nicht kleiner Teil der anorganischen Chemie existierte bisher überhaupt nur auf dem Papier und war durchaus nicht immer richtig. Gerade bei den Bestrebungen, allgemeine Beziehungen zu finden, erkennt man immer wieder, wie unvollständig alles noch ist.» — Den oorganiska kemien bör enligt min mening fortfarande intaga en framskjuten plats i skolans kemiundervisning.

Inför svårigheten att på den begränsade tiden kunna behandla ett alltför rikt material måste man dock givetvis avstå från åtskilligt, som förr behandlades utförligt. Vid undervisningen får man i stället sträva efter sammanfattande översikter, sedan blott ett tillräckligt, grundläggande erfarenhetsmaterial samlats. Jag delar helt de Metodiska anvisningarnas åsikt, att det periodiska systemet bör vara det centrala vid undervisningen på gymnasiet, men menar, att detta kan ske, endast om här liksom eljest *kemiska experiment* få utgöra grunden. Systemet får inte bli en katalog, som inläres, sedan alla grundämnen var för sig lästs, utan dess grundtankar skola inarbetas under det fortlöpande arbetet. Under en följd av år har jag sålunda försökt att låta det naturliga systemet jämte spänningsserien bliva en kärna, kring vilken det oorganiskt-kemiska vetandet i det differentierade gymnasiet koncentrerar sig.

---

[1] G. STARCK, H. ERDTMAN. Elementa, *20*, 46, 1937.

[2] H. KLEMM, Z. angew. Ch. *50*, 524, 1937.

Beträffande själva uppställningen anser jag, att man bör ha följande önskemål, för att den skall bli lämplig för skolundervisning. Systemet bör vara 1) överskådligt och lätt att skriva upp i sina huvuddrag, 2) möjligt att bygga upp omkring väl kända, »centrala» grundämnen och 3) möjligt att demonstrera experimentellt. Av de många olika uppställningar, som under årens lopp framträtt, motsvarar enligt min tanke den bäst de pedagogiska kraven, vilken finnes i Remys Lehrbuch der anorganischen Chemie[1] och som f. ö. ganska nära ansluter sig till det ursprungliga Mendelejeffska schemat. Systemet består av nio vertikalt ordnade grupper (0—VIII med de vanliga beteckningarna) och sju horisontella perioder. Inom var och en av grupperna I t. o. m. VII finnes en *huvudgrupp* och en *bigrupp,* så t. ex. i grupp IV huvudgruppen *C, Si, Ge, Sn, Pb* och bigruppen *Ti, Zr, Hf, Th.* De regelbundenheter, som studiet i skolan främst bör ägnas åt, finnas i huvudgrupperna. Det »delade» systemet — föreslaget av J. THOMSEN och av KOSSEL[2] — upptagande 16 vertikala grupper, belyser vissa sammanhang på ett förträffligt sätt men tyckes mig mindre lätt att hålla i minnet. Det schema, som BOHR[3] sedan uppställt i anslutning till sin atomteori och som också ger plats åt de sällsynta jordmetallerna, är alltför omfångsrikt för att ge den översikt över de regelbundna ändringarna av de kemiska egenskaperna, vilken min framställning syftar till. I detta sammanhang vill jag nämna, att jag vid genomgången av systemet i *kemiundervisningen* icke närmare diskuterar orsakerna till lagbundenheterna som en följd av atomernas elektronkonfiguration. Denna fråga kan enligt min erfarenhet däremot bli mycket givande, då klassen i den fysikaliska optiken hunnit behandla atomernas energitillstånd — i den mån tiden då medger och särskilt, om fysik och kemi handhavas av samme lärare.

Grundämnenas naturliga system kan lämpligen införas i undervisningen i R II^3, resp. R III^4, sedan Na, K, Ca, Mg, Al och ev. ännu några metaller studerats. Huvuddragen av spänningsserien har vid denna tidpunkt kunnat ställas upp på rent kemisk grund efter metallernas olika reaktionsförmåga med kallt och varmt vatten, luft och utspädda syror. Från föregående års kurser äro halogenernas egenskaper, de viktigaste syrorna och något om deras styrka bekanta.

---

[1] Återgivet i GRIMSEHL, Lehrbuch der Physik II: 2, s. 5.

[2] Se t. ex. STARCK, Lärobok i kemi för realgymnasiet och GUNNESON och KHENNET, Elementa, *11*, 223, 1928.

[3] GRIMSEHL, s. 420.

För studiet av grundämnenas släktskapsförhållanden är följande tablå praktisk och fullt tillräcklig (samt lätt att minnas):

H	He	Li	Be	B	C	N	O	F
	A	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl
		K			Ge	As		Br
		Rb			Sn	Sb		J
		Cs			Pb	Bi		

Det påpekas, att ämnena i de två horisontalraderna ordnats efter stigande atomvikt, och det blir den kommande, experimentellt lagda utredningens uppgift att visa, att denna anordning är givande ur kemisk synpunkt. Därvid har jag brukat börja behandlingen av de två perioderna He — F och A — Cl med en erinran om den regelbundna ändringen av det maximala positiva *valenstalet* inom perioden, då atomvikten stiger. Jag har funnit det nyttigt att särskilja begreppen valenstal och valenskraft och undviker helst ordet valens utan närmare specifikation. Valenstalet (som motsvarar s. k. elektrovalens) är positivt eller negativt (eller 0). I här ifrågavarande fall erhålles det för t. ex. 2:a periodens element ur de bekanta formlerna för de högsta oxiderna (Na_2O — Cl_2O_7) eller kloriderna ($NaCl$ — PCl_5).

Bestämning av metallhydroxidernas styrka som baser kan icke ske direkt; genom undersökning av salternas hydrolys kan man erhålla upplysning därom.

$NaOH$	stark bas	$NaCl$	neutral i vattenlösning
$Mg(OH)_2$	svag bas	$MgCl_2$	svagt sur reaktion i vattenlösning
$Al(OH)_3$	amfoter mycket svag bas	$AlCl_3$	sur reaktion i vattenlösning

Som indikator kan metylorange användas (se vidare nedan). Efter den amfotera $Al(OH)_3$ följa i perioden utpräglade syror. Om icke dessas styrka redan är tillräckligt känd, kan kännedom erhållas genom experiment över salternas förhållande till vatten. Lösningar av K- eller Na-salter av syrorna prövas med fenolftalein och metylorange, helst också med bromtymolblått. För jämförelses skull prövas också stark bas, stark syra och destillerat (kolsyrefritt!) vatten med samma indikatorer. Saltlösningarna kunna beredas genom upplösning av några tiondels gram salt direkt i ett provrör med vatten — de sura salternas pH är ju f. ö. oberoende av koncentrationen. Resultatet av undersökningen framgår av tabellen, där den ungefärliga färgen anges.

	Fenolftalein.	Bromtymolblått	Metylorange
Stark bas	röd	blå	gul
Vatten	färglös	grön	gul
Stark syra	färglös	gul	röd
M_2SiO_3	röd	blå	gul
M_3PO_4	röd	blå	gul
M_2HPO_4	svagt röd	blå	gul
M_2SO_4	färglös	grön	gul
MH_2PO_4	färglös	gul	orange
$MHSO_4$	färglös	gul	röd

Ju svagare den mot saltet svarande syran är, desto mer är indikatorns färg förskjuten åt »basisk färg», resp. röd, blå, gul. Exempelvis synes av kolumnen för metylorange, att $H^{\cdot}H_2PO_4'$ är svagare än $H^{\cdot}HSO_4'$ o. s. v. De erhållna resultaten kunna sammanfattas sålunda: kiselsyra är en mycket svag syra (liksom fosforsyra i 3:e dissociationsstadiet), fosforsyra en medelstark och svavelsyra en stark syra. — Indikatorernas olika känslighet för sur och basisk reaktion kan bedömas av försöken med bas, vatten och syra.[1]

Behandlingen av vertikalgrupperna, grundämnesfamiljerna, anknytes med fördel till det som förut genomgåtts om halogenerna, sedan man påvisat, att element med liknande kemiska egenskaper återkomma periodiskt och i vår uppställning stå under varandra. För att särskilt visa, hur halogenernas kemiska egenskaper förändras inom gruppen använder jag följande försök. Konc. H_2SO_4 sättes till några kristaller av resp. KCl, KBr och KJ i litet vatten. Om de tre reagensglasen uppställas mot en vit bakgrund, synas olikheterna väl:

KCl) färglös, starkt sur gas: HCl
KBr) ljusbrun gas, som först rödfärgar, sedan bleker ett blått lackmuspapper: $HBr + Br_2$
KJ) starkt brunfärgad lösning och violetta ångor: J_2.

Den obeständiga väteföreningen HJ reducerar samtidigt syran till H_2S. — Några kristaller av jod och $KBrO_3$ uppvärmas tillsammans i vatten: jod »uttränger» brom ur dennas syreförening.

Förutom denna grupp VII passar grupp I för att demonstrera, att grundämnen i samma vertikalrad ha liknande egenskaper. Beträffande K och Na har det i detta sammanhang intresse att visa, att K reagerar häftigare med vatten än Na, alltså står framför i spänningsserien (liksom Ba framför Ca).

---

[1] Se vidare ENGLUND, Elementa, *18*, 159, 1935.

För ett mer ingående studium av grundämnesfamiljerna har jag funnit grupp V mest givande ur experimentell synpunkt. Denna grupp innehåller dels grundämnen, som äro väl kända från föregående års kurser (kväve och fosfor), dels visserligen i och för sig obetydliga men ur systematisk synpunkt intressanta ämnen, som ej förut behandlats (arsenik, antimon och vismut). Följande experiment tjäna att nu belysa dessas kemi:

1. As_2O_3 kokas i konc. saltsyra (därvid bildas, om koncentrationen är stor, droppar av $AsCl_3$, som dock snart upplösas och hydrolyseras) samt i stark bas; oxiden löses även däri och är sålunda amfoter.

2. $Sb(OH)_3$ framställes som fällning. Denna fördelas i två provrör och behandlas med resp. stark syra och bas. Den löses av båda och är således amfoter.

3. Med $Bi(OH)_3$ utföres samma försök. Den löses endast av syran, således är den basisk.

4. Metallisk antimon och vismut behandlas med stark salpetersyra; man erhåller under utveckling av nitrösa gaser antimonsyror ($HSbO_2$ och $HSbO_3$), resp. vismutnitrat.

Slutsatsen av försöken är, att grundämnen med högre atomvikt inom gruppen äro mera »metalliska» (ha basiska oxider och fasta kristalliserade salter, bilda positiva joner). Detta kan ytterligare belysas, om man har tillgång till de tre kloriderna:

$AsCl_3$	vätska	smpt	—18°
$SbCl_3$	lättsmälta krist.		73°
$BiCl_3$	krist.		232°.

Samband mellan valenstal och kemisk karaktär hos ett grundämne kan diskuteras och visas med arsenikens syror, men i experimentellt hänseende är grupp IV lämpligare. Inom denna grupp föreslås följande försök:

1. Glödande träkol, stanniol och bly få reagera med konc. salpetersyra, varvid erhålles resp. koldioxid, tenndioxid och lösning av blynitrat.

2. CO_2 inledes i ganska koncentrerad lösning av Na_2SiO_3, varvid den svagare kiselsyran utfälles.

3—4. $Sn(OH)_2$ och $Pb(OH)_2$ framställas och undersökas på samma sätt som $Sb(OH)_3$. De äro amfotera.

5. PbO löses i salpetersyra.

6. PbO_2 behandlas med salpetersyra, svavelsyra och iskall konc. saltsyra. Den gula lösningen av $PbCl_4$ sönderfaller vid svag uppvärmning.

Samma slutsats — som förut i grupp V — erhålles om den alltmer utpräglade metallkaraktären, då man går nedåt i raden, men dessutom finner man, att ett grundämne på lägre positivt valensstadium lättare bildar positiva joner än på ett högre, med andra ord att t. ex. $Pb(OH)_2$ är en starkare bas än $Pb(OH)_4$. Tennets ställning mellan metall och metalloid framgår också därav, att dess högsta klorid $SnCl_4$ är en vätska liksom CCl_4, $AsCl_3$ o. d.

Dissociationskonstanter för flera av de svaga elektrolyter, som diskuterats här, ha blivit bestämda. Som exempel på, hur de fysikaliska metoderna ge resultat, som helt överensstämma med dem, som här erhållits med »grövre» metoder, anför jag några typiska:

		Dissociationskonstanter (1:a stadiet)
Syror:	H_3PO_4	$7 \cdot 10^{-3}$
	H_3AsO_4	$5 \cdot 10^{-3}$
	H_3AsO_3	$6 \cdot 10^{-10}$
	H_2SnO_2	$4 \cdot 10^{-10}$
	H_2PbO_2	$1 \cdot 10^{-12}$
Baser:	$As(OH)_3$	$1 \cdot 10^{-14}$
	$Pb(OH)_2$	$4 \cdot 10^{-5}$.

* * *

Sammanfattningen av undersökningen kan ges i översiktlig form sålunda:

I		VII
	amfotera hydroxider	metalloider sura oxider beständiga väteföreningar
metaller basiska oxider		

Givetvis får man ej underlåta att påpeka de brister, som vidlåda ett så enkelt system. Främst bland dessa skönhetsfel märkes kopparens placering i grupp I (bigruppen *Cu, Ag, Au*). Bigrupperna, som innehålla metaller med starkt växlande valenstal, erbjuda alltid systematiska svårigheter. I sådant sammanhang är en varning för en alltför ytlig och schematisk tolkning av systemet på sin plats.

Det kan nu tyckas, som om jag med detta »system» utökar den redan dryga kemikursen. I själva verket har jag funnit den metod, som skisserats i denna uppsats, innebära en tidsvinst, eftersom åtskilliga metaller (och föreningar) sedan ej behöva upptagas till utförligare behandling.

Vattnets volymsammansättning.

Av **K.-J. LENANDER.**

I H. Rheinboldts förträffliga arbete, Chemische Unterrichtsversuche (anmälan av G. Starck i Elementa, *17*, 179) beskrives en apparat för demonstration av vattnets volymsammansättning, som enl. Rheinboldt hänför sig till A. W. Hofmann. Denna apparat (fig. 1 a) består av ett U-rör, vars ena skänkel är omgiven av värmemantel och upptill försedd med gnistgap för explosion. Den andra skänkeln är nedtill försedd med kran för avtappning av kvicksilver. Gaserna skola införas genom den öppna skänkeln medelst långt glasrör försett med slang. Efter varje försök måste apparaten tömmas och rengöras och kvicksilvret torkas. Rheinboldt säger i en anmärkning, att en trevägskran i eudiometerrörets övre ända skulle göra försöket bekvämare men har sannolikt ej gjort något försök med en dylik anordning, då svårigheter förorsakade av vattenkondensation möta, som ej omnämnas. En del, visserligen en liten del, av explosionsrummet kommer nämligen att befinna sig utanför den av het ånga omspolade skänkeln. Kapillärröret, som utgör explosionsrummets förlängning, måste ju gå genom gummiproppen till den ovanför anbragta trevägskranen. Trots att kokvätskans kokpunkt är 119° (tetrakloretylen) och trots att det med asbestgarn isolerade röret från kokkolven ledes genom proppen, kondenseras ånga i kapillärdelen.

Denna kondensation kan emellertid förebyggas genom uppvärmning av kapillärröret på elektrisk väg. Med en av firma R. Grave utförd apparat enl. Hofmann (fig. 1 a) men med trevägskran och elektriskt uppvärmt kapillärrör har förf. nått goda resultat. I fig. 1 b återges den övre delen av eudiometerröret i denna apparat. Tunn asbest är lindad närmast röret, på denna nikromtråd (0,3 mm; c:a 21 ohm) och utanpå denna ett lager av grövre asbest. Genom att reglera strömmen kan man förhindra kondensering utan att äventyra röret. Därvid är dock att märka, att ångan ej får pressas ur röret efter försöket utan bör *sugas* ut med vattensug, som nämnes nedan. Vid förf:s försök befanns lämpligt att omedelbart vid och efter explosionen hålla mellan 0,5 och 0,6 A, dvs mellan 5 och 8 W i tråden, om ångvolymen avläses vid lämpligt undertryck. Vid de undertryck som använts erfordras c:a 90° i kapillärröret.

Försöker man fylla på kvicksilver till jämnhöjd och detta sker tillräckligt hastigt, kunna värden erhållas på volymförhållandet vid rådande lufttryck. Men ångvolymen minskas då hastigt på grund av kondensation i kapillärröret, vilket naturligtvis kan hindras genom ökad effekt i värmeelementet, men förf. finner denna metod alltför riskabel och onödig; undertrycksmetoden är bekvämare och synes ge fullt säkra värden.

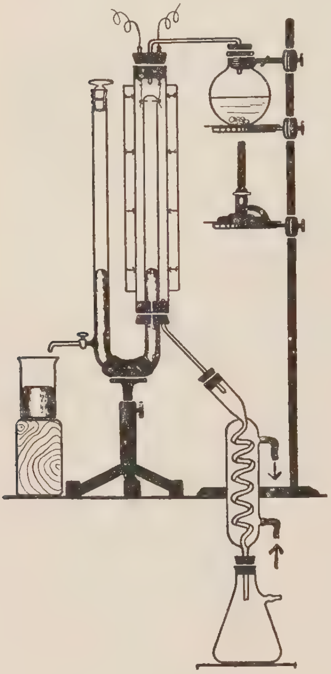


Fig. 1 a

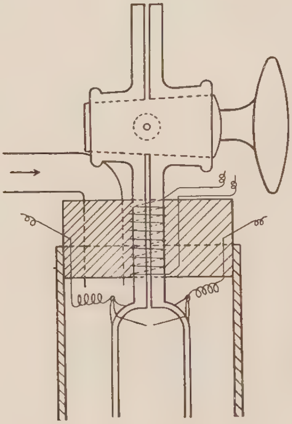


Fig. 1 b

1 a. Apparat enl. Hofmann-Rheinboldt.

1 b. Detalj av eudiometerröret med trevägskran och anordning för elektrisk uppvärmning av kapillärröret.

Ångvolymen blir stabil, om man riktigt avpassar undertrycket och tillser, att kokvätskans temp. håller sig konstant. Vid den kapacitet (0,5 l) hos kokkolven, som förf. först använde, hade temperaturen benägenhet att stiga mot slutet av kokningen. Detta torde förklara, att värdena genomgående blevo något för låga, dvs ångvolymen för stor. En serie av 7 försök, utförda i följd, gåvo alla värden (ej korrigerade) mellan 1,47 och 1,49. Värdena i nedan återgivna försöksserie hänföra sig till försök utförda med en kokkolv på 1 liter; temp. höll sig då konstant. — Temperaturen i mantelrummet uppmättes med tre termometrar, en i rörets mitt och de båda andra vid kloretylenångornas in- och utströmningsöppningar.

Försök kunna utföras i omedelbar följd. Vattenångan suges ut med hjälp av vattensug, varvid en tom tvättflaska insättes mellan trevägskranen och sugen. Före varje ny påfyllning av knallgas utspolas röret och kranen med luft minst två gånger, vilket enkelt sker så, att man öppnar kranen, tills jämnhöjd inträder, och därefter kopplar till sugen.

Den första avläsningen av ångvolymen göres med lägsta möjliga nivå i den öppna skänkeln, den andra efter påfyllning av kvicksilver, lämpligen så mycket som behövs för att något skall bli kvar i den öppna skänkeln vid den påföljande utsugningen. Tack vare kokvätskans (och jenaglasets) egenskaper kan vätskan överföras från kondenskärlet till kokkolven och nytt försök startas, utan att temperaturen i mantelrummet sjunker stort mer än till 90°. Förf. har utfört sådan överföring, då den översta termometern visat 105°.

Knallgasapparaten utgjordes vid förf:s försök av en kraftig glascylinder (15 cm hög; 5 cm diam) med mättad barytlösning och med nickelbleck ($3{,}5 \times 10$ cm) som elektroder. Knallgasen leddes genom en torkflaska med konc. svavelsyra. Då apparaten fick fungera (c:a 2 A) under hela försöksserien (fast dämpat mellan påfyllningarna), stod avloppsröret hela tiden i förbindelse med dragtrumma. — Någon kork behöver ej anbringas i den öppna skänkeln vid explosionen. Bättre är att där placera en mindre tratt. — Graderingen på eudiometerröret är utförd i cc med jämna delstreck, dvs rummet mellan två delstreck är 0,20 cc. Trots detta har förf., som synes i tabellen varit sangvinisk nog att skatta på hundradelar.

Kvicksilverpelarens ställning avlästes på en meterstav, placerad mellan skänklarna. Den avlästa kvicksilverpelaren har före och efter explosionen en temp. av 119° och borde alltså reduceras före subtraktionen för bestämning av undertrycket. En sådan korrektion har också verkställts i tabellen, men den inverkar blott med högst 0,01 på resultatet.

Här nedan anföras senaste resultat av demonstrationer utförda inför klasser i gymnasiet.

Barometerstånd 766,4 mm; rumstemp. 16°. A = knallgas, B = ånga (två avläsningar).

		Hg-pelare mm		Undertryck		Kvot, red. värden
	ml	obs.	red. 16°	obs.	red.	
A.	20,22	201	197,4	565	569	$\frac{20{,}22 \cdot 569}{18{,}3 \cdot 416{,}9} \equiv 1{,}51$
B.	18,30	356	349,5	410,4	416,9	$\frac{20{,}22 \cdot 569}{15{,}0 \cdot 510{,}1} \equiv 1{,}50$
	15,00	261	256,3	505,4	510,1	
A.	21,00	198	194,5	568,4	571,9	$\frac{21{,}0 \cdot 571{,}9}{19{,}3 \cdot 416{,}9} \equiv 1{,}49$
B.	19,30	356	349,5	410,4	416,9	$\frac{21{,}0 \cdot 571{,}9}{15{,}9 \cdot 503{,}3} \equiv 1{,}50.$
	15,90	268	263,1	498,4	503,3	

Det må påpekas, att uppvärmning med kokvätska kan utbytas mot elektrisk uppvärmning. Lektor G. Starck har riktat min uppmärksamhet på en uppsats av Petzold o. Scharf (Z. f. phys. u. chem. Unterricht, 1932, S. 97), som jag förbisett men som förtjänar att uppmärksammas. Nämnda förff. beskriva en apparat, i vilken upphettningen sker medelst motståndstråd, glest lindad utanpå mantelröret; dessa förff. lösa svårigheten med kapillärröret genom att under försöket införa kvicksilver i detsamma. Lektor Starck har modifierat denna metod på sätt, som framgår av nedanstående beskrivning, vilken vänligen ställts till mitt förfogande. Lektor Starck skriver:

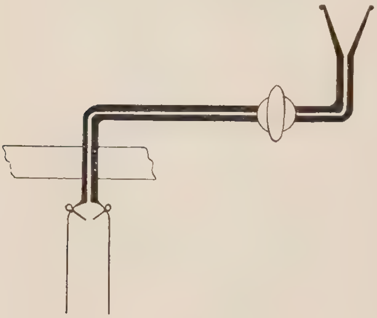


Fig. 2.

Den antydda modifikationen framgår av fig. 2. Eudiometern avslutas uppåt av ett kapillärrör, försett med kran och avslutat av en kapillär slipning. Kapillärröret är vinkelböjt, för att inte kranen skall bli varm och otät. För att förhindra kondensation av vatten i eudiometerns utanför värmemanteln befintliga del fylles kapillärröret med kvicksilver. Arbetssättet blir sålunda följande.

1) Eudiometerröret fylles med kvicksilver ända upp till slipningens botten. 2) Kranen stänges. 3) Den andra hälften av slipningen, som med en ligatur är förenad med knallgasapparaten, isättes. 4) Kranen öppnas och knallgas insuges. 5) Kranen stänges, slipningen borttages. 6) Den trattformiga slipningen fylles med kvicksilver, som försiktigt insuges, så att kapillärröret blir fyllt därmed. 7) Knallgasens volym avläses, varpå fortsättningen är den sedvanliga.

Till frågan om begreppen syra och bas. Neutralisation i andra lösningsmedel än vatten.

Av **BERTIL ENGLUND.**

»Kemien är alltför mycket utspädd med vatten» (Ostwald). Då man definierar syror och baser såsom elektrolyter, vilkas lösningar innehålla fria $H^{\cdot}$- resp. OH'-joner, som vid neutralisation förena sig med varandra, har man bundit sig vid förhållandena i vattenlösningar. I sitt nyutkomna arbete *Kemisk reaktionslära*[1] har prof. G. Hägg uttalat åsikten, att redan läroverkens kemiundervisning borde taga hänsyn till mera generella synpunkter på syra- och basbegreppen, oberoende av lösningsmedlet (Brönsteds teori).

Definitionerna kunna i så fall formuleras: En syra är ett ämne, som kan avgiva positiva vätejoner. En bas är ett ämne, som kan upptaga positiva vätejoner. För att belysa begreppens utvidgade användning och betydelse kunna följande reaktioner vara lämpliga. De äro alla i princip neutralisationer. (Med $H^{\cdot}A'$ betecknas en stark syra)

1. I vatten $Na^{\cdot}OH' + H^{\cdot}A' = NaA + \mathit{HOH}$
2. I etylalkohol $Na^{\cdot}OC_2H_5' + H^{\cdot}A' = NaA + \mathit{HOC_2H_5}$
3. I isättika $Na^{\cdot}OCOCH_3' + H^{\cdot}A' = NaA + \mathit{HOCOCH_3}$.

Den 1:a reaktionen är ju välkänd; det må blott påpekas, att enligt ovanstående definition i Brönsteds anda OH'-jonen är den verkliga basen. Den 2:a reaktionen kan lätt realiseras. Man kan lösa antingen natriumetylat eller natrium i absolut alkohol — i senare fallet påvisas samtidigt alkoholernas karaktär av syror. Den erhållna lösningen färgar fenolftalein starkt röd. Jonen OC_2H_5' är tydligen bärare av basiska egenskaper, och lösningen kan titreras med exempelvis en alkoholisk lösning av svavelsyra.

Beträffande möjligheterna att demonstrera den 3:e reaktionen har jag funnit följande. Som bas tages en lösning av natriumacetat i isättika, och som syra har jag med gott resultat kunnat använda såväl svavelsyra som överklorsyra. Två indikatorer ha visat sig brukbara: *metylviolett*, som ger omslag från violett i »basisk» lösning till blågrått, resp. grönguIt i »sur», beroende på vilken av syrorna som användes, samt *pikrinsyra* med färgomslag från gult till färglöst. — I den vanliga »vattenskalan» äro omslagsintervallen: för metylviolett pH = 3,2 — 1,5 (violett-blått) och pH = 1,5 — 0,1 (blått-gult); för pikrinsyra pH = 1,3 — 0 (gult-färglöst). Sifferkonstanter för motsvarande förhållanden i isättika äro ej kända. — Passande lösningar beredas bekvämt så: 8,20 g $NaOCOCH_3$ (vattenfritt, torkat vid 100°) löst till 200 ml volym i ren konc. ättiksyra, ger en 0,50-n lösning av basen $OCOCH_3'$; 3,0 ml vanl. konc. svavelsyra, resp. 9,0 ml överklorsyra (»sp. v. 1,67 — c:a 70 %») till 200 ml ger 0,50-n syra. (Syrornas koncentration bör kontrolleras genom motsvarande spädning med vatten och titrering.) Indikatorerna lösas i isättika till c:a 1 % lösningar, varav några droppar tagas.

---

[1] Anmälan se detta häfte sid. 239.

Med isättika som lösningsmedel kunna även andra baser titreras. Med bensoat-jon som bas, upplöst i form av $NaOCOC_6H_5$, erhålles liksom med acetat-jon färgomslag vid ekvivalenspunkten. Dimetylanilin och pyridin, alltför svaga för att kunna titreras i vattenlösning, kunna bestämmas med hjälp av överklorsyra med metylviolett som indikator. Allmänt gäller, att styrkan av en bas ökas i ett lösningsmedel av sur karaktär.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

sammanträdde den 28 oktober i Stockholm. Programmet upptog: 1) visning av Radiotjänsts studios och tekniska anordningar; 2) gemensam middag; 3) besök å Institutet för organisk-kemisk forskning. Dagen för sammanträdet hade valts med anledning av att skolorna i Stockholm hade lov den 28—29 oktober; endast föreningens medlemmar i Stockholm med omnejd hade därför kallats till sammanträdet. Anslutningen var stor; 77 deltagare i besöket på Radiotjänst och över 60 i besöket på Institutet för org.-kem. forskning.

Kl 3 em samlades deltagarna på Radiotjänst, i den största av dess 12 studios, där radiokommissarie E. Mattsson först redogjorde för de akustiska problem, som måste lösas vid inredning av inspelningslokaler för rundradioutsändning. Först och främst måste alla rum ljudisoleras från varandra och andra lokaler i fastigheten, varvid särskilt beaktas, att inte murar, bjälklager och järnkonstruktioner få fortplanta ljudvågor. Vid tal eller musik i ett rum dröjer det en viss tid, innan tonen dämpas från ett visst maximivärde till ohörbarhet, det existerar med andra ord en viss efterklangstid, som är större, ju större rummets volym är. En felaktigt avvägd efterklangstid gör talet otydligt och musiken oskön i högtalaren. Efterklangstiden är olika stor för toner av olika frekvens, kortare ju större frekvensen är. Vissa toner framkalla egensvängningar hos materialet i väggarna, och stående vågor utbildas även, beroende på rummets dimensioner och reflexionsförhållandena. Allt detta ger dålig ljudkvalitet i högtalaren. Genom att delvis bekläda väggarna i studion med lämpligt dämpningsmaterial, bryta sönder väggytorna på lämpligt sätt med t. ex. veck av trä, lägga mattor på golvet samt hänga upp gardiner och placera stoppade möbler i rummet kunna dessa akustiska olägenheter bemästras. Det bästa dämpningsmaterialet är ett slags mineralull, benämnd rockwool, vars absorptionskoefficient vid en viss materialtjocklek är ganska lika för olika svängningstal. Filt och tyg däremot dämpa höga toner mera än låga. De största svårigheterna i akustiskt avseende erbjuda studios för orkestermusik. Efterklangstiden i en musikstudio varierar från 0,9 till 0,6 sekunder för frekvenser från 120 till 4000. I en vanlig konsertsal sker dämpningen dels genom publiken, dels genom mattor, möbler o. d., varjämte dörrar, pelare och balkonger ha en sönderbrytande inverkan på ljudvågorna. Ljudet reflekteras ut mot publiken från den bakre väggen i podiet. I en musikstudio, där publik i regel ej förekommer, måste denna ersättas med dämpningsanordningar. Orkestern placeras i rummets ena hälft, där dämpningen är relativt obetydlig; ingen matta täcker parkettgolvet, bakre väggen är slät av hård puts eller trä och endast smärre partier av sidoväggarna äro klädda med rockwool. Instrumenten placeras efter en fastställd plan på det inrutade golvet som pjäserna på ett schackbräde. Violinerna, som ju ha sin plats längst fram, och varifrån endast direkta ljudvågor nå mikrofonen, ha t. ex. ryckt längre fram än brukligt. Mikrofonen är placerad i den andra, dämpade delen av rummet, där golvet är täckt med en tjock matta, bakre väggen sönderdelad med pelare av plywood och där stora stoppade fåtöljer placerats. Då man talar, sjunger eller spelar i ett starkt dämpat rum, erfar man en känsla av att tonen ej bär eller att instrumentet ej ger ifrån sig nog ljud och frestas därav till en olämplig forcering. Tack vare att sångarna eller musikanterna äro placerade i studions odämpade del, undgår man denna olägenhet. I talstudios, avsedda för föredrag, teater m. m., hålles efterklangstiden nere vid omkring 0,4 sekunder för praktiskt taget alla svängningstal. Väggarna dämpas med 3 6 tums rockwool, och taket är försett med plywoodlådor, som starkt dämpa låga toner. Golvet är täckt med matta, för att inte skådespelarnas fotsteg skola höras. Genom relativt hårt material i mattan, tunna, hårda gardiner, vissa hårda väggytor m. m. försöker man undvika dämpningen av övertonerna, som ge talet dess karaktär, och man åstadkommer därmed, att skådespelarna inte frestas att forcera talet.

Mellan en musik- och en talstudio är ett programledarrum beläget. Därifrån dirigeras inspelningen och kontrolleras utsändningens ljudkvalitet i högtalaren. De akustiska förhållandena motsvara därför dem i ett vanligt bostadsrum. Från kontrollbordet, mixern, kan programledaren se de agerande i studion. På mixern finnas 14 rattar samt kopplingar till mikrofoner, högtalare m. m. Rattarna tillåta inkoppling av många olika mikrofoner och diverse ljudeffekter, som erfordras vid t. ex. teaterpjäser. Effekterna äro i stor utsträckning inspelade på grammofonskivor. Vid vårt besök demonstrerades bl. a. publiksorl, ljudet av galopperande hästar, vattenplask och s. k. konstgjort eko. Skådespelaren skall, såsom t. ex. i Mäster Olof, i en scen tala i ett bostadsrum, i en annan i en kyrka. Då blandas det konstgjorda ekot, som skapas i en särskild studio (en lång gång), med talet. Genom en mindre eller större vridning på ratten kan man efter behag ändra illusionen av att den talande befinner sig i en mindre sal till att han är i en stor kyrka.

Rundradioprogrammen inspelas ofta först på en ljudackumulator för att senare sändas ut i radio. Detta är inte endast fallet med intervjuer, reportage o. d. utan även med föredrag och musikprogram, t. ex. operor. Härtill användas dels grammofonplattor, dels stålbandsapparater och dels magnetofon, som arbetar efter samma princip, men där bandet är en smal filmremsa, överdragen med ett molekylärt skikt av järn. Mjuka vaxplattor användas till upptagningar, som skola spelas upp en gång och ej sedan förvaras. Med vaxplattan som positiv kan man emellertid på elektrolytisk väg göra negativ av metall, efter vilka vanliga hårda, svarta schellackplattor kunna gjutas. Vid reportage och intervjuer användas ofta gelatinskivor eller med cellulosalack överdragna skivor, som äro hållbarare än vaxplattorna men ge sämre ljudkvalitet. Radiotjänsts grammofonplattor äro i olikhet mot vanliga grammofonskivor inspelade från centrum utåt. Det raspande ljud, som höres, då man sätter i gång skivan, och som är starkare, ju vassare nålen är och ju hastigare skivan rör sig, framträder mindre, då inspelningen börjar i centrum, där skivans hastighet är lägre. Stiftet har vidare lättare att följa den mera hopträngda våglinjen vid skivans centrum, då det är alldeles nytt, än sedan det genom nötningen i spåret trubbats av i spetsen. Särskilda anordningar äro vidtagna för att ge de 15 kg tunga grammofontallrikarna en oklanderligt jämn gång. Speltiden med en grammofonskiva är inte längre än 2 à 3 minuter, men med Radiotjänsts system av två grammofontallrikar och en skivväxlare kan en van person spela upp skiva efter skiva utan märkbara pauser.

Radiotjänsts bandapparater tillåta en inspelningstid av en halv timme på ett och samma band. Ljudet upptas på magnetisk väg på ett 3000 m långt stålband, 3 mm brett och 0,08 mm tjockt, uppspolat på en rulle av 60 cm diameter. Stålbanden äro gjorda av svenskt specialstål (krom-volfram-legering) och kosta 350 kr styck. De äro därför ej lämpliga för arkivering av program, ehuru inspelningen är hållbar en längre tid. Inspelningen kan emellertid även utplånas på magnetisk väg och banden därefter användas på nytt. Nackdelen med stålbanden är svårigheten att klippa och skarva dem, såsom man kan göra med en vanlig ljudfilm. Denna olägenhet finns ej hos magnetofonen, som är mindre än stålbandsapparaten och t. o. m. kan transporteras på reportagebilar.[1]

Sedan mötesdeltagarna efter middagen åter samlats i hörsalen vid Institutet för organisk-kemisk forskning, lämnade institutets föreståndare, professor H. von Euler, en kort redogörelse för de arbeten, som för närvarande bedrivas såväl där som å det intillliggande Biokemiska institutet. Detta senare har tillkommit genom donationer från Rockefellerstiftelsen samt från Knut och Alice Wallenbergs stiftelse och åtnjuter bidrag från Bryggerikoncernen; det förra är donerat av Wallenbergsstiftelsen och har bidrag från Kooperativa förbundet och Rockefellerstiftelsen. Vid det Biokemiska institutet studeras olika s. k. ergoner eller verkämnen, till vilka bl. a. vitaminerna räknas. Man använder sig av ett tusental vita råttor som försöksdjur och kontrollerar deras tillväxt. Djuren utarmas på vissa ergoner, varvid bristsjukdomar uppkomma, som hävas, då ergonerna få ingå i djurens föda. Brist på A-vitamin medför t. ex. en ögonsjukdom, xeroftalmi, som yttrar sig i att hornhinnan torkar och blindhet följer. Av en tillfällighet kom man att konstatera A-vitaminets redan förut kända skyddande förmåga mot infektioner. Efter ett besök på institutet hade en infektion utbrutit bland råttorna och flera hundra djur dukade hastigt under, framför allt de djur, som utarmats på A-vitamin, under det att andra djur, som fingo detta vitamin, men utarmats på andra ergoner, klarade sig. Bland vitaminerna tilldrar sig för närvarande B-gruppen stort intresse, särskilt vitamin B_6 eller adermin, och pantothensyra, vilken sistnämnda även benämnes antigråhårsvitaminet. Namnet syftar på dess inverkan på pälsfärgen hos t. ex. rävar och svarta-vita råttor; vitaminet ifråga har ingen inverkan på människohårets av åldern orsakade grånande.

---

[1] Litteratur: Byggmästaren, tidskrift för arkitektur och byggnadsteknik nr 17, 1936; Radio och radioamatören, nr 3—4, 1936.

Bland de arbetsuppgifter, som angripits vid Institutet för org.-kem. forskning, märkas det tekniska problemet konstmassor samt kräftproblemet. Konstmassorna voro från början ersättningsämnen för bl. a. metaller, men man har sedan lärt sig att framställa konstämnen, vilkas egenskaper vida överträffa de naturliga materialens. Det är i synnerhet kondensationsprodukterna av fenol och metakresol med formaldehyd (bakelit) samt av karbamid (urinämne) med formaldehyd, som här äro föremål för studium. Formaldehyd kan fås i stora mängder av metylalkohol, som ju är en gammal svensk exportartikel, men tillgången på fenoler är sämre. Då förutsättningarna för en svensk bakelitindustri därigenom äro något begränsade, ha karbamidkonstämnena i stället fått ökat intresse. Vid vårt besök fingo vi se, hur pressning av bakelitstavar i värme tillgår. Dessa provstavar göras i vissa för materialprovning föreskrivna standarddimensioner. Med dem utföras prov på hållfastheten vid brytning, som likaledes demonstrerades, isolationsförmåga, motståndskraft mot inverkan av baser och syror, värmestabilitet m. m.

Angående kräftproblemet framhöll prof. von Euler, att man numera allt klarare inser, att detta problem ej kan lösas utan kemi. En ny, mycket uppmärksammad teori gör gällande, att kräfta skulle uppkomma genom mutation hos äggvita i organismen. En annan teori av Kögl går ut från att i tumörer bildas aminosyror av den s. k. *d*-serien, som äro spegelbilder till de vanliga aminosyrorna av *l*-typ. Kroppen har i regel ingen möjlighet att lösa och sönderdela dessa onaturliga aminosyror, med påföljd att tillväxten fortsätter och en kräftsvulst uppkommer. Mjälten är det enda organ i kroppen, där metastaser, d. v. s. sekundära kräfttumörer, ej förekomma. Troligen innehåller mjälten en substans, som hindrar tillväxten av tumörer. Att kräfta kan framkallas genom retning med kemiska medel, är bevisat. Sådana s. k. cancerogena substanser finnas t. ex. i tjära och en typisk cancerogen substans är ett derivat av antracen med en bensolring kopplad till kolatomerna 1 och 2 i antracenmolekylen.

Till Radiotjänst och till professor von Euler, som välvilligt tillmötesgått föreningens önskan om ett studiebesök, får jag härmed å föreningens vägnar framföra ett vördsamt tack.

Bror Gustaver.

Bokanmälningar.

GUNNAR HÄGG, *Kemisk reaktionslära, en inledning till analysens teori.* Stockholm, Hugo Geber, 1940, 179 s., inb. kr. 5:50.

Det är ett ur flera synpunkter märkligt och ur alla synpunkter förträffligt arbete, varmed förf. har riktat den fattiga svenska lärobokslitteraturen, avsedd för högre kemiska studier. Märkligt så till vida, som här för första gången ex cathedra introduceras och utvecklas de nyare strömningarna inom lösningsteorien, aktivitet och Brönsteds syra-basbegrepp. Strängt taget äro ju dessa begrepp inte så nya, och det vore orättvist att inte framhålla, att de länge tillämpats inom den svenska vetenskapliga litteraturen. Men en sammanfattande svensk framställning i läroboksform har inte förut funnits, och det skulle vara förvånande, om inte denna handledning skulle komma att markera en kursförändring i svensk kemisk undervisning. Förf. har också ett ord att säga författarna av vårt lands elementära läroböcker i kemi, som dessa ha skäl att både begrunda och vara tacksamma för. Prof. Hägg anser det endast vara en tidsfråga, när t. ex. Brönsteds syra-basdefinition och därmed sammanhängande betraktelsesätt upptagas i gymnasiekursen och avlösa ännu gängse föråldrade läror. Samma åsikt ha nog dessa författare hyst ganska länge, men avhållits av en känsla av ovisshet om hur detta skulle upptagas först och främst av ämneskonferenserna, vidare av högskolorna, varifrån man inte alltför sällan hört den åsikten uttryckas, att nyheter böra reserveras för högskolebruk. Författarna av elementära läroböcker ha sålunda allt skäl att vara prof. Hägg tacksamma både för den inlindade reprimand och fingervisning, som han med dessa ord har givit dem, och i ännu högre grad för den förebildliga framställning av modern reaktionslära som arbetet utgör. Inom parentes må här nämnas, att Brönsteds definitioner införts med gott resultat i de danska skolorna.

I det första kapitlet, »Definitioner», fäster man sig vid att förf. förkastar normalitet såsom uttryck för koncentration på grund av den tvetydighet, som vid växlande ekvivalentvikt vidlåder detta begrepp. I de närmast följande kapitlen genomgås massverkans lag och olika slag av kemisk bindning. Det fjärde kapitlet, »Protolyter och salter», är grundläggande för hela den följande framställningen. I spetsen ställes Brönsteds definition på en syra som ett ämne, som kan avge en vätejon, varvid en bas bildas, och på en bas som ett ämne, som kan upptaga en vätejon, varvid en syra bildas. Vidare införes begreppet korresponderande syra och bas samt det fundamentala begreppet protolys eller protolytisk reaktion t. ex.

$$\text{Ättiksyra} + \text{vatten} = \text{acetatjon} + \text{hydroniumjon } (H_3O^+),$$
$$(\text{syra})_1 + (\text{bas})_2 = (\text{bas})_1 + (\text{syra})_2,$$

som innefattar icke blott elektrolytisk dissociation utan även neutralisation, hydrolys m. fl. reaktioner.

I det följande behandlas ledningsförmåga, jonstyrka, aktivitet och vattnets autokatalys, som försiggår enligt formeln

$$H_2O + H_2O = OH^- + H_3O^+,$$
$$s_1 + b_2 = b_1 + s_2.$$

Vidare protolyters styrka, protolysjämvikter, amfolyter. Kap. 10—13 behandla indikatorer, protolytisk titrering, buffertlösningar och betingelserna för kvantitativ analys genom protolytisk titrering. För löslighetsprodukt, adsorption, fällningars egenskaper och titreringar som grunda sig på fällnings- och komplexbildning redogöra de närmast följande kapitlen, varpå arbetet avslutas med en framställning av oxidations- och reduktionsprocesser.

Ett 40-tal räkneexempel bidraga till att giva läsaren det herravälde över innehållet, som är varje läroboks mål.

Som sagt möter man här den första genomförda framställningen av modern reaktionslära på svenska, klar och fast i formen, vederhäftig i fråga om innehållet. Både högskolor och elementarlärare ha stora skäl att vara prof. Hägg tacksamma för detta utomordentliga tillskott till vår svenska lärobokslitteratur. Med erkänsla bör också noteras, att arbetet tack vare anslag ur Längmanska kulturfonden kunnat åsättas ett synnerligen moderat pris.

G. Starck.

E. Rancke Madsen, *Analytisk Kemi.* Gads Forlag, København 1940, 244 s., pris inb. danska kr. 9: 50.

S. Künel Hagen, *Systematisk kvalitativ Analyse.* Gads Forlag, København 1940, 92 s., pris inb. danska kr. 6: 50.

Det första av dessa arbeten anges vara avsett som en förberedelse för den uppgift, som det andra av dem behandlar; det kan också sägas vara ett analytiskt extrakt av en lärobok i oorganisk kemi. Innehållet utgör sålunda en sammanställning av grundämnenas analytiska reaktioner, kompletterad av kursivt tryckta försök, som utgöra tillämpningar av texten. Däremot är boken ingen handledning i utförandet av analyser. Vad man i allmänhet förstår med den analytiska kemiens teoretiska grunder behandlas mycket kort; teoretisk grundval betyder för förf. väsentligen förhandskännedom om de analytiska reaktionerna. Härmed är icke sagt, att förf. behandlar sitt ämne utan hänsyn till den teoretiska kemiens satser eller moderna synpunkter på lösningsteorien. I spetsen för sin framställning sätter förf. fem teoretiska korta men tillräckligt innehållsrika kapitel: Grundämnena och det periodiska systemet, Kemisk jämvikt, Jonekvationer, Oxidationsgrad och redoxprocesser, Syror och baser, som sedan finna oupphörlig tillämpning i det följande.

Praktiskt taget alla grundämnens analytiska kemi behandlas i arbetet, även så ovanliga som gallium, indium, renium, hafnium m. fl. Även de sällsynta jordarterna medtagas, dock ej var för sig, utan samlade i de två kategorierna »ceritjordar» och »ytterjordar».

Ett särskilt omnämnande förtjäna de med kursiv stil tryckta försök, som den studerande skall utföra för att praktiskt lära sig de analytiska reaktionerna, bl. a. på grund av de noggranna anvisningar, som där meddelas t. ex. om lösningarnas koncentration och mängder. Här får man lära sig betydelsen av att arbeta med små mängder och (i allmänhet) utspädda lösningar.

Förf. har haft den lyckliga idén att i ett av de fyra tilläggskapitlen sammanställa definitioner och ordförklaringar, som höra till ämnet; ett kortfattat men givande kemiskt lexikon. I ett annat kapitel sammanställas och beskrivas de organiska föreningar, varmed den analytiska kemien arbetar, och slutligen ges i det sista kapitlet en översikt av de använda reagensen med koncentrationerna i fråga om lösningar angivna i molaritet, vilket nog får medges vara det rationella.

Allt som allt är detta arbete med sitt utomordentligt rika och gedigna innehåll väl värt att uppmärksammas vid de högre läroanstalter även i vårt land, där analytisk kemi bedrives. Någon svensk motsvarighet finnes ej.

Hagens arbete behandlar den kvalitativa analysens väsentliga uppgift och slutmål, bestämningen av förelagda prov av obekant sammansättning. I en välskriven och på tydligen mångårig och väl tillgodogjord erfarenhet grundad inledning redogör förf. för den kvalitativa analysens uppgifter, principiella arbetssätt, felkällor, syftet med och omfattningen av förf:s metod, behövliga mängder av de analytiska proverna, känslighet, analysgång, apparatur och reagens.

Syftet med förf:s analysmetod är högt, att ge en systematisk analysgång för praktiskt taget alla grundämnen. Undantagna äro endast ädelgaserna och ett 20-tal av de sällsyntaste metallerna. Beträffande de sällsynta jordarterna gäller samma inskränkning som ovan angivits. I vad mån förf. lyckats härutinnan, kan endast en ingående sakkunskap avgöra, en sakkunskap som rec. ej gör anspråk på att äga. Den vid första anblicken väldiga uppgiften måste i praktiken förenklas genom förprov, vilka också finna riklig användning. Den genom uppgiftens omfattning tämligen kompakta texten kompletteras på ett lyckligt sätt av fyra lösa blad med analysschemata. Att anteckna är vidare det stora antalet förtydligande reflexioner och anmärkningar, som visa att det är en erfaren analytiker som talar.

Dessa båda arbeten tillsammans med många andra i samma höga rangklass vittna om en livaktighet på den högre naturvetenskapliga undervisningens område, vartill vi här i landet sakna motstycke, och som borde komma oss att känna blygsel. Man behöver bara erinra om att Sverige aldrig någonsin har producerat en lärobok i fysik för universitetsbruk — vi använde länge dansken Christiansens — och att efter Rosenbergs kemi ingen utförlig svensk lärobok i oorganisk kemi sett dagen för att känna beklämning över denna brist på intresse för uppgiften, brist på uppmuntran från de högsta kulturvårdarna, brist på intresse för svenska språkets förkovran. Ty saken har också en språklig sida, och det var i riktig insikt härom som Svenska Akademien valde Berzelius, den flitigaste kemiska skribenten på svenska, till sin ledamot. Skillnaden mellan svenskt och danskt framträder i blixtbelysning om man erinrar om att Sverige har sin Nobelfond för internationella, väsentligen utländska forskares belönande, Danmark sin Carlsbergsfond för understöd åt dansk forskning. Och den avspeglas i förhållandet mellan den rika danska och den genant torftiga svenska läroboksliteraturen.

G. Starck.

PEHR E. LAGERHJELM, *Metallframställning* (i serien Tekniskt folkbibliotek). Bonniers förlag 1939, 240 s., inb. kr. 9: 50.

Innehållet är uppdelat på fyra avsnitt; efter en kort inledning som ger en översikt av de metallurgiska metoderna och i samband därmed stående problem, genomgås metallerna i tur och ordning med övervikt givetvis för de stora metallerna koppar, zink, bly, tenn, nickel, aluminium. Därefter följer en redogörelse för metallernas bearbetning genom smältning och gjutning, deras varmbearbetning genom sprutning, smidning och valsning, kallbearbetning genom dragning och valsning, samt till sist en avdelning om metallernas tekniska egenskaper och användning.

Liksom de övriga delarna av denna serie utmärker sig detta arbete genom den goda avvägning av huvudsak och tekniska detaljer, som gör det till en förträfflig handledning för den intresserade allmänheten inklusive skolornas elever. Samtidigt är det rikt på sakuppgifter av intresse och nytta även för kemiläraren. Ett stort antal goda planscher och schematiska konstruktionsritningar illustrera framställningen. En fråga vill man göra inför tabellen över metallproduktionens storlek och fördelning 1937. Varför är Sverige utelämnat i denna tabell? Veterligen producerade vårt land detta år såväl koppar som aluminium, silver och guld.

G. Starck.

IWAN BOLIN och BROR GUSTAVER, *Lärobok i kemi för folkskoleseminarier och praktiska skolor.* Tidens förlag, Stockholm 1939, 264 s., 58 ill. Kr. 5:50.

Ehuru folkskoleseminarierna erhållit en ny undervisningsplan sedan första upplagan av denna bok utkom, ha dock endast smärre förändringar behövt vidtagas i den förra året utkomna andra upplagan. En värdefull sådan förändring är att redogörelsen för den kemiska industrien inarbetats i behandlingen av motsvarande kemiska ämne.

Den oorganiska kemien behandlas på 150 sidor och återstående 95 textsidor ägnas åt organisk och fysiologisk kemi samt radioaktivitet.

Författarna begagna varje tillfälle att framhålla praktiska tillämpningar av beskrivna företeelser men försumma dock icke det teoretiska underlaget, och det är en stor förtjänst hos boken att lagar och allmänna saker behandlas på ett tidigt stadium, så att dessa sedan kunna utnyttjas i den följande framställningen. Sålunda ägnas, sedan först väte, syre och förbränning behandlats, kapitlen 6—9 åt sådana saker som syrors och basers allmänna egenskaper, neutralisation, gaslagarna, elektrolyter, syrors och basers styrka, elektrokemi. I den f. ö. goda framställningen anser anmälaren det varit lämpligt med något litet om massverkan och jämvikter, då förff. ansett sig kunna sträcka sig så långt som till pH-begreppet.

På s. 141 kallar förff. på vedertaget sätt bildningen av silver ur silversulfid för en reduktion, d. v. s. de anse, att det är fråga om en reduktion när silvrets valens sänkes, men ha dock icke varit konsekventa i detta avseende, utan skriva på s. 104, att klor är 1-värd i HOCl och i HCl, vilket ju skulle innebära samma oxidationsstadium på klor i dessa två föreningar, av vilka den ena erhålles genom oxidation, den andra genom reduktion av klor.

För en rätt förståelse av oxidations-reduktions-förloppet är det på tiden att i undervisningen och läroböckerna begreppen positiv och negativ valens införas, vilket anmälaren sedan länge prövat i olika skolor och funnit ge goda resultat.

Ett mycket förargligt korrekturfel finner man på s. 90 i de två kursiverade raderna, där orden »sur» och »basisk» omkastats i den regel som ges för reaktionen vid salters hydrolys. I övrigt tycks boken vara väl korrekturläst, och anmälaren har icke funnit annat än några mindre oegentligheter, såsom att några hänvisningar blivit felaktiga genom att de kvarstått från föregående upplaga.

Helhetsintrycket av boken är, att den är välskriven och att materialet är väl valt, så att den gott lämpar sig för de avsedda skolorna. Den som väl inhämtat denna kurs har inga föraktliga kunskaper i kemi, fastän kursplanerna inte ge plats för annat än en flyktig behandling av metallernas kemi.

Rudolf Junell.

Matematisk problemsamling. 1-betygskursen. Tentamensproblem givna vid Lunds universitet, 51 sid. (duplicerad), kr 4: 50; erhålles från Lunds studentkårs Intressebyrå.

På initiativ av Lunds studentkårs Intressebyrå har i våras utgivits en matematisk problemsamling, avsedd för aspiranter på 2-betyg i fil. ämbetsexamen. Nu föreligger från samma håll en problemsamling, innehållande problem, som givits vid tentamina för 1-betyg vid Lunds universitet. Utgivaren är N. E. Fremberg. Givetvis har denna samling intresse även utanför Lundakretsen.

Samlingen är uppdelad i kapitlen: Funktioner och derivator, gränsvärden, serier, komplexa tal, integraler, analytisk geometri. Till problemen lämnas svar, som, i den mån jag kontrollerat dem, visat sig korrekta. I vissa fall givas även anvisningar. Problemens formulering är klar. Svårare tryckfel förekomma i ringa utsträckning. I ex. 7 bör dock stå $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ och i ex. 35 avses väl att x tenderar mot noll genom positiva värden.

Beträffande urvalet av problem får man antaga, att det är representativt för 1-betyg vid Lunds universitet. Man är kanske förvånad över den bredd, som kapitlet serier intager. Detta område, som får anses svårt för nybörjare av akademiska studier, och har ringa anknytning till skolstudierna, har, bortsett från enkla tillämpningar av Mac-Laurins teorem, ansetts tillhöra 2-betygskursen. Här föreligger tydligen en olikhet mellan Lund å ena sidan, Uppsala och Stockholm å den andra. Anmälaren skulle också vilja ifrågasätta om icke ex. 28—30 med hänsyn till svårighetsgraden borde överföras till 2-betygssamlingen. I övrigt är urvalet lämpligt och problemtyperna rikhaltigt varierade.

Lunds studentkårs Intressebyrå har med sitt initiativ givit de matematikstuderande en gåva, som de säkerligen ej äro sena att mottaga.

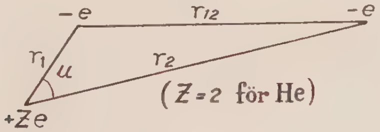
Arvid Uhler.

Gradualavhandlingar.[1]

H. ADOLF S. ERIKSSON, *An Investigation of the P-Terms for Helium.* Disp. i Uppsala $^{24}/_{5}$ 1940. Opponenter: prof. OSCAR KLEIN och fil. lic. N. SVARTHOLM.

Heliumatomen har som bekant två el. (= elektroner). Enär varje el. representerar tre frihetsgrader, är Schrödingerekv. för He en (partiell) differentialekv. (av 2:a ordningen) med sex oberoende variabler. För bestämmandet av de möjliga värdena på den i ekv. ingående energiparametern (egenvärdena) stå för närvarande endast approx. metoder till buds. Den metod som använts i avhandlingen är den s. k. störningsmetoden, som i detta fall innebär, att endast en viss (ehuru naturligtvis övervägande) del av elektronernas växelverkan till en början medtages, nämligen på så sätt, att den yttre el. tänkes röra sig oberoende av den inre men kring en s. k. avskärmad kärna, dvs. en kärna, vars laddning är en enhet mindre än He-kärnans. Ekv. blir då exakt lösbar (0:te tillnärmelsen). Den återstående delen av växelverkan betraktas som störning och förorsakar korrektioner av energinivåerna:

$$\frac{Ze^2}{r_1}+\frac{Ze^2}{r_2}-\frac{e^2}{r_{12}}=\frac{Ze^2}{r_1}+\frac{(Z-1)e^2}{r_2}+e^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_{12}}\right).$$



Vid dessa korrektioners beräkning uppträda tack vare nämnda uppdelning av växelverkan vissa termer, som äro små och kunna försummas, vilket är av avgörande betydelse för metodens användbarhet. På liknande sätt som i »metoden med successiva approx.» kan man principiellt komma de riktiga energinivåerna hur nära som helst. Numeriska svårigheter sätta dock snart en gräns, varför hittills endast 0:te, 1:sta och 2:dra tillnärmelserna i energien behandlats. Förf. har dock drivit noggrannheten ett steg längre, i det att även den 3:e tilln. beräknats.

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Förutom energien äro även impulsmomentet och dettas projektion på en viss axel kvantiserade (dvs. kunna antaga endast vissa diskreta värden). I avhandlingen undersökas endast sådana tillstånd hos atomen, där impulsmomentet antager sitt näst lägsta värde, de s. k. P-tillstånden. De diff.-ekv., där impulsmomentet resp. dess projektion ingå som egenvärden — den obekanta funktionen är även här liksom i Schr.-ekv. den s. k. vågfunktionen, som bestämmer »elektronernas fördelning» i rummet utanför kärnan — kunna exakt lösas, varigenom vågfunktionens beroende av de tre vinkelvariabler, som bestämma el.-konfigurationens (dvs. vidstående figurs) orientering i rummet, kan exakt bestämmas. Härigenom kunna nämnda vinklar elimineras, dvs. Schr.-ekv. reduceras till ett system av två ekv., där endast de tre återstående variablerna ingå (t. ex. r_1, r_2 och u). Genom beaktande av el.:nas ombytbarhet — varom mera senare — kan detta system reduceras till en enda ekv. Det är på denna tredimensionella Schr.-ekv., som förf. använder störningsmetoden i motsats till Bethe (1933), som använder metoden på den ursprungliga sexdimensionella Schr.-ekv.

Även den ovannämnda eliminationen av de tre (Eulerska) vinklarna har förut utförts av Breit (1930), som dock har avstått från den vidare behandlingen med störningsmetoden. Att detta lyckats för förf., beror på att en lämplig transformation — vinkeln u transformeras härvid i sin supplementvinkel —, funnits, varigenom den i den tredimensionella Schr.-ekv. ingående s. k. ombytesoperatorn bragts att ingå i störningsdelen i stället för i den ostörda delen, vilket senare är fallet med Breits ekv. Den djupare fysikaliska innebörden av nämnda transformation är dock ännu ouppklarad.

Ombytesoperatorn, som ej har någon klassisk motsvarighet, är en matematisk konsekvens av el.:nas likvärdighet, som innebär, att el.:na ej kunna »individualiseras». Man kan t. ex., ehuru ej i klassisk mening, tala om inre och yttre el., men man kan ej säga, att en viss bestämd el. är denna inre resp. yttre el. I den ursprungliga sexdim. Schr.-ekv. ingår ej någon ombytesoperator. I stället måste här vissa symmetrivillkor påläggas vågfunktionen.

Som Heisenberg (1926) i sitt grundläggande arbete om He visat, är nämnda ombytesprincip orsaken till den länge kända uppdelningen i orto- och para-heliumtermer, som dessförinnan antogs härröra från två skilda grundämnen. Heisenberg använder även störningsmetoden men nöjer sig med att beräkna 0:te och 1:sta tilln. i energien. Föreliggande avhandl. är så tillvida en fortsättning av H:s arbete, att en metod funnits, varigenom noggrannheten i beräkningen av (t. v. vissa) spektraltermer (P-termerna) kan avsevärt uppdrivas. Detta ej endast i den meningen, att den nämnda 3. tilln. beräknats, utan förf. har även visat, att Bethes metod att beräkna den 2. tilln. ej leder till korrekt resultat. Orsaken härtill är, att B. först vid räkningens slut beaktar ombytbarheten genom att bilda en vågfunktion, som uppfyller symmetrivillkoren. Han går därigenom miste om den (sekundära) effekt, som ombytbarheten förorsakar redan i den osymmetriserade vågfunktionen.

De numeriska beräkningar, som utförts på de lägsta (och därtill ogynnsammaste) P-tillstånden $1s2p^1P$ och $1s2p^3P$, ha också givit bättre överensstämmelse med de experimentella värdena än vad fallet är med de tidigare teoretiska arbetena.

Även beräkning av relativitetskorrektionerna för de nämnda tvenne tillstånden har utförts i avhandlingen.

Å. V. C. Pleijel, *Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations.* Disp. i Stockholm den $^{29}/_{5}$ 1940. Opponenter: professor L. Ahlfors och fil. lic. G. Reuter.

Svängningarna hos ett plant membran S med fast kant T regleras av ekvationen $\Delta V + \lambda V = 0$ inuti området S samt av randvillkoret $V = 0$ vid T. För egenlösningarna till detta problem har professor Carleman vid en skandinavisk matematikerkongress 1934 bevisat viktiga asymptotiska relationer. För att ange principerna i professor Carlemans metod betrakta vi det i viss mån enklare »tredimensionella» membranproblemet. Egenvärdena λ_k och egenfunktionerna $\varphi_k(xyz)$ äro egenvärden och egenfunktioner till en integralekvation, vars kärna är den vid T försvinnande greenska funktionen $G(p, q) = \frac{1}{4\pi r} - g(p, q)$, som i S satisfierar Laplace's ekvation ($p =$ »Aufpunkt», $q =$ fix punkt inuti S). Den greenska funktionen $G(p, q; -\varkappa^2) = \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r} - g(p, q; -\varkappa^2)$ till ekvationen $\Delta V - \varkappa^2 V = 0$ är för $\lambda = -\varkappa^2$ resolvent till kärnan $G(p, q)$. Skillnaden mellan de båda green-funktionerna kan utvecklas i en serie efter egenfunktionerna, och för $p = q$ övergår denna serie i

$$\frac{\varkappa}{4\pi} + [g(q, q; -\varkappa^2) - g(q, q)] = \varkappa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(q)}{\lambda_n(\lambda_n + \varkappa^2)}. \qquad (1)$$

Kompensatrisen $g(p, q; -\varkappa^2)$ har såsom lösning till $\Delta V - \varkappa^2 V = 0$ intet positivt maximum eller negativt minimum i det inre av S. För $\varkappa \rightarrow +\infty$ gäller därför $|g(q, q; -\varkappa^2)| \leq \frac{e^{-\varkappa l_q}}{4\pi l_q}$ där l_q betecknar undre gränsen för avståndet från q till randen. Högra ledet av (1) är alltså asymptotiskt lika med $\frac{\varkappa}{4\pi}$ och enligt ett i avhandlingens inledning återgivet tauberteorem av Hardy och Littlewood erhåller man slutligen

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sum\limits_{\lambda_n \leq t} \varphi_n^2(q)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

Vid överförandet av den ovan antydda metoden till andra problem ur den matematiska fysiken uppträder som väsentligaste svårighet nödvändigheten av att finna en annan uppskattningsmetod för den mot $g(p, q; -\varkappa^2)$ svarande storheten. Det är önskvärt att metoden skall ge en tillräckligt skarp uppskattning, så att man kan återfinna de Weyl-Courantska relationerna för de betraktade problemens egenvärden.

I slutet av första kapitlet anges en på teorien för integralekvationer baserad uppskattningsmetod, som användes vid ett egenvärdeproblem vid den tredimensionella membranekvationen. Det övervägande utrymmet är emellertid ägnat åt en annan metod, grundande sig på satser ur variationskalkylen. Diagonalvärdet $g(q, q; -\varkappa^2)$, eller motsvarande storhet, framställes såsom minimumvärde av ett visst integraluttryck. En begränsning uppåt av $g(q, q; -\varkappa^2)$ erhålles genom att i detta integraluttryck ersätta argumentfunktionen med en lämpligt vald jämförelsefunktion. Vid vissa problem är integraluttrycket väsentligen positivt definit och man får då utan svårighet en kompletterande begränsning nedåt. Vid andra problem kan uppsökandet av en begränsning nedåt ske enligt en metod, som exemplifieras på ett i kapitel IV behandlat problem.

I avhandlingens andra kapitel återges ett sätt att finna asymptotsatser för egenfunktionernas derivator. Detta förfaringssätt finner användning i kapitel IV vid beviset av följande teorem (jämför prof. Carlemans kongressföredrag): i ett elastiskt medium fördela sig de till höga frekvenser hörande potentiella och kinetiska energierna likformigt över mediet och likhet råder mellan den potentiella och kinetiska energitätheten.

Den på variationskalkylen baserade uppskattningsmetoden för kompensatrisens diagonalvärde uppvisar vissa intressanta likheter med satser av R. Courant. Betraktar man vid en och samma differentialekvation flera problem, reglerade av olika randvillkor, så kunna diagonalvärdena av problemens kompensatriser framställas såsom minima av ett gemensamt integraluttryck. De olika diagonalvärdena erhållas genom att vid uppsökandet av integraluttryckets minimum pålägga jämförelsefunktionerna villkor av varierande styrka (bestämd av respektive problems randvillkor). Kompensatrisernas diagonalvärden komma därför att växa med tilltagande styrka hos bivillkoren. Detta kan vid flera problem ges en åskådlig fysikalisk tydning. Vid en elastisk platta är diagonalvärdet med negativt tecken lika med nedböjningen i en punkt q orsakad av en mot plattans plan vinkelrät kraft av bestämd storlek och anbragt i q. Nedböjningen blir mindre, då styrkan av »bindningarna» vid randen avta.

I avhandlingen betraktas problem ur den tredimensionella elasticitetsteorien, ett problem om hålrymdstrålning och slutligen behandlas problemet om en inspänd plattas svängningar.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1940: 8—10.

Ur innehållet: K. E. Zimens, Magnetische Messungen an aktiven Aluminium-Oxyden und -Hydroxyden; E. Stenhagen o. S. Ställberg, Monolayers of Compounds with Branched Hydrocarbon Chains; H. Berlin, A Simple Method for the Determination of 2-Methyl-l, 4-naphthohydroquinone Diacetate; O. Samuelson, Om användningen av basutbytande ämnen i den analytiska kemien IV; E. Hannerz, Om felen vid bestämning av råcellulosa (växttråd) i stråfoder; G. Holst, Die Dissoziationskonstante der unterchlorigen Säure; K. H. Gustavson, Formaldehydens reaktion med proteiner; H. Fredholm, Kemisk och bakteriologisk undersökning av syraväckare; O. Cyrén, Forskningens betydelse.

Teknik för alla, 1940: 27—39.

Ur innehållet: Cyklotronen; Kampen mot friktionen; Flyglarm över belysningsnätet; Solfläckarna; Vanadinstålet; Komma uppfinnarna att vinna kriget?; de Laval och separatorn; Gengas och gengasaggregat; Sveriges störste skeppsbyggmästaren; Strömbrytare av glas; Solmaskinen. Ur avd. »Händigt folk» (saker som man gör själv): Termoelement; förstoringsapp. för små negativ; episkop; kvicksilverpolsmotorn och induktionsmotorn; lokaltelefon; självlysande färg; exp. med infraröda strålar.

ERA, 1940: 8—10.

Ur innehållet: Värmepumpen — ett försök att lösa husvärmeproblemet; Televisionen i olika länder; Moderna strömbrytare-tryckluftbrytare; Nya ljuskällor; Flyglarm pr telefon; Landsbygdselektrifieringen; Elnyheter.

(Forts. sid. 264.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1133) *En triangels sidor äro a, b, c, dess yta T, radien i den omskrivna cirkeln R. Visa, att* $T\sqrt{48} \leqq a^2 + b^2 + c^2 \leqq 9R^2$, *där likhetstecknen gälla för liksidiga trianglar och endast för dessa. Storheterna* $q' = \dfrac{9R^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 1$ *och* $q = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{48T^2} - 1$ *äro därför* $\geqq 0$. *Visa, att* $q\left(1 - \sqrt{\dfrac{q}{1+q}}\right) \leqq 4q' \leqq q\left(1 + \sqrt{\dfrac{q}{1+q}}\right)$, *där vartdera likhetstecknet gäller för vissa likbenta trianglar och (om man bortser från de liksidiga) endast för dessa.* *C.*

1134) *På en rät linje L har man fyra punkter, som i ordning betecknas med A, B, C, D. Visa, att villkoret för att utanför L finnes en punkt, från vilken AB, BC och CD synas under lika vinklar, är* $3AB \cdot CD > BC \cdot AD$. *C.*

1135) *Två cirklar, den ena omskriven om, den andra inskriven i samma triangel, äro givna. Triangeln kan då (enl. uppgift 1074) förskjutas så, att medan spetsarna förflytta sig utefter den yttre cirkelns periferi, sidorna fortfara att tangera den inre cirkeln. Sök orten för medelpunkten till en vidskriven cirkel.*

H. Tengnér.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1136) Lös ekvationen $\dfrac{a^3}{(b+x)^2} - \dfrac{b^3}{(a+x)^2} - a + b = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -(a+b)$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

1137) Ekvationen $(a-x)(b-x) + c = 0$ har rötterna x_1 och x_2. Vilka rötter har ekvationen $(x_1 - x)(x_2 - x) = c$?

Svar: a och b.

1138) AB är diametern i en halvcirkel; P och Q äro två punkter på bågen, C en godtycklig punkt på diametern. Visa, att $\operatorname{tg} \angle CPA \cdot \operatorname{tg} \angle CQB = \operatorname{tg} \angle PAB \cdot \operatorname{tg} \angle QBA$.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1136—1138 äro insända av *X.*, 1139—1146 av *T. Edqvist.*

1139) På taket av en järnvägsvagn finnas två alldeles lika, vertikala skyltar, placerade symmetriskt mitt emot varandra på samma höjd över marken och ställda parallellt med vagnens längdaxel. På vardera skyltens yttersida läser man på en horisontalrad orden MONTE CARLO. Avståndet mellan mittlinjerna till bokstäverna E och C är 2 dm, mellan de övriga bokstävernas mittlinjer 1 dm. Medan vagnen rör sig med en hastighet av 126 km/tim, genomtränges ena skylten av en gevärskula mitt i bokstaven O, varefter kulan går i horisontell bana tvärs över vagnen och träffar den andra skylten mitt för bokstaven A. Med vilken hastighet passerar kulan över vagnen, om avståndet mellan skyltarna är 3 m?

Svar: 525 m/sek eller 150 m/sek.

1140) A har 50 jordgubbar och B 40. C inbjudes att äta med dem ur en gemensam påse. Var och en äter 20 bär. C betalar sin del av kalaset med 10 öre. Hur böra A och B dela pengarna och de överblivna bären?

Svar: A får t. ex. 6 öre och 18 bär, B 4 öre och 12 bär. De kunna sedan byta 2 bär mot 1 öre på många sätt.

1141) På en vindruta sitta två torkare A och B, ställda i motsvarande noll-lägen. De sättas i gång samtidigt, och man iakttager, att A hinner beskriva en cirkelsektor 10 gånger på 11 sek, medan B beskriver sin sektor 12 gånger på 10 sek. Hur lång tid har förflutit från starten, när A och B för första gången samtidigt inträffa i sina ursprungliga noll-lägen?

Svar: 55 sek.

1142) På en cirkelformig biljard med radien 6 längdenheter äro två bollar A och B placerade på samma diameter men på var sin sida om medelpunkten O. Avstånden OA och OB äro 4 och 3 längdenheter resp. I vilken riktning bör bollen A stötas, för att den efter högst 1 reflexion mot vallen skall träffa B?

Svar: Mot en punkt P på vallen, så belägen att $\wedge OAP = 46°{,}6$. Den kan också stötas längs diametern genom B.

1143) Beräkna radien i den största cirkel, som har sin medelpunkt på pos. y-axeln och träffar kurvan $y = x^2$ endast i origo.

Svar: Radien $= \frac{1}{2}$.

1144) En triangel har sina hörn belägna i origo samt i punkterna (4; 0) och (0; 3). Hur stor vinkel skall triangeln vridas (i pos. riktning) kring origo som axelpunkt, för att längden av hypotenusalinjens ordinata i origo skall bli ett minimum?

Svar: $36°{,}87 + n \cdot 180°$.

1145) Vilka äro de hela positiva tal x och y, som uppfylla likheten $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 279$?

Svar: Talen äro 17 och 14 eller 140 och 139.

1146) I ett klot med radien r har man utskurit en mycket tunn klotskiva med tjockleken Δy. Radierna från klotets medelpunkt till punkter på periferierna av klotskivans begränsningscirklar äro generatriser till koniska ytor med toppvinklarna x och $x + \Delta x$ resp. Beräkna först Δy som funktion av x och sedan $\frac{dy}{dx}$.

Svar: $\Delta y = 2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right) \sin \frac{\Delta x}{4}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$.

Lösn. till uppg. 1101—1103.

1101) *I ett plan äro givna: en storcirkel tillhörande en klotyta och en annan cirkel, som utgör tvärsnittet av en obegränsad cylinderyta. Klotet och cylindern skära varandra längs en kurva. Konstruera den punkt, där kurvtangenten råkar planet, då tangeringspunktens projektion på planet är given.* X.

Tangeringspunkten betecknas med P, dess projektion med Q, den sökta punkten med T, storcirkeln med s och den andra med c, medelpunkterna med M_s och M_c. radierna med r_s och r_c. Vi ha då $\overline{PQ}^2 = \overline{TP}^2 - \overline{TQ}^2$. TP är emellertid = tangenten från T till s. Med lätt insedda beteckningar är $\overline{PQ}^2 = s(x_T;\ y_T) - c(x_T;\ y_T)$. Men $\overline{PQ}^2$ är även $= r_s^2 - \overline{M_sQ}^2 = -\left[(\overline{M_sQ}^2 - r_s^2) - (\overline{M_cQ}^2 - r_c^2)\right] = -\left[s(x_Q;\ y_Q) - c(x_Q;\ y_Q)\right]$ (den senare termen är $= 0$). Alltså är $s(x_T;\ y_T) - c(x_T;\ y_T) = -\left[s(x_Q;\ y_Q) - c(x_Q;\ y_Q)\right]$, varav $s\left(\frac{x_T + x_Q}{2};\ \frac{y_T + y_Q}{2}\right) = c\left(\frac{x_T + x_Q}{2};\ \frac{y_T + y_Q}{2}\right)$, vilket innebär, att T och Q ligga lika långt från radikalaxeln till s och c på var sin sida om densamma. Härav framgår konstruktionen omedelbart. X.

1102) *Punkterna A och B ligga på var sin av en cirkulär cylinders generatriser. Plan genom punkterna A och B utskära ellipser på cylindern. Härled ekvationerna för den kurva, i vilken ortkurvan för ellipsernas toppar övergår, då cylinderytan utvecklas i ett plan.* X.

Antag att punkterna A och B efter utvecklingen få koordinaterna $(r\alpha;\ h)$ och $(-r\alpha;\ -h)$, där r = cylinderns radie och 2α = vinkelavståndet mellan projektioner på ett normalsnitt. Efter utvecklingen övergår ellipsen i en sinuskurva, vars ekvation antas vara $y = p \sin\left(\frac{x}{r} + q\right) + s$. För bestämning av variablerna p, q, s erhålles ekvationerna $h = p\sin(\alpha + q) + s$ och $-h = p\sin(-\alpha + q) + s$, varav genom addition och subtraktion $0 = 2p\cos\alpha\sin q + 2s$ och $2h = 2p\sin\alpha\cos q$. Kurvans ekvation blir alltså $y = -\dfrac{h\sin\left(\dfrac{x}{r} + q\right)}{\sin\alpha\cos q} -$ $- h\cot\alpha\operatorname{tg} q$ (1). Orten för storaxelns ändpunkter är identisk med orten för kurvans max.- och minimipunkter. Alltså tillkommer villkoret $\dfrac{x}{r} + q = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (2). Elimination av q ur (1) och (2) ger $y = \dfrac{h}{\sin\alpha\sin\dfrac{x}{r}} - h\cot\alpha\cot\dfrac{x}{r}$, som är ortens ekvation, om $h \neq 0$. För $h = 0$ blir ortens ekvation $x = kr\pi$. Orten för lillaxelns ändpunkter är identisk med orten för kurvans inflexionspunkter. Villkoret $\dfrac{x}{r} + q = k\pi$ (3) ger jämte (1) vid elimination av q ekvationen $y = h\operatorname{tg}\dfrac{x}{r}\cdot\cot\alpha$, som är ortens ekv., om $h \neq 0$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. Om $h \neq 0$ och $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, blir ortens ekv. $y = 0$. Är $h = 0$ och $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$, blir ortens ekv. $x = \pm\dfrac{\pi r}{2}$. Är till sist $h = 0$ och $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, äro lillaxelns ändpunkter fixa i $\left(\pm\dfrac{\pi r}{2};\ 0\right)$. *X.*

1103) *Vilket villkor måste konstanterna i funktionen*

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$$

uppfylla, för att någon rät linje skall kunna tangera funktionskurvan i två skilda punkter? Bestäm, om villkoret antages uppfyllt, vinkelkoefficienten för denna tangent.

Stig Comét.

Vi kombinera tangentens ekvation $y = kx + l$ med kurvans och få genom elimination av y ekvationen:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d-k)x + e - l \equiv a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \equiv$$
$$\equiv a(x^2 + mx + n)^2 \equiv a[x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2] = 0.$$

Härav fås $2m = \dfrac{b}{a}$, $m^2 + 2n = \dfrac{c}{a}$, $2mn = \dfrac{d-k}{a}$, $\dfrac{e-l}{a} = n^2$. Det sökta villkoret är $m^2 > 4n$ eller $3b^2 > 8ac$. Till sist blir

$$k = \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^2} \quad \text{och} \quad l = \frac{64a^3e - 16a^2c^2 + 8ab^2c - b^4}{64a^3}.$$

E. Smn.

Anm. Villkoret innebär, att y'' har två reella nollställen, m. a. o. att kurvan har två inflexionspunkter.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1940.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en geometrisk serie är summan av de tio första termerna 33 gånger så stor som summan av de fem första. Den sjätte termen är 24 enheter större än den fjärde. Vilken är serien?
2. A, B, C och D äro fyra på varandra följande hörn i en regelbunden 20-hörning med sidan 3 cm. Beräkna ytan av fyrhörningen $ABCD$.
3. I en parallellogram är en sida 8 cm och en diagonal 25 cm. Vinkeln mellan dessa linjer är $24^\circ{,}14$. Vilka vinklar bilda parallellogrammens sidor med varandra?
4. Kurvan $y = x^2 - 6x + 5$ skär x-axeln i punkterna A och B (A har den mindre x-koordinaten). Kurvan $y = 6x + 3 - x^2$ skär samma axel i punkterna C och D (C har den mindre x-koordinaten). Visa, att $AC = BD$, och bestäm exakta värdet av detta avstånd.
5. I en fyrhörning bilda sidorna i ordning en geometrisk serie med kvoten $^4/_3$. Vinkeln mellan de båda kortaste sidorna är 90°. Beräkna vinkeln mellan den kortaste sidan och den längsta.
6. Med en liksidig triangels sidor som diametrar uppritas cirklar. Av varje cirkel behålles endast den inom triangeln belägna delen. Man får då tre cirkelbågar, som begränsa en kroklinig figur. Visa, att dennas yta är större än $^2/_5$ av den liksidiga triangelns yta.
7. I en rätvinklig triangel är den mindre kateten a. Höjden mot hypotenusan och en med höjden parallell transversal dragas. Den del av triangeln, som ligger mellan höjden och transversalen, är hälften av triangelns yta, och de båda övriga delarna av triangeln äro lika stora. Beräkna längden av den inom triangeln belägna delen av transversalen.
8. En tjänsteman erhåller fr. o. m. år 1935 en årlig pension av 5 400 kr. Han har fr. o. m. år 1900 t. o. m. år 1934 erlagt en årlig pensionsavgift av 270 kr. Om de inbetalade pensionsavgifterna skulle användas till pensionen, hur många år skulle denna då kunna utbetalas? Räntefoten är 4 %. Såväl pensionen som pensionsavgiften tänkes utbetalad i förskott varje år.

Resultat: **1.** 1, 2, 4, 8 ... **2.** 5,425 cm². **3.** 34°,61 och 145°,39. **4.** $2(\sqrt{3} - 1)$ längdenh. **5.** 101°,63. **6.** Förhållandet mellan den krokliniga figurens yta och triangelns $= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} = 0{,}4068$, som är större än $\frac{2}{5}$. **7.** $\frac{a}{2}$. **8.** 4 år.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En person testamenterade till två gossar en summa av 10 000 kr, som skulle tillfalla dem vid årsskiftet närmast efter hans död och då fördelas på så sätt, att båda gossarna kunde beräknas ha att lyfta en lika stor summa vardera vid slutet av de år, under vilka de skulle fylla 19 år. Samma år testator dog, fyllde gossarna 9 respektive 14 år. Hur fördelades arvet, om ränta på ränta beräknades efter 4 %?
2. Lös ekvationen $\sin(3x - 180°)\cos(270° - x) = \frac{1}{2}$.
3. I en aritmetisk serie är femte termen lika med summan av första och tredje termernas kvadrater, och det inverterade värdet av andra termen är lika med summan av tredje och sjätte termernas inverterade värden. Bestäm serien.
4. I en triangel *ABC* är vinkeln *A* 70°. Medianen till sidan *AC* förhåller sig till sidan *AB* som 5 : 4. Beräkna vinklarna *B* och *C*.
5. Bestäm ekvationerna för de två tangenter till kurvan $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 8$, som äro parallella med linjen $2x + y - 2 = 0$, samt beräkna ytan av det parallelltrapets, som bildas av dessa båda tangenter och koordinataxlarna.
6. Kateterna i en rätvinklig triangel ligga utefter linjerna $2x - y + 5 = 0$ och $x + 2y + 3 = 0$. Hypotenusans mittpunkt är punkten $(-4; -5)$. Bestäm ekvationen för den linje, utefter vilken hypotenusan ligger.
7. I en rät cirkulär kon är höjden lika stor som basdiametern. Ett klot ligger så, att konens höjd utgör diameter i detsamma. Bestäm förhållandet mellan de delar av klotet, som ligga innanför och utanför konen.
8. Från en punkt på land iakttogs med vinkelinstrument ett fartyg, vars längd var 100 m. Första observationen gjordes kl 10. Efter en halvtimme hade synlinjen till fartygets för vridit sig 30°. Vid detta tillfälle konstaterades, att båten från för till akter upptog en synvinkel av 3°. Genom fortsatta observationer fastställdes det ögonblick, då den nämnda syn-

linjen vridit sig ytterligare 30°, vilket inträffade kl 11.15. Hur många knop gjorde fartyget, om det antages röra sig med konstant hastighet och utan kursändring? 1 knop = 1 852 m/tim.

Resultat: **1.** Den yngre och den äldre få resp. 4 511 kr och 5 489 kr. **2.** $45° + n \cdot 90°$; $\pm 30° + n \cdot 180°$. **3.** 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5 ... eller —0,3; —0,2; —0,1; 0; 0,1 ... **4.** $B = 84°{,}74$; $C = 25°{,}26$. **5.** $y + 2x - 8 = 0$ och $y + 2x - 12 = 0$; 20 ytenh. **6.** $4x - 3y + 1 = 0$. **7.** 9 : 16. **8.** 1,01 knop.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Genom punkten (10; 2) drages en rät linje, så att punkterna (2; 3) och (9; 4) komma att ligga på samma avstånd från densamma. Sök linjens ekvation.
2. Axeln i en parabel och storaxeln i en ellips ligga utefter samma räta linje. Parabeln går genom ellipsens ena vertex samt genom båda ändpunkterna av dess ena parameter. Parabelns parameter förhåller sig till ellipsens som 5 : 6. Bestäm ellipsens excentricitet.
3. Origo sammanbindes med den närmaste maximipunkten i första kvadranten på kurvan $y = \sin x$. En rät linje parallell med y-axeln skär kurvan i A (mellan origo och den nämnda maximipunkten) och den nyss nämnda sammanbindningslinjen i B. Sök maximum av sträckan AB.
4. Hyperblerna $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och $xy = k^2$ skära varandra under räta vinklar. Hur stor vinkel bilda den förra hyperbelns asymptoter med varandra?
5. En klotsektors spets och den cirkel, som begränsar dess sfäriska och koniska ytor, ligga på ytan av en given sfär. Sök maximum av sektorns volym.
6. Diskutera utseendet av kurvan $4x^2 + 16xy + y^2 - 40x - 20y + 100 = 0$ med angivande av eventuella maxima och minima.
7. AB är en fix korda i en ellips, C en rörlig punkt på ellipsens omkrets. Av de trianglar ABC, som ligga på ena sidan om AB, har ABC_1 den största ytan, och av dem, som ligga på andra sidan, är ABC_2 den största. Bevisa, att linjen C_1C_2 är diameter i ellipsen och delar AB mitt itu.

Resultat: **1.** $x - 7y + 4 = 0$ och $x + 3y - 16 = 0$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** 0,2106 längdenh. **4.** 90°. **5.** $\frac{9\pi r^3}{16}$, där r är den givna sfärens radie. **6.** Kurvan utgöres av två grenar, den ena belägen i andra kvadranten (inom området $x \leqq 0$ och $y \geqq 4$) med $y_{\min} = 4$ för $x = -3$. Den andra grenen ligger i fjärde kvadranten (inom området $x \geqq 2$ och $y \leqq 0$) med $y_{\max} = 0$ för $x = 5$. Kurvans existensområden liksom max.- och min.-värdena erhåller man enklast genom att lösa den givna ekv. dels med avseende på x, dels med avseende på y och undersöka villkoret för reella rötter. Anm. Kurvan är en hyperbel med medelpunkten i (1; 2); asymptoternas vinkelkoeff. $= -8 \pm 2\sqrt{15}$.

Uppgifter i fysik.

1. En tvåhjulig kärra väger med last 300 kg. Hjulens diameter är 120 cm. Kärran rör sig långsamt fram på en horisontell väg men stoppas av en 4 cm tjock planka, som ligger tvärs över vägen. Beräkna den kraft, som måste verka på hjulparets axel, för att åkdonet skall kunna forcera hindret. Kraften är vinkelrät mot axeln och riktad snett uppåt i en riktning, som bildar 30° vinkel med horisontalplanet. Kraften skär såväl åkdonets tyngd som resultanten till de krafter, varmed plankan verkar på hjulen, i en punkt på axeln, mitt mellan hjulen.
2. En av de många metoderna att bestämma accelerationen vid fritt fall framgår av följande försök. En med vitt papper beklädd bräda är upphängd i vertikalt läge. Den är nedtill skodd med blyplåt och faller därför, då den släppes, rätt ned med bibehållande av sin vertikala ställning. I närheten av brädan har man uppställt en liten elmotor, på vars vertikala axel en vätskebehållare sitter. Denna är fylld med bläck, och då motorn roterar, slungas en fin bläckstråle ut i horisontell riktning genom ett litet munstycke i behållarens vägg. Motorn roterar 30 varv i sekunden. Om brädan får falla, träffas den på flera olika ställen av bläckstrålen. På det vita papperet är en vertikal blyertslinje dragen längs brädans mittlinje. O är skärningspunkten mellan denna linje och en av bläcklinjerna, A och B skärningspunkterna med de båda bläcklinjer, som ligga närmast ovanför. Avståndet OA och OB uppmätas och befinnas vara 4,9 resp. 10,9 cm. Beräkna det värde på accelerationen vid fritt fall, som erhålles av försöket.
3. Runt omkring en glasflaska, som rymmer 2 liter, äro ett antal halvlitersflaskor uppställda, vilka genom var sin rörledning med kran stå i förbindelse med den stora flaskan. Från början äro kranarna stängda och alla halvlitersflaskorna lufttomma, medan den stora flaskan är fylld med en gas, vars tryck är 725 mm kvicksilver. Man vill nu fylla några av halv-

litersflaskorna med gas från den större flaskan till ett tryck av 300 mm. Var och en av flaskorna är försedd med en lämplig manometer, och fyllningen tänkes ske genom att kranen till en flaska i taget försiktigt öppnas för att åter slutas, då trycket 300 mm avläses på denna flaskas manometer. Huru många flaskor kunna på detta sätt fyllas? Temperaturen antages vara konstant, och volymen av rörledningarna och manometrarna lämnas ur räkningen.

4. I ett fyrsidigt glasprisma ABCD är vinkeln A = 90° och vinkeln B = 75°. I prismats huvudsnitt infaller ett smalt enfärgat strålknippe genom sidan AB, totalreflekteras mot BC, kastas därifrån mot AD och utträder ur prismat. Huru stor bör infallsvinkeln vara, för att det utträdande strålknippet skall bilda 90° vinkel med det infallande? Brytningsindex för ifrågavarande ljussort är 1,654.
5. Ett transmissionsgitter med 500 streck per mm är uppställt på bordet till en spektrometer. Ett parallellt knippe natriumljus från kollimatorn träffar gittret vinkelrätt. Då det gula natriumljuset består av två ljussorter med våglängderna 5890 resp. 5896 ångström, uppstå i kikarobjektivets fokalplan två gula spektrallinjer tätt intill varandra. Beräkna avståndet mellan dem, om andra ordningens spektrum nyttjas. Kikarobjektivets brännvidd är 50 cm. 1 ångström = 10^{-7} mm.
6. För att bestämma specifika värmet för en metallegering vid en viss hög temperatur anskaffade man en ugn, som höll den önskade temperaturen. I ugnen infördes ett tunt rör av värmebeständigt material, försett med en metalltrådslindning och skyddat av ett yttre värmeisolerande skyddsrör. Genom metalltrådslindningen kunde innerröret uppvärmas på elektrisk väg; övertemperaturen hos innerröret utöver ugnens temperatur bestämdes på vanligt sätt medelst termoelement och galvanometer. Provstycket, som vägde 27 g, infördes i innerröret. Sedan ugnen jämte skyddsrör, innerrör och provstycke antagit den önskade temperaturen, slöts strömmen genom uppvärmningsspiralen under 30 sek; i spiralen utvecklades en effekt om 90 watt. Härigenom antog provstycket och innerröret en övertemperatur över ugnens temperatur om 47°. Därefter borttogs provstycket, och försöket repeterades under för övrigt samma betingelser som nyss. I detta fall behövdes det en effekt om 60 watt under 30 sek, för att samma övertemperatur (47°) skulle erhållas. Beräkna specifika värmet för legeringen vid den ifrågavarande temperaturen.
7. Vid en laboration vill man bestämma inre motståndet hos ett

nästan förbrukat ficklampsbatteri. Batteriet slutes genom två seriekopplade proppreostater AB och CD. Till anslutningsklämmorna A och B av reostaten AB anslutes därjämte en ledning, innehållande ett normalelement och en galvanometer i serie. Det visar sig, att vid rätt inkoppling av normalelementet galvanometern blir strömlös, om 48,0 ohm äro inkopplade i reostaten AB och 39,5 ohm i reostaten CD; likaså blir galvanometern strömlös, om 76,0 ohm äro inkopplade i AB och 68,4 ohm i CD. Beräkna batteriets inre motstånd. Det antages, att batteriets elektromotoriska kraft och inre motstånd äro oförändrade under försöket samt att motstånden i de ledningstrådar, som förena reostaterna med varandra och med batteriet, kunna försummas.

8. Beräkna antalet molekyler i en grammolekyl vätgas, då man vet

1) att vätets atomvikt är 1,008 och att en molekyl väte består av två atomer,

2) att vid elektrolys av svavelsyra 116 mm^3 vätgas av 0° och 760 mm utvecklas per sekund, då strömstyrkan är 1 ampère,

3) att vätgasens täthet vid nämnda tryck och temperatur är $9{,}0 \cdot 10^{-5}$ g/cm^3, samt

4) att varje envärdig jon har en laddning av $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb.

Resultat: **1.** 109 kgf. **2.** 990 cm/sek^2. **3.** 5 flaskor. **4.** 55°,8. **5.** 0,4 mm (skillnaden mellan de båda vinklarna är 0°,04, som ger 0,35 mm mellan linjerna i fokalplanet). **6.** 0,17. **7.** 10,0 ohm. **8.** $6{,}03 \cdot 10^{23}$.

Realexamen H. T. 1940.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $\frac{x}{x - \frac{1}{3}} - \frac{2}{x + \frac{1}{2}} = 1.$

2. En person erbjudes köpa ett bostadshus för 180 000 kr. Då han själv äger endast 30 000 kr, måste han låna återstoden, om han skall kunna köpa huset. Han kan påräkna följande lån: i bank 90 000 kr till 3 ½ %, i en kreditkassa 20 000 kr till 4 ½ % samt återstoden hos privatpersoner till 5 %. Huset lämnar i hyror 15 260 kr årligen. Därifrån avgå: räntor å lånen, skatt 725 kr, vatten- och värmekostnader 2 200 kr, utgifter för gårdskarl, reparationer, försäkringar m. m. 2 500 kr. Hur stort skulle överskottet bli, och hur många procents årlig ränta skulle han få på sina egna pengar?

3. Glaskulan i en termometer har formen av ett klot med 12 mm inre diameter. Det cylindriska termometerröret har en inre diameter av 1,2 mm och en längd av 20 cm. Om termometern fullständigt fylles med kvicksilver, hur många gram väger då detta? $\pi = 3{,}14$. Kvicksilvers specifika vikt $= 13{,}6$.
4. En vara såldes med 16 % vinst för 14,50 kr per kg. På grund av allmän prisstegring ökades försäljningspriset med 20 %. Vilken vinst i procent erhöll en affärsman vid försäljning av inneliggande lager av denna vara, om han omedelbart tilllämpade det högre försäljningspriset?
5. *A*, *B*, *C* och *D* äro fyra på varandra följande hörn i en regelbunden åttahörning. Diagonalerna *AC* och *AD* dragas. Hur stora äro vinklarna i triangeln *ACD*?
6. Ett arbete kan utföras av A och B, antingen så, att A ensam arbetar i 80 dagar och B därefter ensam i 60 dagar, eller också så, att B ensam arbetar i 35 dagar och båda sedan gemensamt avsluta arbetet. I senare fallet blir hela arbetet färdigt på 90 dagar, räknat från dess påbörjande. På hur lång tid kunna A och B var för sig utföra hela arbetet?
7. Från mittpunkten på bågen i en cirkelsektor med radien 12 cm och medelpunktsvinkeln 60° dragas två räta linjer parallellt med sektorns radier. Beräkna ytan av den uppkomna fyrhörningen.
8. Tre orter, A, B och C, ligga i nu nämnd ordning vid en landsväg. En fjärde ort, D, ligger vid en sidoväg, som skär den förra vägen vid B. Vägsträckorna BD, BA och BC förhålla sig till varandra som 1 : 2 : 3. Två personer, den ene boende i A, den andre i D, skola på cykel begiva sig till C över B. Den förre startar kl 11.50 och behöver 2 tim 30 min för att åka till C. Den senare startar kl 12.05 och behöver 2 tim 20 min för att nå samma mål. När sammanträffa personerna?

Resultat: **1.** $x = 0{,}5$. **2.** 3 785 kr; 12,6 %. **3.** 15,37 g. **4.** 39,2 %.
5. $22^\circ{,}5$; 45°; $112^\circ{,}5$. **6.** A och B resp. 130 och 156 dagar.
7. $24\sqrt{3} = 41{,}57$ cm². **8.** Kl 13.50.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. För att mäta trycket i en gasledning använde man en öppen vattenmanometer, vars båda skänklar voro lodräta och hade samma inre genomskärningsyta. Då manometerns ena skänkel sattes i förbindelse med gasledningen och gas släpptes på, sjönk vattenytan i denna skänkel 45 mm. Beräkna gasens övertryck i mm kvicksilver. Kvicksilvrets specifika vikt är 13,6.

2. En gosse tillverkade en areometer av ett 300 mm långt glasrör, vars yttre diameter överallt var 18 mm. Han tillslöt först rörets ena ända med en propp, som han tryckte in i röret, så att dess yttre yta kom i nivå med glasrörets kant, och hällde därpå så mycket hagel i röret, att det intog lodrätt läge, då det fick flyta i vatten. Sedan röret dessutom försetts med skala och dess andra ända tillslutits, vägde det 54,6 g. När denna areometer fick flyta i bensin, låg glasrörets övre kant 10 mm över vätskeytan. Vilket värde erhåller man härav på bensinens specifika vikt?
3. En kula faller lodrätt ned mot ett horisontellt underlag och träffar detta med en hastighet av 6 m/sek. Huru högt studsar kulan, om 80 % av dess rörelseenergi förloras vid stöten? Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek^2.
4. Ett rakt kopparrör, vars längd är 1 m, är i båda ändarna fast inspänt mellan två väggar, vilkas avstånd kan anses oföränderligt. Genom röret ledes vatten av 18°, och då röret antagit denna temperatur, är det spänningsfritt. Vid ett tillfälle var emellertid vattnets temperatur endast 10°. Eftersom röret inte kunde sammandraga sig, uppstodo då dragspänningar i röret. Dessa bliva lika stora, som om röret först hade fått sammandraga sig fritt och därefter genom anbringande av dragkrafter i ändarna åter sträckts till sin ursprungliga längd. Huru stor blir spänningen i röret, uttryckt i kgf/cm^2, då vattnet runnit så länge, att även röret antagit temperaturen 10° C. Koppars längdutvidgningskoefficient är 0,000016 och dess elasticitetsmodyl 1 150 000 kgf/cm^2.
5. För att bestämma specifika värmet för fotogen slår man upp precis 0,5 liter i en termosflaska och nedsänker i fotogenen en motståndsspiral på 4 ohm. Man släpper nu under 3,5 min en ström på 2,3 ampère genom spiralen och konstaterar efter omsorgsfull omrörning en temperaturstegring hos fotogenen på 5°,2. Med en areometer bestämmes fotogenens specifika vikt till 0,81. Beräkna fotogenens specifika värme. En wattsekund motsvarar 0,24 cal. Vid värmeförluster fästes intet avseende.
6. Till följd av handelsavspärrningen under pågående krig nödgades man någonstans i Europa utbyta elektriska ledningar av koppar mot sådana av järn. Man ville bl. a. i en fabrik ersätta en koppartråd, som hade diametern 6 mm, med en lika lång ledning, bestående av tre likadana parallellkopplade järntrådar. Vilken diameter bör var och en av dessa erhålla, om den så byggda ledningen skall ha samma motstånd som koppartråden? Järnets specifika motstånd är 0,11, kopparns 0,017.
7. En pump, som drives av en elektrisk motor, skall per minut

uppfordra 480 liter vatten till en 24 m högre nivå. Beräkna, huru stor elektrisk effekt, uttryckt i kilowatt, som åtgår för motorn. Det antages, att motorn utnyttjar 80 % av den tillförda effekten till att driva pumpen och att pumpen i sin tur utnyttjar 60 % av den effekt, den får mottaga, till att lyfta vattnet. 1 kW = 102 kgm/sek.

8. För att isolationen hos en ledning, som är avsedd för en normal driftsspänning av 220 volt, skall kunna godkännas, fordras, att isolationsmotståndet uppgår till minst 250 000 ohm. Isolationen mellan plus- och minusledningen hos en dubbelledare undersöktes vid ett tillfälle på så sätt, att ena ledaren direkt anslöts till nätets minuspol. Mellan den andra ledaren och nätets pluspol kopplades en voltmeter med ett inre motstånd av 40 000 ohm. Dubbelledarens fria ändar stodo icke i förbindelse med varandra. Nätspänningen var 220 volt. Kan isolationen godkännas, om voltmetern visar 35 volt?

Resultat: 1. 6,6 mm. 2. 0,740. 3. 0,367 m. 4. 147 kgf/cm^2. 5. 0,51. 6. 8,8 mm. 7. 3,92 kW. 8. Nej, ty motståndet är endast 211 000 ohm.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Ett kugghjuls ytterdiameter är 533 mm och kuggantalet är 80. Vilken är hjulets modul och hur stor är delningsdiametern?
2. Ett bärlager vilar på en väggkonsol. Lagerskålarnas längd är 180 mm, borrningen 45 mm och lagertrycket 4 kg/cm^2. Vikten av lager och konsol är tillsammans 45 kg. Tre bultar skola pressa konsolplattan så hårt mot väggen, att friktionen mellan platta och vägg blir lika stor som lasten. Friktionskoefficienten är 0,2. Beräkna kärndiametern på bultarna och föreslå lämplig standarddimension. Tillåtna dragpåkänningen i bultarna är 500 kg/cm^2.
3. Beräkna diametern å kolvtappen till en dieselmotor, då cylinderdiametern är 420 mm och högsta gastrycket 40 kg/cm^2 övertryck. Den tillåtna skjuvpåkänningen å kolvtappen är 200 kg/cm^2.
4. Drevet i en kuggväxel har 60 kuggar med modulen 9,5 mm och en bredd av 60 mm. Hur många hästkrafters effekt förmår det överföra, då periferihastigheten är 2,1 m/sek och tillåtna böjningspåkänningen hos materialet är 300 kg/cm^2. Kuggtjockleken vid foten kan sättas lika med tjockleken längs delningscirkeln.

5. En ångmaskins cylinderdiameter är 190 mm. Högsta övertryck på kolven är 14,5 kg/cm² (kolvstångens area kan här sättas = 0). Kolvstångens längd är 400 mm. Stången skall beräknas med 20-faldig säkerhet mot avknäckning. E = 2 100 000 kg/cm². Huru stor bör kolvstångens diameter göras?
6. Vid ett försök med en vattenrörpanna, avsedd för eldning med masugnsgas, erhölls följande värden. Till ånga överfört vatten 6 750 kg per timme, matarvattnets temperatur 40° C, ångans övertryck 9,0 kg/cm², ångans temperatur 179° C, gasens värmevärde 820 kcal/m³, gasens medelhastighet i gasledningen 10,5 m/sek och gasledningens diameter 500 mm. Beräkna ångpannans verkningsgrad.
7. Redogör för ventilationsanordningarna i en villabyggnad.
8. Sparrarna i en takstol av trä luta 30° mot horisontalplanet. Takets totallast är 200 kg per m² takyta, sparrarnas fria längd är 4 m och deras avstånd från mitt till mitt är 1 m. Tillåtna böjningspåkänningen är 80 kg/cm². Sparrarna kunna anses vara fritt upplagda på tvenne fasta upplag. Vilken tvärsektion böra sparrarna ha om $b : h = 4 : 5$?
9. En taksparre är intappad i en träbjälke under 30° vinkel med en vertikalt inhuggen tapp av 6 cm tjocklek och 10 cm djup. Sparren är utsatt för 5 200 kg tryck i längdriktningen. Hur långt från bjälkändan bör tapphålet vara inhugget? Tillåtna skjuvpåkänningen i bjälken är 4 kg/cm².

För betyget godkänd fordras nöjaktig behandling av minst 2 exempel av uppgifterna 1—6 tillika med minst 1 exempel av uppgifterna 7—9.

Resultat: 1. Modul 6,5 mm; delningsdiameter 520 mm. 2. Kärndiameter 12,5 mm; W 5/8″. 3. 134 mm. 4. 10,7 hk. 5. 34 mm. 6. 69,2 %. 8. Höjd 15 cm; bredd 12 cm. 9. 44 cm.

(Forts. från sid. 249.)

Flygning, 1940: 16—21.

Ur innehållet: Luftfartsmedicinens grunder; Blindlandning enligt ZZ-systemet; Radio för flyget; Segelflygare på skolbänken; Radiovågornas utbredning och fadingfenomenet; Stratosfärlaboratorium; Butan och dess användning; Den elektriska utrustningen i flygplan; Isbildning på flygplan; Konstgummit erövrar flyget. Om svenska flygvapnet läser man i »Flygvapennummer» (nr 21).

Matematisk Tidsskrift, København 1940: 1—2.

Ur innehållet i A: H. BOHR, Om det matematiske Grundlag for Sandsynlighedsregningen; O. DANIELSSON, Lidt elementær Geometri; K. RANDER BUCH, Sætningen om det geometriske og det aritmetiske middeltal. Ur innehållet i B: H. BOHR, Zum Picardschen Satz; J. NIELSEN, Den symmetriske og den alternerende Gruppe; A. S. BANG, Om Tal av Formen $a^x \pm b$, hvor a er primisk med b; A. S. BANG, Om Tal som kan skrives som en sum af tre eller fire Kubiktal; Litteraturanmeldelser.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1940: 3.

Ur innehållet: J. RAMBERG, Jordens ytgestaltning; M. RUDKJØBING, Stjernestrømme; E. S., De nærmeste Stjerner.

Fysisk Tidsskrift, København 1940: 4.

Ur innehållet: J. HARTMANN, Den akustiske Luftstraalegenerator II: N. ARLEY, Om nyere teoretiske synspunkter for tydningen af højdestraalingen II.

Naturens Verden, København 1940: 5—7.

Ur innehållet: V. NORDMANN, Nyere undersøgelser over Litorinatiden i Danmark; E. GRAM, Bor, Kopper og Mangan som Plantenæring; A. NOE-NYGAARD, Om subglacial Vulkanisme; M. PIHL, Den moderne fysik og biologien.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1940: 2—3.

Ur innehållet: J. E. FJELDSTAD, En generalisasjon av Abels integralligning; BJ. BJERKE, Sannsynlighet på grunning av uttatt prøve; K. PIENE, Gyldighetsområder i elementærmatematikken; F. KARLSEN, Litt om kjedebrøker; Bokanmeldelser; Opgaver til løsning o. eksamensopgaver.

Himmel og jord, 1940: 5.

Ur innehållet: R. BRAHDE, Planeten Venus; L. OWREN, En solformørkelse hver dag; I. RUUD, Kulelynet — et synsbedrag; E. BJØRDAL, Hva er en radiosonde? — — Tidskriftens utgivare, Norsk Astronomisk Selskab, meddelar, att innevarande årg. avslutas med detta häfte och att tidskriften helt måste nedläggas på grund av den av rådande förhållanden förorsakade ekonomiska situationen. Att en så välredigerad tidskrift upphör är mycket beklagligt.

Naturen, Bergen 1940: 8—11.

Ur innehållet: K. SANDVED, Nye synpunkter innen syra-base kjemien; J. NUMMEDAL, Vikingatidens jern; C DONS, En usedvanlig doppelregnbue; TH. HASSELBERG, Klimavariasjoner i Norge i vår tid; A. KVALE, En ny teori om årsakene til fjellkjedefoldninger.

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN
G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGUFJÄRDE ÅRGÅNGEN
1941

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16^4 STOCKHOLM

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1941

Tjugufjärde årgångens innehåll.

1941.

Sid.
Andersson, S. Ett bevis för Wilsons sats 121
Arrhenius, S. Eine dielektrische Untersuchung von Kohlenoxyd-Hämoglobin. (ref. av gradualavh.) 99
Blom, C. E. Anm. av E. T. Bell, Matematikens män (47). E. H. Sørensen, Fysikaliske målinger (209), Ths. Skjulstad og B. Sollesnes, Samfunnsregning (209).
Brohult, S. Investigations of Helix Pomatia Haemocyanin (ref. av gradualavh.) 101
Comét, S. Något om matrisräkning (forts.) 1
Danielson, S. Anm. av H. Bohr og J. Mollerup, Lærebog i matematisk Analyse (93), N. E. Fremberg, Inledning till differential- och integralkalkylen (94).
Faxén, O. H. Anm. av F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen och Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven 94
Forsman, S. Cykeldynamon i fysikundervisningens tjänst 132
Funke, G. Objektiv fotometri 83
— — Apparat för undersökning av fasta kroppars elasticitetsförhållanden 190
Guntsch, A. Om bestämning av metallers värmeledningsförmåga 37
— — Anm. av G. Russell Harrison, Atomerna i arbete 96
Gustaver, B. Meddelanden från Föreningen för matem.-naturv. underv.: Från årsmötet i jan. 1941 med styrelseberättelse för 1940 och referat av diskussion över ämnet »Rät parallellprojektion i matematik och teckning» 38
Från vårsammanträdet i maj 1941 89
Herlin, E. Anm. av H. Stockman, Modern televisionsteknik .. 48
Juringius, N. Reflexioner över några polygonsatser 65
Jönsson, T. Den nyaste c-bestämningen 124
Karlsson, K.-J. Zur Thermochemie einiger chlor- und jodhaltiger Benzolderivate (ref. av gradualavh.) 162
Lenander, K.-J. Om Kundts rör 75
Lindblom, S.-G. Anm. av N. Arley og K. Rander Buch, Sand-

synlighedsregning med anvendelse paa Statistik, Fejlteori og Udjævningsteori 45
Lindholm, S. Projektionsmätinstrument 36
Lundberg, J. Anm. av E. Pilgrim, Chemie — überall Chemie .. 47
Lundberg, O. On random processes and their application to sickness and accident statistics. (ref. av gradualavh.) 103
Lönnqvist, C. Anm. av C. Luplau Janssen, Stjernehimlen og dens Vidundere 46
Nilsson, A. Elektrolys av glas 35
— — Synliga strålknippen 140
Nordefelt, E. Anm. av M. Hole, Elevøvelser i kjemi (98), Mary Elvira Weeks, Discovery of the Elements (158), J. Kruse, Praktische Übungen zur Chemie der Nahrungsmittel (159), R. Scharf und H. Golombeck, Unsere Kleidung (159), A. Bengtsson, Varunamn och termer inom textilbranscherna (160).
Nordhult, A. En härledning av pyramidens volym 72
— — En Atwoods fallmaskin avsedd för tidtagning med stoppur .. 137
Nordström, H. Anm. av B. Strömgren, Universets Udforskning (152), Å. Wallenquist, Mörk materie i världsalltet (154).
Nyberg, A. Något om atmosfärens temperaturförhållanden 195
Ohlin, P. An X-ray Determination of *h*/*e* with Counter and Bent Crystal (ref. av gradualavh.) 210
Pleijel, A. Några trigonometriska olikheter 31
Ramstedt, Eva. Atomomvandlingar 13
— — Anm. av H. Pettersson, Jorden och radium 95
Reiz, A. A Study of External Galaxies with Special Regard to the Distribution Problem (ref. av gradualavh.) 212
Ryde, N. Anm. av Kosmos, bd 18, 1940 155
Sanner, V. H. Die K-Emissions- und Absorptionsspektren der Elemente Kalium bis Kupfer und einiger ihrer Oxyde (ref. av gradualavh.) 164
Sillén, L. G. X-Ray Studies on Oxides and Oxyhalides of Trivalent Bismuth (ref. av gradualavh.) 51
Sjöberg, B. Über Thioglycerine und einige verwandte Schwefelverbindungen (ref. av gradualavh.) 161
Sjöström, M. Anm. av C. E. Holmqvist, Flygning 44
Skjulstad, T. Et nytt sentrifugalapparat 122
Starck, G. Anm. av Ellen Gleditsch og E. Jensen, Lærebok i uorganisk kjemi (97), S. Löfgren, Teknisk varukännedom (98), O. Ant-Vuorinen och A. Nordström, Lärobok i kemi för sjuksköterskor (160), L. Smith, Lärobok i oorganiska undervisningsexperiment (207).

Svensson, B. Föreningen i Lund för matem.-naturv. underv. Från årsmötet i april 1941 med referat av föredrag av lektor A. Leide, överingenjör T. Husberg och prof. T. Thunberg .. 90
Tallqvist, Hj. och A. Wahlgren. Tillägg till uppsatserna »Om Mersennes tal o. s. v.» samt »Om faktorer till talen $a^p + 1$» 33
Tallqvist, Hj. Om faktorer till tal av formerna $5^p - 1$ och $5^p + 1$ 73
Tandberg, J. Anm. av Eli F. Heckscher, De svenska pennings-, vikt- och måttsystemen 99
—— Anm. av P. Vinding, Dansk Teknik gennem 100 Aar, belyst i Levnedsskildringer (158), Bonniers Konversationslexikon, bd IV (161).
Torsting, E. De matematisk-naturvidenskabelige fags stilling i de danske skoler 177
Tyrén, F. Precision Measurements of Soft X-Rays with Concave Grating (ref. av gradualavh.) 49
Uhler, A. Anm. av R. Tambs Lyche, Lærebok i matematisk analyse I og II 92
Wahlgren, A. och Hj. Tallqvist. Tillägg till uppsatserna »Om Mersennes tal o. s. v.» samt »Om faktorer till talen $a^p + 1$» 33
Wahlström, B. En ny metod för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten 143
—— En ny apparat för verifiering av formeln för centrifugalkraften 185
Westlin, R. Finlands matematik- och fysiklärarförbund 148
Åstrand, S. Anm. av D. Katz, Psykologiska laborationer 156

Innehållsregister till årg. *17—24*, utgivna under åren 1934—1941 229
Föredrag under hösten 1940 och våren 1941 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 53, 104
Föreläsningar för lärarkand. vid provårsläroverken 1940—41 165
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1941: jan. (59), mars—april (109), aug.—sept. (171) och nov. (218).
Provräkning i realexamen v. t. och h. t. 1941 .... 115, 224
Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v. t. och h. t. 1941...... 117, 225
» » Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v. t. och h. t. 1941 .... 118, 227
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 55, 105, 167, 215
Uppgifter i Elementas pristävlan 1941 214

Gradualavhandlingar (autoreferat): S. Arrhenius (99), S. Brohult (101), K.-J. Karlsson (162), O. Lundberg (103), P. Ohlin (210), A. Reiz (212), V. H. Sanner (164), L. G. Sillén (51), B. Sjöberg (161) F. Tyrén (49).

Tidskrifter, innehållsöversikt................ 54, 58, 64, 120, 166, 176

Bokanmälningar: Holmqvist, Flygning; Arley-Buch, Sandsynlighedsregning med Anvendelse paa Statistik; Janssen, Stjernehimlen og dens Vidundere; Pilgrim, Chemie — überall Chemie; Stockman, Modern televisionsteknik; Bell, Matematikens män 44

Tambs Lyche, Lærebok i matematisk analyse I og II; Bohr-Mollerup, Lærebog i matematisk Analyse II; Fremberg, Inledning till differential- och integralkalkylen; Emde, Tafeln elementarer Funktionen; Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven; Pettersson, Jorden och radium; Harrison, Atomerna i arbete; Gleditsch-Jensen, Lærebok i uorganisk kjemi; Hole, Elevøvelser i kjemi; Löfgren, Teknisk varukännedom; Heckscher, De svenska penning-, vikt- och måttsystemen.. 92

Strömgren, Universets Udforskning; Wallenquist, Mörk materie i världsalltet; Kosmos band 18; Katz, Psykologiska laborationer; Vinding, Dansk Teknik gennem 100 Aar; Weeks, Discovery of the Elements; Kruse, Praktische Übungen zur Chemie der Nahrungsmittel; Scharf-Golombeck, Unsere Kleidung; Bengtsson, Varunamn och termer inom textilbranscherna; Ant-Vuorinen-Nordström, Elementarlärobok i kemi för sjuksköterskor; Bonniers Konversationslexikon, band IV 152

Smith, Lärobok i oorganiska undervisningsexperiment; Sørensen, Fysikaliske målinger; Skjulstad-Sollesnes, Samfunnsregning... 207

Tidskr. utkommer med fyra häften årligen (mars, juni, sept., dec.) Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16^{IV}, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Något om matrisräkning.

Av **STIG COMÉT.**

(Forts. från sept.-häftet 1940 s. 145.)

6. En viktig användning av matriser erbjuder lineära transformationer (substitutioner). Vid något problem kan man ha att göra med vissa tal, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (t. ex. komponenter av en vektor, n st. oberoende variabler el. dyl.). Av någon anledning kan man önska utbyta dem mot andra tal, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, av vilka de förra bero lineärt, d. v. s. man önskar göra följande lineära transformation:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Koefficienterna $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ kunna tagas som element i en matris, $\mathbf{A}$, som man brukar kalla transformationens matris. Talsystemen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resp. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kunna även betraktas som matriser, $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$, med vardera *en enda kolonn* och n rader. I så fall kan ovanstående transformation kortast skrivas

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

vilket läsaren uppmanas att kontrollera.

Underkastas därpå $\mathbf{y}$ transformationen $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{z}$, så kan man genom direkt insättning erhålla $\mathbf{x}$ uttryckt i $\mathbf{z}$, d. v. s. $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{z}$. Med hjälp av matrismultiplikation kunna vi lätt finna $\mathbf{C}$: Ty $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{z})$, och eftersom matrismultiplikation är associativ, är $\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{z}$, alltså $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$.

Läsaren bör genomräkna åtminstone fallet $n = 3$.

Om man låter varje transformation representeras av sin matris, kan resultatet uttryckas på följande sätt: Två transformationer, representerade av $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$, utförda efter varandra, ge samma resultat som en enda transformation, nämligen den som representeras av produktmatrisen $\mathbf{A}\mathbf{B}$.

Det bör tilläggas, att den vid första ögonkastet invecklade definitionen på produkt av två matriser tillrättalagts just med tanke på användningen vid transformationer.

En viktig transformation är den, som svarar mot enhetsmatrisen $\mathbf{E}$. En sådan transformation, $\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{y}$, innebär att $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, vilket man finner genom direkt uträkning. Den kallas den identiska transformationen. Man har därför alltid, att $\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x}$.

Ett av den elementära algebrans viktigaste problem är att, om $\mathbf{x}$ är uttryckt i $\mathbf{y}$ medelst $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, söka uttrycka $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$ medelst en liknande transformation $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Detta är ju intet annat än problemet att lösa ett ekvationssystem av n ekvationer med de n obekanta $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Med matriskalkylens hjälp ser lösningen ut så här: Av $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ följer, att $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Men härav följer, att $\mathbf{A}\mathbf{B}$ måste vara $= \mathbf{E}$. För att detta skall vara möjligt, måste $\mathbf{A}$ vara icke-singulär. Är detta villkor uppfyllt, så är $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Resultatet är alltså följande: Nödvändiga och tillräckliga villkoret för att man ur $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ skall kunna lösa $\mathbf{y}$, uttryckt i $\mathbf{x}$, är, att $\mathbf{A}$ är icke-singulär. Är detta villkor uppfyllt, så är $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

Genom likheten $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ äro de n talen $\mathbf{x}$ uttryckta som lineära funktioner av de n talen $\mathbf{y}$. Stundom måste man övergå till nya variabler, och därvid måste ofta $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ underkastas samma variabeltransformation. Om vi taga fallet $n = 3$, så inträffar detta exempelvis, om x_1, x_2, x_3 äro koordinater för en punkt och y_1, y_2, y_3 äro hastighetskomposanter; vill man göra en övergång till ett annat koordinatsystem (med samma origo), så måste koordinaterna och hastighetskomposanterna underkastas samma transformation. — Vi skriva alltså $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$ och $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{y}'$. Mellan dessa nya variabler $\mathbf{x}'$ och $\mathbf{y}'$, bör då också råda ett visst samband, som vi önska skriva under formen $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{y}'$ Vi söka alltså $\mathbf{B}$. Av $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$ följer, om $\mathbf{P}$ är icke-singulär, att $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$. Vidare är ju $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{y}'$. Dessa tre likheter kunna sammanslås till en enda, vilket ger $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}'$. Den sökta matrisen är således $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Villkor för att den skall existera är, att $\mathbf{P}$ är icke-singulär.

Matrisen $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, där $\mathbf{P}$ är en godtycklig, icke-singulär matris, brukar kallas för en transformation av matrisen $\mathbf{A}$. En transformation av $\mathbf{A}$ kan naturligtvis även tecknas $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$, där $\mathbf{Q}$ är icke-singulär.

Om man av någon anledning underkastar $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ olika transformationer: $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$ och $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{y}'$, så blir analogt $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

7. En annan viktig användning av matriser erbjuda s. k. bilineära och kvadratiska former. Endast det grundläggande skall här anföras.

Om $x_1, x_2, \ldots, x_m$ och $y_1, y_2, \ldots, y_n$ äro variabler och talen a_{jk} ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$) konstanter, kallas uttrycket

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j y_k$$

en *bilineär form* i variablerna x_j och y_k. Ett specialfall kan sägas vara det, då $m = n$, $x_j = y_j$ och $a_{jk} = a_{kj}$; i detta fall kallas

$$f(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$$

en *kvadratisk form* i variablerna x_j. Koefficienterna a_{jk} bilda en matris, $\mathbf{A} = (a_{jk})$, den bilineära, resp. kvadratiska formens matris. Matrisen till en kvadratisk form har egenskapen $a_{jk} = a_{kj}$ och kallas därför symmetrisk.

Låt $f(x, y)$ vara en bilineär form med matrisen $\mathbf{A}$, och låt vidare $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, liksom i mom. 6, vara matriser med 1 kolonn men m, resp. n rader. Den transponerade matrisen $\tilde{\mathbf{x}}$ har alltså 1 rad men m kolonner. Vad blir resultatet av matrisprodukten $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y}$? Tydligen blir $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}$ en matris med 1 rad och n kolonner, vars element äro $\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j (k = 1, 2, \ldots, n$ resp.). Om denna multipliceras med $\mathbf{y}$, blir resultatet tydligen en matris med 1 rad och 1 kolonn, vars enda element har värdet $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j\right) y_k$, d. v. s. $= f(x, y)$. Om ett tal betraktas som en matris med 1 rad och 1 kolonn, kan man alltså skriva varje bilineär form i matriser:

$$f(x, y) = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Det grundläggande problemet är nu, på vad sätt en bilineär form påverkas av variabeltransformationer. Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ underkastas transformationerna

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{v},$$

där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ beteckna de nya variablerna. Enligt mom. 3 är $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{P}}$, och genom insättning i den bilineära formen finner man

$$f(x, y) = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Den har alltså övergått till en bilineär form, $g(u, v)$, i variablerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ med matrisen $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}\mathbf{Q}$. — Det sagda gäller givetvis även kvadratiska former, varvid $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Genom lämpliga val av $\mathbf{P}$ och $\mathbf{Q}$ kan man åstadkomma, att $\mathbf{B}$ blir av någon viss enkel typ. Därigenom kan en klassifikation av bilineära former ernås. Beträffande *kvadratiska* former kan det bevisas, att $\mathbf{P}$ alltid kan väljas så, att $\mathbf{B}$ blir en diagonalmatris, och samtidigt, om samma transformation utföres på den kvadratiska form, vars matris = enhetsmatrisen $\mathbf{E}$, resultatet blir en form, som fortfarande har E till matris. Alltså $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{E}\mathrm{P} = \mathrm{E}$; $\because \tilde{\mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{E}$; $\because \tilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P}^{-1}$. En transformation, vars matris har egenskapen $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{E}$, kallas *ortogonal*. För varje kvadratisk form kan man alltså finna en ortogonal transformation, som gör B till diagonalmatris, d. v. s. som transformerar formen till

$$g(u,u) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ äro diagonalelementen i B.

Slutligen märkes, att determinanten $|\mathrm{P}|$ av en ortogonal matris har värdet $+1$ eller -1. Ty som bekant är $|\tilde{\mathrm{P}}| = |\mathrm{P}|$; av $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{E}$ följer då, att $|\tilde{\mathrm{P}}| \cdot |\mathrm{P}| = 1$, d. v. s. $|\mathrm{P}|^2 = 1$.

8. Exempel: I. Vi söka först utseendet av en 2-radig, ortogonal matris:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} p_{12} \\ p_{21} p_{22} \end{pmatrix}.$$

De villkor, dess element skola uppfylla, äro enligt $\tilde{\mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{E}$:

$$p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1; \quad p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1; \quad p_{11} p_{12} + p_{21} p_{22} = 0.$$

Om vi inskränka oss till reella värden av matriselementen, framgår av den första villkorsekvationen, att det finns en reell vinkel, α, för vilken $p_{11} = \cos\alpha$; $p_{21} = \sin\alpha$. Av de övriga ekvationerna framgår successivt:

$$\frac{p_{12}}{p_{22}} = -\operatorname{tg}\alpha; \quad p_{22} = \pm\cos\alpha; \quad p_{12} = \mp\sin\alpha \text{ (tecknen motsvariga).}$$

$$\because \mathrm{P} - \begin{pmatrix} \cos\alpha; & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha; & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Allteftersom övre eller undre tecknet väljes, blir determinanten $|\mathrm{P}| = +1$ eller -1. Om nu dènna transformation användes på en kvadratisk form, återstår det således endast att välja α så, att den transformerade formens matris blir en diagonalmatris, vilket alltid låter sig göra.

II. En ortogonal transformation definierades genom att den överför en form med matrisen $= \mathrm{E}$ till en ny form, ävenledes med matrisen E, d. v. s. den överför formen $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ till formen $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$.

Till grund för relativitetsteorien lägges en liknande transformation (Lorentz-transformationen),[1] som kan motiveras på följande sätt: En ljussignal utsändes från ett koordinatsystems origo. Efter tiden t har ljusvågen utbrett sig och bildar en sfär med radien $= ct$, om $c =$ ljushastigheten. Sfärens ekvation är, om de tre rymdkoordinaterna betecknas x_1, x_2, x_3:

---

[1] Denna har flera gånger behandlats i denna tidskrift, senast av Per-Olov Löwdin, årg. *22*, s. 161, varest ytterligare hänvisningar förekomma.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0.$$

I ett annat koordinatsystem (u_1, u_2, u_3), som exempelvis har translationsrörelse jämfört med det ursprungliga, kan ej någon olikhet i ljushastigheten observeras, vilket emellertid skulle varit fallet, om koordinattransformationen vore den »naturliga», t. ex. $x_1 = u_1 + vt$; $x_2 = u_2$; $x_3 = u_3$, där $v =$ koordinatsystemens inbördes translationshastighet (tänkt såsom riktad längs x_1- och u_1-axlarna). Hypotesen, som löser svårigheten, är att även tiden skall transformeras, och närmare bestämt: transformationen skall vara sådan, att formen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2$ överföres i formen $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - c^2w^2$ ($w =$ tiden i det nya koordinatsystemet), ty därigenom kommer ju ljushastigheten att vara $= c$ i båda koordinatsystemen.

Problemet återföres till ett enklare genom att vi införa $ict = x_4$, resp. $icw = u_4$ såsom fjärde »koordinat». Den sökta transformationen skall alltså överföra formen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, vars matris $= \mathbf{E}$, i formen $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, vars matris även $= \mathbf{E}$. Den skall alltså vara en ortogonal transformation »i 4 dimensioner».

Vi genomräkna det enkla fallet, att rörelsen sker längs x_1- och u_1-axlarna. Då lyder matrisen för transformationen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u}$:

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} \end{Vmatrix}.$$

Emedan $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{P} = \mathbf{E}$, så måste

$$p_{11}^2 + p_{41}^2 = 1; \quad p_{14}^2 + p_{44}^2 = 1; \quad p_{11}p_{14} + p_{41}p_{44} = 0.$$

Här äro ej alla matriselementen reella tal (ty 4:e koordinaten är imaginär). Enligt sista ekvationen sätta vi $\frac{p_{41}}{p_{11}} = -\frac{p_{14}}{p_{44}} = i\beta$ (där faktorn i utsatts, emedan man kan förvänta, att p_{41} och p_{14} bli rent imaginära, p_{11} och p_{44} reella). Då erhållas lätt matriselementen uttryckta i β:

$$p_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p_{14} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p_{41} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Här ha förtecknen valts så, att $|\mathbf{P}| = +1$.

Transformationen är alltså:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{u_1 - i\beta u_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_4 = \dfrac{i\beta u_1 + u_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

eller, om vi åter införa »tiden»: $x_4 = ict$; $u_4 = icw$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{u_1 + \beta cw}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t = \dfrac{\frac{\beta}{c}\cdot u_1 + w}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Betydelsen av β framgår, om man sätter $u_1 = 0$; då blir $\frac{x_1}{t} = \beta c$. Alltså är $\beta c = v =$ translationshastigheten för (u_1, u_2, u_3)-systemets origo, uppmätt i förhållande till (x_1, x_2, x_3)-systemet. Man har således $\beta = \frac{v}{c}$.

9. Vi ha visat, hur man ur ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ kan utlösa $\mathbf{y}$. Ett annat, ofta förekommande slag av ekvationssystem är $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, där λ betyder en konstant talfaktor. Detta ekvationssystem är homogent, d. v. s. det förekommer däri ej någon term, som icke innehåller de »obekanta». Därför har ett sådant ekvationssystem alltid en lösning $\mathbf{x} = 0$. Det gäller emellertid att undersöka, om det kan finnas någon annan lösning utöver denna. Vi taga ett enkelt sifferexempel med två obekanta (vi skriva x och y i st. f. x_1 och x_2). Ekvationssystemet, som skall lösas, är

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ 2x + 3y = \lambda y\,, \end{cases}$$

som kan skrivas

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

För att dessa båda ekvationer skola kunna satisfieras av värden på x och y, som ej båda äro $= 0$, måste $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$, alltså $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, varur framgår, att λ måste vara = ettdera av värdena 4 eller 1. Endast om detta är fallet, har ekvationssystemet någon från 0 skild lösning. Genom insättning av $\lambda = 4$ får man $x : y = 1 : 2$, och genom insättning av $\lambda = 1$ får man $x : y = -1 : 1$. På detta sätt kunna de i de båda fallen existerande lösningarna uttryckas.

Vi övergå till det allmänna fallet. Likheten $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ kan skrivas $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Ex} = 0$ eller $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = 0$. Detta lineära, homogena ekvationssystem, som har matrisen $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, har från 0 skilda lösningar, om och endast om dess determinant $= 0$, alltså $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$. Denna determinant har utseendet

$$\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda; & a_{12}; & \ldots; & a_{1n} \\ a_{21}; & a_{22} - \lambda; & \ldots; & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}; & a_{n2}; & \ldots; & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Den är, som synes, ett polynom i λ med gradtalet n (jämför utvecklingen av $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ i mom. 5). Vi kalla $\varphi(\lambda)$ för den *karakteristiska funktionen* till matrisen $\mathbf{A}$. Ekvationen $\varphi(\lambda) = 0$, som var villkoret för att ekvationssystemet skulle ha någon från 0 skild lösning, kallas matrisens *karakteristiska ekvation*. Rötterna till denna ekvation, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kallas *egenvärdena* till matrisen $\mathbf{A}$. Mot egenvärdena svara vissa lösningar av $\mathbf{x}$, s. k. egenlösningar (egenvektorer).

Beträffande den karakteristiska funktionen finnas ett antal viktiga satser, som vi nu skola visa. Om $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, där $\mathbf{P}$ är en av λ oberoende, icke-singulär matris, så ha $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ samma karakteristiska funktion. Ty om vi ihågkomma, att $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{E}$ och att $|\mathbf{P}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{P}|}$, så följer successivt:

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{PAP}^{-1} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{PAP}^{-1} - \lambda\mathbf{PEP}^{-1}| = |\mathbf{P}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{P}^{-1}| =$$
$$= |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|, \text{ v. s. b.}$$

Om λ_i är ett egenvärde till $\mathbf{A}$ och c är ett tal, så är $c\lambda_i$ ett egenvärde till $c\mathbf{A}$. Ty den mot matrisen $c\mathbf{A}$ svarande karakteristiska funktionen är $|c\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$. Om $\lambda = c\lambda_i$ insättes häri, erhålles $|c\mathbf{A} - c\lambda_i\mathbf{E}| = |c(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})| = c^n |\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E}|$, som är $= 0$, emedan λ_i var egenvärde till $\mathbf{A}$. Alltså satisfierar $\lambda = c\lambda_i$ den mot $c\mathbf{A}$ svarande karakteristiska ekvationen och är alltså egenvärde till $c\mathbf{A}$.

På analogt sätt kan visas, att λ_i^p är egenvärde till $\mathbf{A}^p$, eller att $f(\lambda_i)$ är egenvärde till $f(\mathbf{A})$, om $f(x)$ betecknar ett polynom i x. Vi vilja emellertid visa mera, nämligen att *alla* egenvärdena till $f(\mathbf{A})$ erhållas under formen $f(\lambda_i)$. För den skull skriva vi den karakteristiska funktionen till $\mathbf{A}$ uppdelad i lineärfaktorer:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = c(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda).$$

Det bör påpekas, att det bland egenvärdena kan finnas sådana, som äro lika. — Polynomet $f(x)$ antaga vi vara av graden r. Då är även $f(x)-\lambda$ ett polynom i x av graden r, vilket vi uppdela i lineärfaktorer:

$$f(x)-\lambda=k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r).$$

Då är $$f(A)-\lambda E=k(A-x_1E)(A-x_2E)\ldots(A-x_rE).$$

Den till $f(A)$ hörande karakteristiska funktionen är alltså

$$|f(A)-\lambda E|=k^n|A-x_1E|\cdot|A-x_2E|\cdot\ldots\cdot|A-x_rE|.$$

Men högra ledet härav kunna vi omskriva, ty ovan angåvo vi faktoruppdelningen av $|A-\lambda E|$, och denna kunna vi använda här: man har endast att ersätta λ successivt med $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Så erhålles:

$$\begin{aligned}|f(A)-\lambda E|=k^n\,&c(\lambda_1-x_1)(\lambda_2-x_1)\ldots(\lambda_n-x_1)\cdot\\ \cdot\,&c(\lambda_1-x_2)(\lambda_2-x_2)\ldots(\lambda_n-x_2)\cdot\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \cdot\,&c(\lambda_1-x_r)(\lambda_2-x_r)\ldots(\lambda_n-x_r).\end{aligned}$$

Vidare angåvo vi ovan faktoruppdelningen av $f(x)-\lambda$. Denna kan tydligen igenkännas i det nyss erhållna uttrycket (i lodräta rader). Så framgår det sökta uttrycket:

$$|f(A)-\lambda E|=c^r[f(\lambda_1)-\lambda][f(\lambda_2)-\lambda]\ldots[f(\lambda_n)-\lambda],$$

varav följer, att alla egenvärdena till $f(A)$ erhållas som $f(\lambda_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Om som polynom $f(\lambda)$ väljes den karakteristiska funktionen $\varphi(\lambda)$ till **A**, blir resultatet, att egenvärdena till $\varphi(A)$ äro $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n)$. Men eftersom λ_i äro rötter till ekvationen $\varphi(\lambda)=0$, så framgår att alla egenvärdena till $\varphi(A)$ äro $=0$. Det kan därför vara skäl att undersöka matrisen $\varphi(A)$ något närmare, vilket skall ske i nästa mom. Man kan icke omedelbart draga t. ex. slutsatsen, att $\varphi(A)=0$, ty det finnes matriser, som icke äro $=0$, men vars alla egenvärden äro noll (de i mom. 3 nämnda nilpotenta matriserna ha just denna egenskap).

10. Matrisen $A-\lambda E$ är i allmänhet icke-singulär, ty dess determinant är $=0$ endast om $\lambda=$ något av egenvärdena till **A**. Man kan alltså i allmänhet förutsätta, att λ har ett sådant värde, att $A-\lambda E$ är icke-singulär. Följaktligen kan man också förutsätta, att x har ett sådant värde, att matrisen $E-xA$ är icke-singulär. I så fall finnes $(E-xA)^{-1}$ och man har

$$(E-xA)^{-1}=\frac{(E-xA)'}{|E-xA|},$$

d. v. s. = ett bråk, där täljaren är en matris (den adjungerade matrisen till $E - xA$) och där nämnaren är ett polynom i x av graden n. Elementen i den matris, som utgör täljaren, äro de $(n-1)$-radiga minorerna till $E - xA$, och de äro därför polynom i x av gradtal, som äro högst $= (n-1)$. Då kan täljaren skrivas

$$(E - xA)' = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1},$$

där $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ äro matriser, vars element ej innehålla x. Man kan alltså tolka täljaren som ett polynom i x, vars gradtal är högst $= (n-1)$, och vari koefficienterna äro matriser.

I matrisen $(E - xA)^{-1}$ är alltså det element, som står i j-te raden och k-te kolonnen, = en kvot mellan två polynom i x, d. v. s. det ifrågavarande elementet är en rationell funktion av x. Denna kan utvecklas i potensserie (MACLAURIN-serie), som är likformigt konvergent för $|x| <$ något visst tal. Vi skriva därför detta element $= c_{jk}^{(0)} + c_{jk}^{(1)} x + c_{jk}^{(2)} x^2 + \ldots$. Liknande gäller om samtliga element. Följaktligen kan matrisen $(E - xA)^{-1}$ skrivas:

$$(E - xA)^{-1} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots,$$

och denna oändliga serie är likformigt konvergent för $|x| <$ något visst tal (det minsta av de ovannämnda, för elementseriernas konvergens bestämmande talen). Men då måste

$$(E - xA)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots) = (E - xA)(E - xA)^{-1} = E,$$

alltså $$C_0 + (C_1 - AC_0)x + (C_2 - AC_1)x^2 + \ldots = E.$$

Då ju x är en variabel, måste följaktligen

$$C_0 = E;\ C_1 - AC_0 = 0;\ C_2 - AC_1 = 0;\ \ldots,$$

varur $$C_0 = E;\ C_1 = A;\ C_2 = A^2;\ \ldots;\ C_j = A^j;\ \ldots$$

och $$(E - xA)^{-1} = E + Ax + A^2x^2 + A^3x^3 + \ldots$$

framgår. Denna utveckling i serie efter potenser av Ax (NEUMANN-serie) överensstämmer som synes formellt med den välbekanta utvecklingen

$$\frac{1}{1 - ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots$$

Nu ha vi till vårt förfogande två uttryck för $(E - xA)^{-1}$. Av dessa följer, att

$$|E - xA| \cdot (E + Ax + A^2x^2 + \ldots) = (E - xA)',$$

som ju, enligt vad som ovan sades, är ett polynom i x med gradtal $\leqq (n-1)$. Vi sätta

$$|E - xA| = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

(där $c_0=1$, $c_n=(-1)^n|\mathrm{A}|$), och utföra därpå den i vänstra ledet tecknade multiplikationen. Resultatet skall ju bliva ett polynom med gradtal $\leqq(n-1)$. Därför måste sammanlagda koefficienten för x^n (liksom för högre potenser av x) bli $=0$. Denna koefficient är $=c_0\mathrm{A}^n+c_1\mathrm{A}^{n-1}+\ldots+c_{n-1}\mathrm{A}+c_n\mathrm{E}$, som alltså $=0$. Nu är (såsom läsaren själv lätt kan påvisa)

$$\varphi(\lambda)=|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|=(-1)^n(c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n).$$

Det funna resultatet är således, att

$$\varphi(\mathrm{A})=0.$$

Denna sats (CAYLEY-HAMILTONS sats), som i ord lyder så här: »Varje matris satisfierar sin egen karakteristiska ekvation», kallas ofta matriskalkylens huvudsats.

11. Om A är en given matris, fråga vi efter alla de ekvationer, som den satisfierar. Med »ekvation» mena vi hela tiden polynom, som satts lika med 0 och vars koefficienter äro *tal*. Det är klart, att om polynomet $f(\lambda)$ innehåller $\varphi(\lambda)$ som faktor, så är $f(\mathrm{A})=0$. Men detta är ej säkert den allmännaste ekvation, som A satisfierar. För att finna den måste vi först uppsöka den ekvation av lägsta möjliga gradtal, som satisfieras av A. Jämför nämligen med ekvationer, där den »obekanta» är ett tal: Ett givet tal a satisfierar alla de ekvationer $f(x)=0$, där $f(x)$ innehåller faktorn $(x-a)$, och satisfierar inga andra. Den ekvation av lägsta möjliga gradtal, som satisfieras av a, är ekvationen $x-a=0$. Vi se också, hur denna ekvation ligger till grund för lösandet av ekvationen $f(x)=0$.

Den ekvation av lägsta möjliga gradtal, som satisfieras av A, är i regel ej lineär, ty detta skulle betyda, att $\mathrm{A}-a\mathrm{E}=0$, alltså $\mathrm{A}=a\mathrm{E}$, vilket ju i allmänhet ej är fallet. Vi anta $\psi(\mathrm{A})=0$ vara den ekvation av lägsta möjliga gradtal, som satisfieras av A, den s. k. *minimalekvationen* till A. Explicit:

$$\psi(\lambda)=h_0\lambda^r+h_1\lambda^{r-1}+\ldots+h_r.$$

Vi kalla:

$$g(x)=h_0+h_1x+\ldots+h_rx^r.$$

Av NEUMANN-serien

$$(\mathrm{E}-x\mathrm{A})^{-1}=\mathrm{E}+\mathrm{A}x+\mathrm{A}^2x^2+\ldots$$

(som ju är likformigt konvergent inom lämpligt intervall) bilda vi genom direkt multiplicering, term för term, $g(x)\cdot(\mathrm{E}-x\mathrm{A})^{-1}$. Koefficienten för x^r blir då (som läsaren torde övertyga sig om)

$$h_0\mathrm{A}^r+h_1\mathrm{A}^{r-1}+\ldots+h_r\mathrm{E},\ \text{d. v. s.}=\psi(\mathrm{A}),\ \text{som ju}=0.$$

På samma sätt bli koefficienterna $= 0$ för alla högre potenser av x. Härav följer att

$$g(x)\cdot(\mathbf{E}-x\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{F}(x),$$

där $\mathbf{F}(x) =$ en matris, vars element äro polynom i x av gradtal $\leqq r-1$.

Nu är ju enligt mom. 10

$$(\mathbf{E}-x\mathbf{A})^{-1}=\frac{(\mathbf{E}-x\mathbf{A})'}{|\mathbf{E}-x\mathbf{A}|}.$$

Alltså måste $g(x)$ ingå som faktor i $|\mathbf{E}-x\mathbf{A}|$:

$$|\mathbf{E}-x\mathbf{A}| = g(x)\cdot D_{n-1}(x),$$

vars andra faktor, $D_{n-1}(x)$, i sin tur måste ingå som faktor i matrisen $(\mathbf{E}-x\mathbf{A})'$, d. v. s. i alla dennas element. Om bråket $\frac{(\mathbf{E}-x\mathbf{A})'}{|\mathbf{E}-x\mathbf{A}|}$ förkortas med $D_{n-1}(x)$, erhålles alltså $\frac{\mathbf{F}(x)}{g(x)}$. Detta bråk kan ej ytterligare förkortas, ty om så vore fallet, bleve $(\mathbf{E}-x\mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{F}'(x)}{g'(x)}$, där $g'(x)$ finge ett gradtal $r' < r$, och då kunde man på samma sätt som i mom. 10 visa, att $\mathbf{A}$ satisfierar en ekvation $\psi'(\mathbf{A}) = 0$, vars gradtal $= r'$. Detta strider mot förutsättningen beträffande $\psi(\lambda)$.

För att bestämma $\psi(\lambda)$, eller lika gärna $g(x)$, förfar man alltså på följande sätt: Bråket $\frac{(\mathbf{E}-x\mathbf{A})'}{|\mathbf{E}-x\mathbf{A}|}$ förkortas så långt som möjligt. Den därefter kvarstående nämnaren är just $g(x)$. Annorlunda uttryckt: $\psi(\lambda) =$ den kvot, som erhålles, då $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ divideras med största gemensamma faktorn till alla $(n-1)$-radiga minorer av $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$. Vi ha här kommit att snudda vid ett för studiet av matriser fundamentalt begrepp nämligen elementardelare. Det skulle föra för långt att ens definiera detta begrepp; därför må blott omnämnas, att $\psi(\lambda)$ utgör en produkt av vissa elementardelare av matrisen $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$. I övrigt hänvisas till litteraturförteckningen.

Om nu $\mathbf{A}$ satisfierar en ekvation $f(\mathbf{A}) = 0$, så måste $\psi(\lambda)$ vara faktor i $f(\lambda)$. Bevis: Enligt definitionen på ψ måste gradtalet av f vara $\geqq$ gradtalet av ψ. Men då kan man alltid finna (genom vanlig division) $q(\lambda)$ så, att $f(\lambda) = q(\lambda)\cdot\psi(\lambda) + r(\lambda)$, där $r(\lambda)$ antingen är identiskt $= 0$ eller också är ett polynom med gradtal lägre än gradtalet av ψ (häri innefattas även möjligheten $r = $ konstant $\neq 0$). Insättes $\mathbf{A}$, erhålles $f(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})\cdot\psi(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A})$, som gäller identiskt. Men $f(\mathbf{A}) = 0$ och $\psi(\mathbf{A}) = 0$, alltså är $r(\mathbf{A}) = 0$. Men eftersom $\mathbf{A}$ ej kan satisfiera någon ekvation av lägre gradtal än $\psi(\lambda)$, så måste r vara identiskt $= 0$. Alltså är $f(\lambda) = q(\lambda)\cdot\psi(\lambda)$,

v. s. b. Även för en matris gäller alltså, att minimalekvationen måste ingå som faktor i varje ekvation, som matrisen satisfierar.

För att kunna lösa matrisekvationer måste man vara i stånd till att angiva den allmännaste matris, som har en given ekvation till minimalekvation. Vi anföra resultatet: Den allmännaste matris A, som har minimalekvationen $\psi(\lambda) = 0$, där

$$\psi(\lambda) = \lambda^{\nu_0}(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ äro skilda från varandra och från noll, $\nu_0 \geqq 0$, och var och en av $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ är $\geqq 1$), kan jämte sina potenser, A^j, uttryckas genom:

$$A^j = N^j + S_1^j \lambda_1^j + S_2^j \lambda_2^j + \dots + S_s^j \lambda_s^j \qquad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

där matriserna N och S_i uppfylla följande villkor men i övrigt äro arbiträra:

1. N är en nilpotent matris: $N^{\nu_0} = 0$, medan $N^{\nu_0 - 1} \neq 0$. Om $\nu_0 = 0$ eller 1, skall emellertid $N = 0$.

2. Varje S_i uppfyller relationerna: $S_i(S_i - E)^{\nu_i} = 0$, medan $S_i(S_i - E)^{\nu_i - 1} \neq 0$.

3. $NS_i = S_iN = 0$ och $S_iS_k = 0$ $\quad (i, k = 1, 2, \dots, s;\ i \neq k)$.

Matriserna S_i kunna stundom uppdelas ytterligare i summor av liknande matriser: $S_i = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{i,\,\sigma_i}$, så att $S_{ik}\,S_{il} = 0$ för $k \neq l$, medan vidare varje S_{ik} uppfyller relationer av typen $S(S - E)^{\nu} = 0$, $S(S - E)^{\nu - 1} \neq 0$.

En antydan om hur detta kan användas inom kvantummekaniken: De transformationer, som äro tillåtliga för ett visst strålningssystem, kunna representeras av matriser, A. Dessa kunna uppdelas liksom A^j härovan. I den mån de uppträdande matriserna S_i ytterligare kunna uppdelas, så som nyss angavs, kan man avgöra, om spektrallinjerna vid en s. k. störning (yttre magnetiskt eller elektriskt fält) komma att uppdela sig (ZEEMAN- och STARK-effekt). —

För att visa en annan typ av problem, som framkommer inom kvantummekaniken, meddela vi slutligen följande ekvationssystem (DIRAC): Sök fyra matriser, A_1, A_2, A_3, A_4, som satisfiera ekvationerna:

$$A_j^2 = E \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$
$$A_jA_k = - A_kA_j \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4;\ j \neq k).$$

På lösningen av detta problem kunna vi ej ingå. I stället hänvisas läsaren, om denne nu känner sig föranlåten att närmare studera matriser, till den litteratur, som angavs i början av denna uppsats.

Atomomvandlingar.

En överblick.[1]

Av EVA RAMSTEDT.

Tanken att kunna åstadkomma en atomomvandling d. v. s. att överföra ett grundämne till ett annat, kan väl sägas vara lika gammal som kemien, fastän möjligheten att realisera en ämnestransmutation tett sig olika allt efter de vid skilda epoker vunna forskningsresultaten. Så blev under 1800-talet den övertygelsen allt mer befästad, att grundämnena voro stabila och oföränderliga. Satserna om energiens oförstörbarhet och atomernas oförstörbarhet betraktades var för sig som fast grundade.

Den första bräschen i denna säkra tankebyggnad slogs genom upptäckten av de radioaktiva ämnena, vars atomer visade sig kunna genomlöpa hela serier av omvandlingar för att till sist övergå till stabila blyarter. Samtidigt utslungades verkliga små massdelar av atomerna i form av positivt laddade heliumatomer, α-partiklar, eller elektroner, β-partiklar, ofta åtföljda av elektromagnetisk strålning, γ-strålar. Orsaken till denna djupgående förändring måste ligga i de radioaktiva elementens egna atomer, ty omvandlingen skedde fullt spontant. Med inga medel var det möjligt att förhindra eller framkalla en sönderdelning, ej ens att på något sätt ändra den hastighet med vilken den ägde rum. Icke heller lyckades man påvisa några omvandlingar hos eljest stabila ämnen genom att utsätta dem för bombardemang av α-partiklar.

Det var först sedan man kommit så långt i försökstekniken, att man kunde iakttaga individuella atomers verkan, som det blev uppenbart, hur några få partiklar kunde förhålla sig på helt annat sätt än det stora flertalet. Enstaka laddade partiklars verkan kunna påvisas med scintillationer och på elektrisk väg t. ex. med GEIGERS spetskammare, GEIGER-MÜLLERS räknerör m. fl. metoder.[2] Mest åskådlig är emellertid den sinnrika metod, som utarbetats av C. T. R. WILSON och under årens lopp utvecklats till märklig fulländning. Principen är den att genom expansion inom bestämda gränser av fuktighetsmättad luft åstadkomma dimbildning på närvarande joner. Då dessa ligga i de strålars väg, som just passerat genom luften, kan man vid lämplig belysning iakttaga hela partikelbanorna. I Elementa 22, 213, 1939 beskrives en synnerligen fördelaktig demonstrationsanordning av en Wilsons dimkammare med projektion. Vad man där skönjer under ett ögonblick vid expansionen, kan samtidigt avfotograferas och sedan i detalj studeras. Vid upprepade tillfällen har i denna tidskrift sådana fotografier avbildats. Bild 1 a visar en dylik, där α-partiklar gått fram i syrgas; α-partiklarna tränga genom flera tiotusental av atomer utan att ändra riktning, blott i utomordentligt sällsynta fall inträffar en så kraftig kollision med en atom att α-partikeln böjer tvärt av,

---

[1] I huvudsak efter ett föredrag i Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

[2] Jfr Elementa *10*, 101, 1926; *19*, 104, 1936 och *20*, 113, 1937.

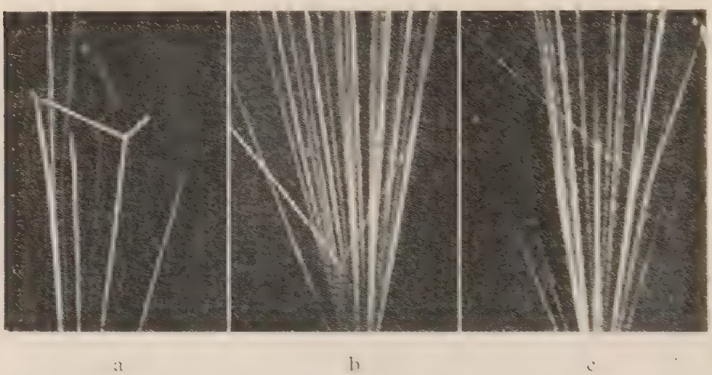


Fig. 1. Elastiska stötar mellan α-partiklar och a) en syrekärna, b) en heliumkärna, c) en vätekärna (Blackett).

varvid även den påstötta atomen kastas åt sidan. Då den senares massa i detta fall är fyra gånger större än α-partikelns, är avböjningsvinkeln mindre och banspåret kortare. Det är endast när α-partikeln kommer i omedelbar närhet av kärnans starka laddning, som den kraftigt stötes åt sidan. Bilderna 1 b och 1 c åskådliggöra dylika kärnträffar i helium, resp. väte. På den förra äro de sammanstötande kärnorna identiska, vilket också framgår av symmetrin i strålbanorna. I den senare bildar den påstötta vätekärnan den långa fina strålbanan med mindre jonantal och större avböjningsvinkel än α-partikeln. Undersökningar visa, att i alla dessa fall de vanliga lagarna för elastisk stöt kunna tillämpas.

Det var studiet av α-partiklarnas stötar mot olika ämnen, som lag till grund för den av Rutherford år 1911 uppställda atommodellen, vilken sedan matematiskt utformats av Niels Bohr. Den utgick ifrån att så gott som hela atomens massa är koncentrerad till en kärna av minimala dimensioner (diam $= 10^{-12} - 10^{-13}$ cm), som även är bärare av atomens positiva laddning. Runt kring kärnan kretsa elektroner i olika banor och på relativt stora avstånd (de yttersta på c:a 10^{-8} cm), till ett antal lika stort som kärnans positiva laddning. Elektronernas antal och placering på olika energinivåer bestämmer grundämnenas egenskaper. Den enklaste atomen är väteatomen, vars kärna, protonen, endast har en positiv laddning och omkretsas av en elektron, heliumkärnan har två laddningar och är identisk med α-partikeln. Kärnladdningen ökas sedan med en enhet för varje steg man går fram i det periodiska systemet.

Söndersprängning av atomkärnor.

År 1919 gjorde Rutherford den märkliga iakttagelsen, att då α-partiklar trängde genom kvävgas, det någon gång kunde inträffa, vilket fig. 2 ger prov på, att vid kollision med en kvävekärna ur denna sköts ut en proton, det fina spåret som liknar protonspåret i fig. 1 c. Av α-partikeln själv synes efter stöten intet, den har lagrats till återstoden av kvävekärnan och rekylerar med denna, därav det grova korta banspåret. Reaktionen kan tecknas med formeln[1]:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H}\,.$$

Vid anlagringen bildas en tyngre isotop till vanligt syre, som man då ej kände, men senare påvisat. Fenomenet är så sällsynt att på 23 000 av Blackett tagna fotografier av 415 000 strålbanor blott 8 visade utstötning av protoner. Någon möjlighet att på detta sätt erhålla ämnen i kemiskt mätbara mängder finnes ju ej, men det var första gången som man *utifrån åstadkommit omvandlingar i atomers kärnor,* således med konst framkallat en grundämnesförvandling.

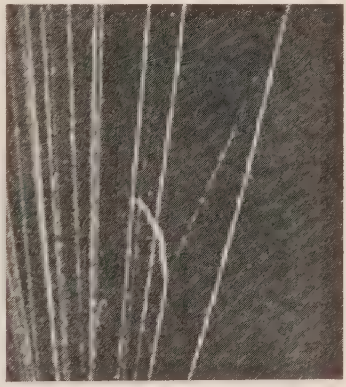


Fig. 2. Oelastisk stöt med en α-partikel förorsakar omvandling av en kvävekärna, varvid en proton utslungas (Blackett).

---

[1] Indexsiffrorna ange, den övre den till ett helt tal avrundade atomvikten (då syrets atomvikt $= 16{,}000$). Den kallas stundom masstal, den undre antalet elementarladdningar på kärnan, alltså atomnumret i det periodiska systemet.

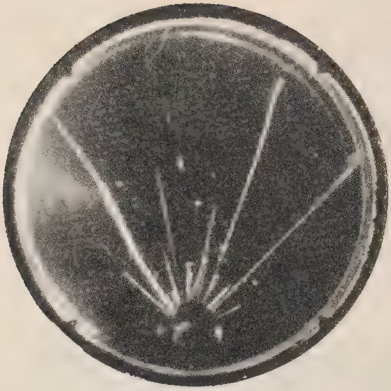


Fig. 3. Protongrupper utskjutna ur aluminium vid bombardemang med α-partiklar (Meitner).

Av talrika under 1920-talet gjorda beskjutningsförsök med α-partiklar framgick, att protoner kunde slås ut ur en hel del lätta ämnens kärnor. Fig. 3 visar, hur t. ex. aluminium emitterar protoner av olika räckvidder. Ett sådant förhållande gav stöd åt hypotesen, att alla elements kärnor ytterst voro uppbyggda av vätekärnor. Då emellertid atomviktstalet för alla ämnen utom väte är större än kärnladdningen, antogs, att elektroner även inginge i kärnan och där neutraliserade en del protoners laddning.

Vid alla påvisade fall av protonutsändning var emellertid antalet stötar, som ledde till dylik effekt utomordentligt litet, detta trots att α-partiklarnas energi uppgick till 8—4 miljoner elektronvolt. Med en elektronvolt (eV) menas den energi som en elektron erhåller, då den genomlöper ett spänningsfall på en volt. Till detta ringa utbyte har Gamow givit följande förklaring: På grund av kärnans positiva laddning har den en starkt repellerande verkan på en α-partikel, som kommer i dess närhet. Den elektriska potentialen kring kärnan är på relativt stora avstånd omvänt proportionell mot avståndet från kärnans centrum, såsom Coulombs repulsionslag anger. Men innanför en viss radie, ofta benämnd

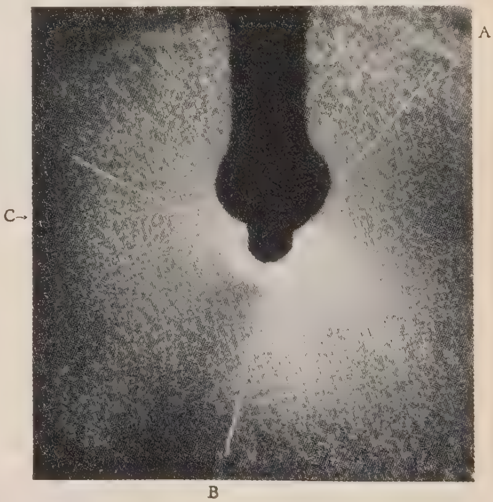


Fig. 4. Accelererade protoner sönderslå bor i 3 α-partiklar (Dee o. Gilbert).

kärnradien, börja attraktionskrafter från kärnans beståndsdelar att göra sig gällande, potentialen avtar hastigt och den projektil, som lyckats komma över det högsta potentialvärdet dras in i kärnan och kvarstannar där. Ju större kärnans laddning är, desto större värde har denna s. k. potentialbarriär. För att övervinna den fordras en central kärnträff och hög energi hos den påstötande partikeln. Enligt klassisk uppfattning skulle därför inga projektiler med lägre energiinnehåll än den som svarar mot potentialbarriären, kunna intränga i kärnan. Vågmekaniken lär emellertid, att det är möjligt även för energifattigare partiklar att komma över barriären, blott att sannolikheten för att det skall lyckas hastigt minskar, då partiklarnas energi avtar. En närmare redogörelse för dessa förhållanden har nyligen lämnats i en artikel i Elementa *23*, 215, 1940.

Med denna utgångspunkt började man tänka på möjligheten att skaffa sig projektiler, som även om de ej hade lika stor energi som α-partiklarna, kunde erhållas i så mycket större mängder. Så igångsattes försök med positiva joner i form av kanalstrålar i urladdningsrör, och för att ge dem tillräcklig energi accelererades de i starka elektriska högspänningsfält. Det skulle föra för långt att här redogöra för den därvid använda apparaturen. Nämnas må endast den av E. O. Lawrence konstruerade cyclotronen. För att kärnans repellerande verkan skulle hållas så låg som möjligt använde man som projektiler mest de envärda vätejonerna.

Redan 1932 kröntes de gjorda försöken med framgång. Cockcroft och Walton bombarderade vid Cavendishlaboratoriet i Cambridge bl. a. litium och bor med protoner, accelererade i fält på flera hundra tusen volt, och påvisade talrika söndersprängningar i enlighet med formlerna:

$${}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 3\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad \text{och} \quad {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Protonen lagrar sig till kärnan och förorsakar en sönderbrytning i heliumkärnor, d. v. s. α-partiklar, som utslungas.

Dessa äro de första på *rent artificiell väg utförda atomsprängningarna.* Vackrast framstå de på upptagna wilsonfotografier, se fig. 4, där en borkärna söndersprängts av accelererade protoner i tre α-partiklar, som utslungats i olika riktningar, vilka anges av bokstäverna A, B och C, den sista gående något bakåt och knappast skönjbar på bilden, det vänstra synliga spåret härrör från en annan atom. Ännu mer effektiv som atomsprängningsprojektil visade sig den kort förut av Urey upptäckta tunga väteisotopen, *deutonen* eller *deuteronen,* vara. Fig. 5 demonstrerar deutonprojektilers verkan på litium, varvid ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ bringas att explodera.

De här parvis utkastade α-partiklarna äro utomordentligt energirika, de längsta ha en räckvidd på 13,4 cm; vid bombardering med protoner ha uppmätts räckvidder på 8,4 cm, vilket även detta är större än för naturliga α-partiklar. Intressanta resultat ha också erhållits vid beskjutningsförsök med deutonprojektiler på deutoner, varvid man påvisat uppkomsten av väte- och heliumisotoperna ${}^{3}_{1}H$ och ${}^{3}_{2}He$ (se därom N. RYDE, Elementa, *23*, 218, 1940).

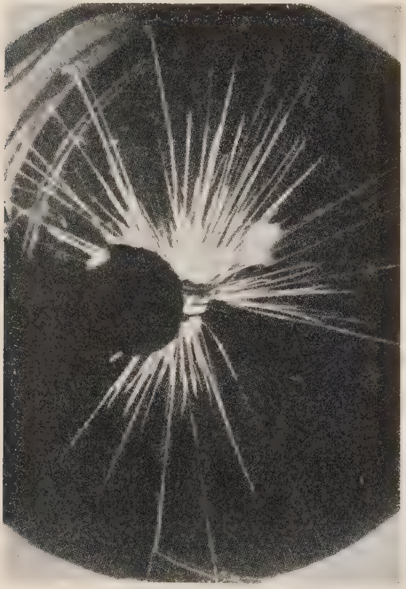


Fig. 5. Accelererade deutoner sönderslå litium i 2 α-partiklar (DEE o. WALTON).

Särskilt att lägga märke till vid dylika processer är, att de utslungade kärnornas energi är ofantligt mycket större än de bombarderande partiklarnas. Det är tydligt att vid reaktionen stora mängder energi utlösas. En noggrann jämförelse mellan massorna hos de reagerande kärnorna t. ex. vid den nyss relaterade reaktionen mellan litium och proton, ger på vänster sida $7{,}0180 + 1{,}0081 = 8{,}0261$ och på höger sida för de bildade två heliumatomerna $2 \times 4{,}0039 = 8{,}0078$, d. v. s. reaktionen medför en minskning i massa på 0,0183 atomviktsenheter.

Man står alltså inför det faktum, att varken lagen om energiens konstans eller massans konstans tagna var för sig är gällande i detta fall. Men om man tillämpar den av EINSTEIN enligt relativiteisteorien uppställda relationen mellan energi (E) och massa (m), nämligen $E = mc^2$, där c är ljusets hastighet, skulle mot en massändring av en atomviktsenhet svara 931 miljoner elektronvolt (MeV). Den ovan funna massdefekten motsvarar 17,0 MeV, medan α-partiklarnas ur räckvidden beräknade energi ger 17,1 MeV. Detta bekräftar på ett slående sätt den Einsteinska lagen om energiens och massans ekvivalens. Det karakteristiska för kärnreaktionerna är således för det första, att de äro förenade med omsättning av energimängder, som äro miljoner gånger så stora som vid vanliga kemiska processer, för det andra att för dem lagarna om massa och energi måste sammanföras till en. Denna kan uttryckas så, att *summan av massa och energi, uttryckta i ekvivalenta enheter, förblir vid en kärnreaktion konstant.*

Nya elementarpartiklar.

År 1932 gjordes två upptäckter av största betydelse för atomomvandlingarnas problem. De ha redan utförligt behandlats i denna tidskrift (årg. *17*, 77 och 153, 1934) och omnämnas därför här mera i korthet.

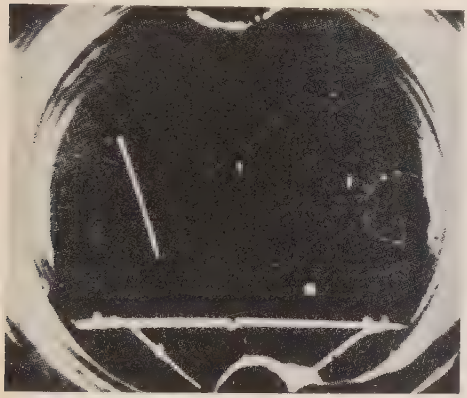


Fig. 6. Protonstråle utlöst genom stöt från en neutron (Curie-Joliot).

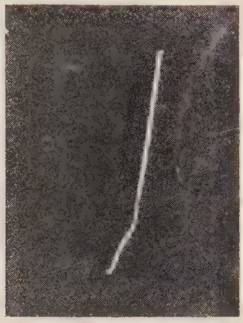


Fig. 7. En neutronstöt omvandlar en kvävekärna, varvid en α-partikel, det långa spåret, utskjutes (Feather).

När bor och beryllium bombarderades med α-partiklar, uppträdde en mycket genomträngande strålning, som ej förorsakade jonisation. Den tolkades först som en γ-strålning, men visade vid närmare undersökning mycket kraftigare verkningar än som kunde tillskrivas en sådan. Vid genomgång t. ex. av paraffin, vatten och andra vätehaltiga substanser utlöste den snabba protoner. Fig. 6 visar en wilsonupptagning, där dimkammaren genomkorsats av dylika strålar. Plötsligt uppträder en strålbana, som synes härröra från en i fart satt proton. Denna kan knappast tänkas uppkomma på annat sätt än genom kollision med en masspartikel. Även tyngre atomkärnor kunde sättas i rörelse medelst denna strålning. Någon gång har t. o. m. en sprängning av en kväveatom iakttagits. Fig. 7 visar två partikelbanor med gemensam utgångspunkt, den längre härrör från en bortsprängd α-partikel, den kortare från den resterande atomkärnan. Med stöd av experimenten gav Chadwick den förklaringen, att strålningen berodde på utskjutna partiklar av i det närmaste protonens massa, men utan elektrisk laddning. Dessa kallades *neutroner* och deras existens hade redan flera år tidigare förutsagts av Rutherford. Händelseförloppet vid neutronernas uppkomst belyses av formlerna:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{0}\mathrm{n}$$
$$^{11}_{5}\mathrm{B} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Ett flertal beräkningar av neutronens massa ha utförts med något växlande resultat. Ett antagligt värde är 1,009, alltså något högre än protonens.

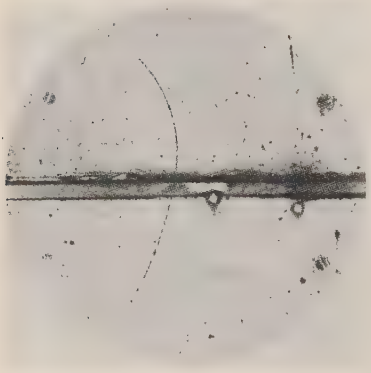


Fig. 8. En positron passerar en blyplatta i ett magnetfält (Anderson).

Då det sålunda direkt påvisats, att man ur atomkärnor kunde utskjuta såväl protoner som neutroner, låg det nära till hands att anta, att båda dessa partikelslag utgjorde elementära byggnadsstenar i grundämnenas kärnor. Dessa skulle då vara sammansatta av så många protoner, som svarade mot kärnladdningen d. v. s. atomnumret och dessutom av ett så stort antal neutroner, att partiklarnas sammanlagda vikt blev lika med atomvikten. Till följd härav skulle den tunga väteisotopens kärna bestå av 1 proton och 1 neutron, heliumkärnan av 2 protoner och 2 neutroner, litiums båda isotoper av 3 protoner och resp. 3 och 4 neutroner o. s. v. till uran med 92 protoner och i vanligaste fall 146 neutroner. Härmed slapp man ifrån det tidigare gjorda antagandet, att elektroner som självständiga individer inginge i kärnan, vilket ur teoretisk synpunkt alltid vållat svårigheter.

Enligt Bohr och andra forskare uppfattas nu kärnan som ett konglomerat av tätt sammanpackade protoner och neutroner. Protonerna enbart skulle stöta bort varandra, men sammanhållning uppnås genom stark attraktion mellan neutroner och protoner. Om en projektil lyckas komma inom kärnbarriären, antas att den omedelbart sammansmälter med kärnan och ger den sin energi. Under ett ögonblick existerar en kärna sammansatt av den ursprungliga och den inträngande partikeln. Så skulle vid det sid. 3 omtalade utslåendet av protoner med α-partiklar intermediärt bildas $^{18}_{9}\mathrm{Fl}$, d. v. s. en fluorisotop. Denna befinner sig i ett exciterat tillstånd, då den innehåller större energi än den för kärnan vanliga. Bohr tänker sig att detta överskott på energi fördelar sig mellan de tätt sammanpackade partiklarna ungefär på samma sätt som energifördelningen sker vid den termiska rörelsen, t. ex. bland molekylerna i en vattendroppe. Liksom en enstaka vattenmolekyl vid droppens yta kan få så stor rörelseenergi, att den genom ångbildning ger sig iväg, skulle på liknande sätt tillfälligtvis så mycket energi kunna koncentreras på en partikel i kärnan att den slungas ut. Denna projektil kan då vara en proton, en neutron eller ett system av dessa, t. ex. en α-partikel. Vid omlagringsprocesserna i kärnan kan också överflödig energi bortgå i form av elektromagnetisk strålning, γ-strålar.

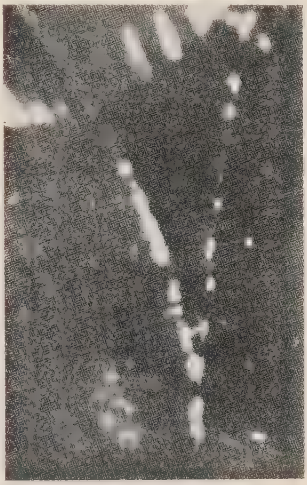


Fig. 9. Elektron-positronpar utlöst av γ-strålning (Curie-Joliot).

Den andra upptäckten märkesåret 1932 gjordes av svenskamerikanen C. D. Anderson i Pasadena vid undersökning av den kosmiska strålningen, som vid genomgång av materia utlöser elektronstrålar. Då strålningen fick tränga igenom en dimkammare insatt i ett magnetfält, iakttogs stundom banspår, som till utseendet liknade elektronernas, men avböjdes åt motsatt håll mot dessa. De såg ut att härröra från positivt laddade elektroner s. k. *positroner*. Fig. 8 visar en sådan böjd positronstråle, som intränger nedifrån, passerar ett 6 mm tjockt blyskikt, varigenom dess hastighet minskar och till följd därav avböjningen ökar.

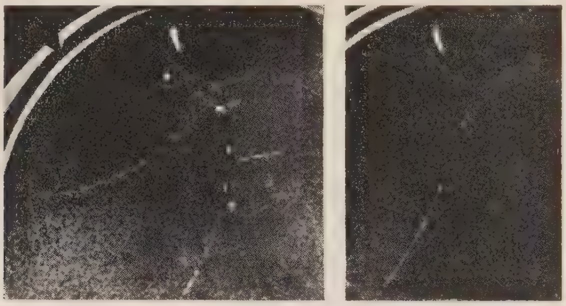
Sedermera visades, att positronstrålar även kunde alstras, då mycket genomträngande γ-strålar med en energikvantitet på minst 1,1 MeV träffade en tung atomkärna. Detta framgår av vidstående av Irène Curie och F. Joliot tagna bild, fig. 9. Från en atom har utsänts ett strålpar bestående av en elektron och en positron, vilket kan tolkas som, att ett ljuskvantum, en foton, 'materialiserats' till en elektron och en positron. Motsatsen har också påvisats, nämligen att en positron och en elektron förenat sig under bildning av en foton, en 'dematerialisation'.

Med konst framställda radioaktiva ämnen.

Vid bestrålning av olika ämnen med α-partiklar från polonium iakttog forskarparet Curie-Joliot utom utsändning av neutroner stundom även en emittering av positroner. Därvid lade de, i början av år 1934, särskilt märke till, att positronbildningen uppträdde först några minuter efter α-bestrålningens början, men fortfor en stund, sedan strålkällan borttagits. Därefter avtog den enligt en exponentiallag på samma sätt som aktiviteten minskar hos de naturliga radioaktiva elementen. Reaktionen vid bestrålning av t. ex. aluminium antogs försiggå i följande två etapper[1]:

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P}^* + ^{1}_{0}\mathrm{n}; \qquad ^{30}_{15}\mathrm{P}^* \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + ^{0}_{+1}\mathrm{e}.$$

Vid anlagring av α-partikeln bildas med emission av en neutron en fosforisotop, *radiofosfor,* med atomvikt 30 (vanligt fosfor 31).



a b

Fig. 10. Emission av positroner från aluminium a) 5 sek., b) 9 min. efter att bombardering med α-partiklar upphört (Meitner).

Denna är instabil och omvandlas till en stabil kiselatom, varvid en positron utsändes. Halveringstiden bestämdes till 3,15 min. Här stod man alltså inför det faktum att ha *med konst framställt ett nytt radioaktivt ämne.* Vidstående bild visar positroner, som emitterats från bestrålat aluminium, fig. 10 a 5 sek. och fig. 10 b 9 min. efter det att α-partikelbombardemanget upphört.

Även för andra ämnen påvisade Joliots liknande reaktioner. Så gåvo bor, kväve och fluor resp. $^{13}_{7}\mathrm{N}^*$, radiokväve, $^{17}_{9}\mathrm{F}^*$, radiofluor och $^{22}_{11}\mathrm{Na}^*$, radionatrium, alla aktiva isotoper som äro lättare än motsvarande stabila ämnen. Men även tyngre isotoper erhöllos, varvid i stället elektroner emitterades t. ex.[2]

---

[1] * betecknar, att atomen är instabil.

[2] Utförligare redogörelse för intill början av 1935 framställda radioaktiva ämnen, se O. Lundquist, Elementa *18*, 95, 1935.

$$^{25}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{28}_{13}\mathrm{Al}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}; \qquad {}^{28}_{13}\mathrm{Al}^* \rightarrow {}^{28}_{14}\mathrm{Si} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}.$$

Den starka repellerande verkan, som atomkärnorna utöva på α-partiklarna, gör emellertid att dessa knappast äro idealiska sprängningsprojektiler. För tyngre ämnen med högre kärnladdning äro α-partiklarna till och med fullständigt ineffektiva. Utgående från att neutrala partiklar borde utan hinder av potentialbarriären kunna tränga in i kärnan, prövade först italienaren Fermi år 1934 beskjutning med neutroner och fann, att dessa voro förträffliga atomomvandlare och detta även för de tyngsta atomkärnorna. Som neutronkälla använde han i allmänhet beryllium, blandat med ett radiumpreparat, ofta radon. Exempel på en sådan reaktion är

$$^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{32}_{15}\mathrm{P}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}; \qquad {}^{32}_{15}\mathrm{P}^* \rightarrow {}^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e},$$

där alltså svavel under protonutsändning övergår till en aktiv fosforisotop, som i detta fall är tyngre än vanlig fosfor och har en halveringstid på 14 dagar. Vid dess sönderfall återbildas de ursprungliga svavelkärnorna under emission av elektroner. Överensstämmelsen med naturliga β-strålande substanser är här fullständig.

Den förmåga att tränga genom materia, som neutronerna ha, är fantastiskt stor (jfr sid. 7). De kunna passera flera km luft och blystycken av 10—20 cm:s tjocklek, medan protoner, som ha samma massa, hejdas redan av $^1/_3$ mm bly. Detta har sin grund i att neutronerna varken påverkas av elektroners eller kärnors laddning, ej heller förlorar energi i form av joniseringsarbete. Det som däremot minskar deras energi är direkt sammanstöt med atomkärnor i synnerhet de lätta vätekärnorna. Vid fullträff med en proton upptar den senare hälften av neutronens energi. Få därför neutroner passera lager av paraffin, vatten eller andra vätehaltiga substanser, nedsättes deras hastighet. Äro dessa lager tillräckligt tjocka, kan neutronernas hastighet nedgå ända till den som motsvarar den termiska rörelsen, man talar om 'termiska' neutroner.

Det egendomliga är, att långsamma neutroner ofta äro särskilt effektiva som atomomvandlare. I så fall lagra de sig direkt till de påstötta atomkärnorna och bilda utan någon korpuskulär strålning en tyngre isotop av samma grundämne. Denna kan vara antingen stabil eller radioaktiv. I förra fallet åtföljes sammansmältningen vanligen av en γ-strålning, vars energi motsvarar bindningsenergien mellan neutronen och den ursprungliga kärnan. En del ämnen ha en verklig selektiv absorption för neutroner av en bestämd låg energi, vilket kan tolkas som en resonans mellan kärnans konstanter och neutronens energi. Så absorberas 'termiska' neutroner fullständigt av kadmium och bor, under det att andra ämnen genomsläppa dem. För att skydda sig för neutroner använder man därför först cisterner med vatten eller paraffinblock, som nedsätter hastigheten till den termiska, och därefter lager av kadmium eller borsyra.

Som alstrare av instabila atomarter har man utom α-partiklar och neutroner även använt accelererade protoner och deutoner, de senare särskilt verksamma, någon gång också γ-strålar. På grund av alla dessa olika projektilslag, vars hastighet även varieras, kan beskjutning av ett och samma ämne ge upphov till ett flertal olika reaktioner. Som exempel må här anföras:

$$\left.\begin{array}{rl}{}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow & {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\\ \text{eller} \longmapsto & {}^{30}_{15}\mathrm{P}^* + {}^{1}_{0}\mathrm{n}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{rl}{}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow & {}^{28}_{13}\mathrm{Al}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\\ \text{eller} \longmapsto & {}^{25}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\end{array}\right\},$$

$${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longmapsto {}^{28}_{14}\mathrm{Si}$$

$$\begin{array}{rl}{}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longmapsto & \left.\begin{array}{l}{}^{24}_{11}\mathrm{Na}^* + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\\ {}^{27}_{12}\mathrm{Mg}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\end{array}\right\} \text{med hastiga neutroner,}\\ \text{eller} \longmapsto & \\ \text{eller} \longmapsto & {}^{28}_{13}\mathrm{Al}^* \;\} \text{ med långsamma neutroner.}\end{array}$$

Så stora äro möjligheterna till beskjutningsvariationer och så intensivt ha olika forskare bedrivit arbetet inom detta område, att man på sex år utfört över 700 kärnomvandlingsprocesser och framställt över 300 nya radioaktiva ämnen. Och alla låta de sig inordna i det periodiska systemet, däribland några på atomnummer 43, där man förut ej känt något stabilt ämne. Alla stabila ämnen, utom väte, ha radioaktiva isotoper. Iakttagna halveringstider växla mellan delar av sekunder och flera år.

En fråga av stort intresse i detta sammanhang är, vilka av alla möjliga kombinationer mellan protoner och neutroner, som kunna existera. I diagrammet (fig. 11) ha observerade ämnesisotoper upp till atomnummer 20 införts, så att antalet i kärnorna ingående protoner avsatts som abskissa och antalet neutroner som ordinata. De stabila ämnena äro markerade som punkter, de instabila tecknade med — eller +, allt efter som de vid sin förvandling avge negativa eller positiva elektroner. Isotopa ämnen ligga rakt över varandra.

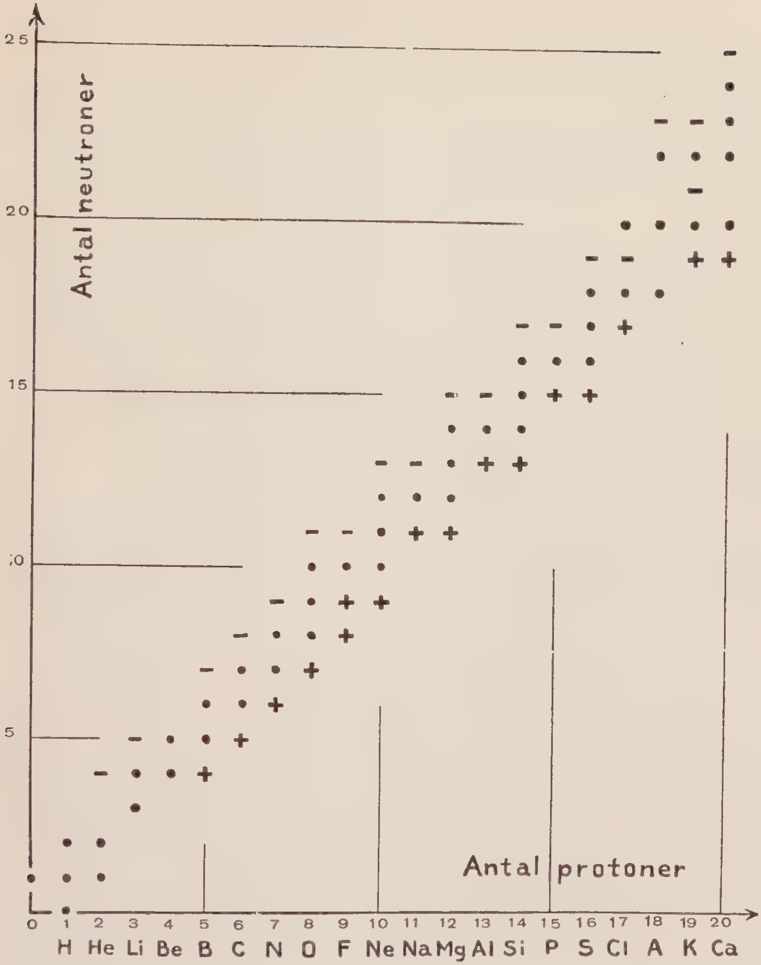


Fig. 11.

Man ser hur punkterna gruppera sig inom ganska snäva gränser omkring en linje, som bildar 45° med axlarna. På båda sidor om de stabila elementen ligga ämnen med högre eller lägre neutrontal, som äro instabila. Vid överskott på neutroner, alltså hos ämnen vid systemets övre kant, sträva kärnorna att befria sig från överskottet, antingen genom att direkt utsända en neutron eller genom en omlagring inom kärnan av en neutron till en proton, varvid en elektron utlöses (se nedanstående formel) och kärnans laddning ökas med en enhet.

$$ {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{1}H + {}_{-1}^{0}e \, . $$

Vid den undre kanten, där neutronantalet är mindre än det normala, inträder motsatt omvandling med emission av en positron, följd av motsvarande minskning av kärnladdningen:

$$ {}_{1}^{1}H \rightarrow {}_{0}^{1}n + {}_{+1}^{0}e \, . $$

Sådan utlösning av positiva och negativa elektroner vid de radioaktiva kärnprocesserna uppfattas numera, liksom emissionen av ljuskvanta, såsom ett skapande av resp. partiklar vid omlagringsprocesserna i kärnan och ej, vilket redan förut framhållits, så att de tidigare existerat i kärnan. För att förklara giltigheten av energi- och impulslagarna vid omvandlingar med β-strålar har man tvingats anta, att även en neutral partikel av minimal massa utsändes, en s. k. *neutrino*. Dess existens har dock ännu ej blivit med säkerhet experimentellt påvisad.

För ämnen av högre atomnummer är ofta antalet både stabila och instabila isotoper större, dock att vid udda atomnummer antalet stabila isotoper ej överstiger två. Med tilltagande atomvikt ökar emellertid proportionen av neutroner, som äro nödvändiga för att sammanhålla kärnorna. Förhållandet mellan antalet neutroner och protoner stiger från 1 hos de lättare elementen till 1,6 för de tyngsta. En fortsättning av diagrammet i fig. 11 skulle visa en bestämd böjning uppåt.

Man har också lyckats att kemiskt bekräfta existensen av många av dessa instabila ämnen genom att med den bestrålade substansen företa kemiska operationer, såsom lösningar, fällningar o. s. v. Med tillhjälp av strålningen har man sedan kunnat iaktta med vilka av de vanliga ämnena de radioaktiva följa och alltså överensstämma med i egenskaper.

I en dylik medryckning ligger också möjligheten att använda de konstgjorda radioelementen som *indikatorer* för närvaro av motsvarande stabila isotoper, en metod, som särskilt utvecklats i Danmark av G. von Hevesy och som bör kunna bli av utomordentligt stor betydelse för särskilt den kemiska och biologiska forskningen. Om man blandar ett stabilt ämne med någon dess radioaktiva isotop med ej allt för kort livslängd, bli de förras atomer liksom märkta av de strålningsgivande, och möjlighet ges att observera hur de byta plats med andra atomer av samma eller olika slag t. ex. vid diffusion, (det har visats hur smält bly diffunderar bland egna atomer) mellan ett salt och dess mättade lösning, vid olika kemiska processer.

Av speciellt intresse äro undersökningar som utförts på omsättningen av vissa ämnen inom växt- och djurvärlden. Man ger t. ex. ett försöksdjur ett preparat av fosfor, tillsatt med något radiofosfor av halveringstiden 14 dagar. Efter en tid dödas djuret och vid verkställd dissektion kan man genom strålningen få reda på hur fosforn fördelat sig i djurets olika organ, benstommen eller eventuellt lämnat kroppen.

Ett ämne bland de konstgjorda radioelementen, som tilldragit sig särskild uppmärksamhet är *radionatrium*, som kan erhållas på flera sätt bl. a. medelst beskjutning av aluminium med neutroner (se sid. 12). Självt sönderfaller det med en halveringstid av 15 timmar enligt reaktionen

$$ {}^{24}_{11}\mathrm{Na}^* \longmapsto {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \gamma, $$

d. v. s. det utsänder såväl elektroner som γ-strålar. Dessa senare äro lika genomträngande som γ-strålarna från radium, varför tanken på att kunna använda radionatrium i terapien som ersättare för radium uppkommit. I hög grad sammanhänger det med möjligheten att kunna erhålla radionatrium i tillräckliga mängder. Emellertid synes detta icke uteslutet med hänsyn till den oerhörda effekt, som uppnåtts med de på senaste åren uppbyggda cyklotronerna. De beräknas kunna leverera $10^{14} - 10^{15}$ deutonprojektiler med energiinnehåll på ända till 16 MeV, i enstaka fall ännu högre. Detta motsvarar i antal utslungade partiklar kilovis av radium och energien går upp till det dubbla av de snabbaste α-partiklarnas. Om man därmed bombarderar beryllium, erhålles en synnerligen kraftig neutronutveckling, ända till $2 \cdot 10^{12}$ neutroner per sek.

Med användning av sådana partikelströmmar har man på en gång lyckats erhålla så mycket radionatrium att det i strålningshänseende motsvarar ett gram radium, således ett särdeles starkt preparat. Men en stor olägenhet kvarstår, nämligen att radionatrium så snabbt förvandlas, en vecka efter framställningen finns intet kvar. Å andra sidan kan just den omständigheten, att radionatriums verkan varar blott en kort tid, bli till fördel, om det gäller att införa själva ämnet i kroppen genom intagning eller injektioner. Vid sitt sönderfall övergår det också till det för kroppen oskadliga ämnet magnesium. Antagligen föreligga inom detta område mycket stora utvecklingsmöjligheter. Därtill ha försök gjorts att direkt använda neutronströmmar i terapeutiskt syfte, varvid de visat sig ha starkare verkan än röntgen- och γ-strålar. Emellertid är det så många omständigheter, som här spela in, att det ännu är omöjligt att bilda sig en bestämd uppfattning om betydelsen av dessa upptäckter i medicinens tjänst.

Med den utveckling, som atomomvandlingen nu fått kan alkemisternas dröm om att framställa guld utan svårighet förverkligas t. ex. genom beskjutning av platina eller kvicksilver, men det eftersträvansvärda däri är försvunnet, ty de energimängder, som måste användas, överstiga vida i värde den guldmängd som framställes.

Klyvning av atomkärnor.

Vid alla de beskjutningsförsök med neutroner, som Fermi utförde, bombarderade han även uran, varvid han fann en kraftig aktivering och iakttog dessutom, att flera radioaktiva produkter bildades. Han framkastade då tanken på att ämnen med högre kärnladdning än uran kunde uppstå t. ex.

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{239}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{239}_{93}\mathrm{X} + ^{0}_{-1}\mathrm{e}\,.$$

Såsom högre homolog till renium kallades ämnet med atomnummer 93 ekarenium. Liknande processer underkastades noggranna undersökningar av olika forskare särskilt i Tyskland av Otto Hahn och Lise Meitner, vilka även kemiskt utforskade de bildade produkterna. Man fällde de senare med svavelväte i saltsur lösning och företog med fällningen olika kemiska operationer. Som bärare för de olika aktiviteterna tillsattes därvid små mängder av andra ämnen, såsom barium-, lantan- och platinasalter. På detta sätt konstaterade man en mängd olika aktiviteter, som ansågos tillhöra serier av successiva element med ända till fyra enheter högre kärnladdning än uran. Dessa s. k. transuraner emitterade β-strålar och neutroner.

Vid fortsättning av dessa arbeten funno Hahn och Strassman i början av år 1939 produkter, som följde barium, varför de antogos vara isotoper till radium. Noggranna undersökningar visade emellertid, att de ej på något sätt kunde skiljas från barium utan måste vara verkliga bariumisotoper. Men uppträdandet av kärnor med så mycket lägre massa kunde ej tydas på annat sätt, än att urankärnan efter infångandet av en neutron undergått en veritabel *klyvning* i *lättare kärnor,* något som man tidigare ansett omöjligt på grund av de enorma energimängder, som skulle erfordras därför. Om man tänker sig en splittring i två delar och från urans kärnladdning 92 drar bariums 56, återstår 36, vilket svarar mot en kryptonkärna. Även förefintligheten av krypton har påvisats.

Därtill måste vid klyvningen uppstå ett överskott på neutroner i förhållande till de stabila lättare kärnorna i enlighet med vad som papekats sid. 11, att antalet neutroner är jämförelsevis större vid högre än vid lägre atomvikter. Detta överskott kunde ej annat än göra klyvningsprodukterna särdeles labila. För att återvinna stabilitet hos deras resp. kärnor måste neutroner antingen direkt bortgå eller i kärnan omvandlas till protoner med emission av elektroner, samtidigt som ämnen med högre kärnladdning successivt bildades, alltså i överensstämmelse med vad man trott ske hos uran. Därvid skulle barium närmast övergå till lantan och cerium, krypton till rubidium och strontium.

Den teoretiska möjligheten för en sådan klyvning av en tung atomkärna har förklarats i enlighet med Bohrs åsikt, att den tätt sammanpackade kärnan kunde liknas vid en vätskedroppe (se sid. 9). Molekylerna i droppen hålla tillsammans och röra sig kollektivt. Men utsättes droppen för deformation, så att den kommer i starkt vibrerande rörelse, sker en avsnörning och droppen delas i två. Nu synas kärnor med många elementarpartiklar i det hela vara mindre stabila än övriga, eftersom den naturliga radioaktiviteten just uppträder hos de tyngsta elementen. I vissa fall skulle då infångandet av en neutron hos en sådan kärna åstadkomma en så stark deformation i energifördelningen, att kärnan klyves i två jämförelsevis lika delar. I samma ögonblick, som uppdelningen sker, komma de positiva laddningarna hos de båda fragmenten att orsaka, att de med stor kraft stötas bort från varandra. Man beräknar att de tillsammans representera en energimängd av bortåt 200 MeV.

Men om massdelar med sådan kraft utstötas från ytan av ett preparat, måste de kunna uppsamlas i dess omedelbara närhet. Med denna utgångspunkt igångsattes en undersökning av Meitner och Frisch. Ett preparat av uran bestrålades från en kraftig neutronkälla, beryllium bombarderat med deutoner. Det placerades 1 mm ovanför ett tunt vattenskikt, vilket efteråt visade tydlig aktivering. Detta behandlades med liknande metoder som de s. k. transuranerna, och man återfann där iakttagna aktiviteter. Därmed hade klyvningens realitet experimentellt påvisats.

Man har också lyckats att uppta klyvningsprodukterna på wilsonfotografier. Särskilt vackra sådana ha erhållits vid Bohrs institut, varav ett par reproduceras i fig. 12 och 13. På den förra är mitt genom dimkammaren placerat ett glimmerblad, belagt med uran, som bombarderas med neutroner. Från en uranatom utgår i rakt motsatta riktningar två klyvningsfragment. Till följd av deras stora massa och därav följande kraftiga jonisation äro deras banspår kraftigare än övriga, som härröra från α-partiklar och protoner. Längs banorna synas korta, raka dimspår, som tillskrivas påstötta protoner. Försöken äro gjorda vid reducerat tryck för att bättre få fram enskildheterna. Fig. 13 ger prov på ett banspår från en klyvningsprodukt, som gett en kraftig stöt åt en syrekärna och slungat den åt sidan. Med hjälp av dylika fullträffar är det möjligt att beräkna atomfragmentens energi.

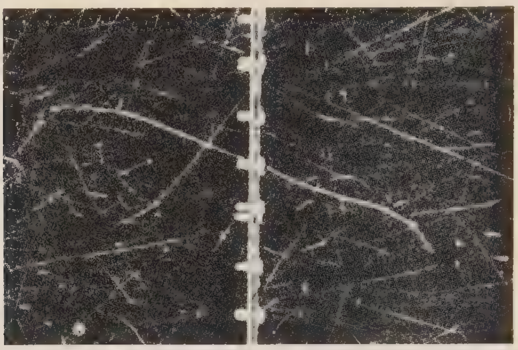


Fig. 12. Atomfragment utkastas från en urankärna vid bombardering med neutroner (Böggild, Broström o. Lauritsen).

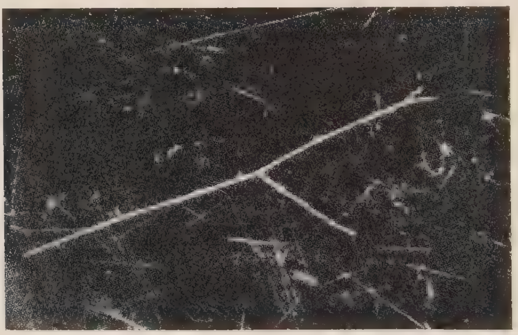


Fig. 13. Elastisk stöt mellan atomfragment från uran och en syrekärna (Böggild, Brostöm o. Lauritsen).

Noggranna undersökningar av beskjutningseffekterna på uran ha visat, att de kunna gå olika vägar. För neutroner på 25 MeV finns en resonanseffekt, hos den vanliga uranisotopen 238. Denna leder till en omvandling i den riktning, som först angavs av Fermi (se sid. 16) med bildning av ekarenium, vilket antagligen omvandlas till atomnummer 94, ekaosmium, som synes rel. stabilt.

Enligt detta skulle två transuraner existera. Klyvning av nämnda uranisotop sker endast vid bombardering med neutroner av stor energi. Däremot åstadkomma termiska neutroner en splittring av den mera sällsynta urankärnan med massa 235.

Då vid klyvningen även fria neutroner uppstå, skulle man kunna tänka sig, att dessa i sin tur åstadkomme splittring av nya atomer. Man har framkastat tanken, att en kedjereaktion av kanske explosiv karaktär kunde inträda. Någon sådan har emellertid aldrig observerats. Undersökningar ge också vid handen, att det endast är uran 235, som förekommer endast till 0,7 %, vilken skulle kunna ge upphov till en kedjereaktion. Möjligen kunde frågan ställa sig annorlunda, om man lyckades isolera denna isotop, men även i sådant fall måste man ihågkomma, att det alltid är en ytterst liten bråkdel av förefintliga neutroner, som överhuvud taget alstra kärnreaktioner.

De båda klyvningsprodukterna hos uran variera, de kunna t. ex. vara xenon och strontium, vilka sedan vidare omvandlas. Emellertid utgöras de alltid av ett tyngre och ett något lättare fragment, ej av två lika stora. Atomnumren mellan 42 och 51 ha åtminstone hittills icke observerats. Även toriumkärnan kan undergå liknande klyvning, dock endast medelst hastiga neutronprojektiler.

Med stor intensitet drives arbetet vidare inom atomomvandlingens olika grenar, nya synpunkter och nya rön framföras ständigt. Men redan ha sådana experimentella resultat vunnits, att de vida överträffa även vad man i sina djärvaste drömmar hade kunnat tro genomförbart. De ha öppnat nya perspektiv för möjligheterna att frigöra någon liten del av atomkärnornas väldiga inre energiförråd och använda den till mänsklighetens tjänst. För den teoretiska atomforskningen äro de av den mest djupgående betydelse.

Några trigonometriska olikheter.

Av **ARNE PLEIJEL.**

Jag betraktar i det följande n positiva vinklar $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, vilka skola vara så beskaffade, att deras summa alltid är konstant $= n \cdot \alpha$, där $n \cdot \alpha \leq 180°$. Jag betraktar vidare de elementarsymmetriska funktioner, som erhållas ur polynomet $\prod_{m=1}^{n} (t + \sin \alpha_m)$. Jag vill nu bevisa, att för den elementarsymmetriska funktionen

$$\sum \sin \alpha_{m_1} \sin \alpha_{m_2} \cdot \sin \alpha_{m_k}$$

av ordningen k, där $m_1, m_2 \ldots m_k$ äro olika och i övrigt antaga alla möjliga värden f. o. m. 1 t. o. m. n, gäller olikheten

$$\Sigma \sin\alpha_{m_1} \sin\alpha_{m_2} \ldots \sin\alpha_{m_k} \leq \binom{n}{k} \sin^k\alpha .$$

För detta ändamål betraktar jag funktionen

$$f(x) = \binom{n-1}{k} \sin^k(\alpha - x) + \binom{n-1}{k-1} \sin^{k-1}(\alpha - x) \cdot \sin\left[\alpha + x(n-1)\right] =$$
$$= \binom{n-1}{k-1}\left[\frac{n-k}{k} \cdot \sin^k(\alpha - x) + \sin^{k-1}(\alpha - x) \cdot \sin\{\alpha + x(n-1)\}\right].$$

Denna funktion har uppkommit ur en elementarsymmetrisk funktion av ordningen k genom att alla vinklar utom en satts lika med $\alpha - x$, medan den sista vinkeln är $\alpha + x(n-1)$. Summan av alla dessa vinklar blir då $n \cdot \alpha$. Jag bildar nu derivatan $f'(x)$ och får efter reduktioner

$$f'(x) = \binom{n-1}{k-1} \sin^{k-2}(\alpha - x)\left[\sin xn - k \cdot \sin xn + (n-k)\sin(\alpha - x) \cdot\right.$$
$$\left. . \{\cos(\alpha + x)(n-1) - \cos(\alpha - x)\}\right].$$

Detta uttryck är emellertid negativt för positiva värden på x och positivt för negativa värden på x, vilkas siffervärden äro $< \frac{\alpha}{n-1}$. [Av olikheten $(n-1)(\alpha - x) < n\alpha$ följer $-x < \frac{\alpha}{n-1}$.] Funktionen $f(x)$ antager alltså sitt största värde för $x = 0$. Vi få alltså

$$f(x) \leq \binom{n}{k} \sin^k\alpha .$$

Betrakta vi nu en av de ovan nämnda elementarsymmetriska funktionerna av ordningen k, så kunna vi uttaga två godtyckliga av de givna vinklarna $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, t. ex. α_1 och α_2. Dessa vinklar måste nu förekomma symmetriskt, och den elementarsymmetriska funktionen följaktligen öka i värde, om dessa vinklar utbytas mot $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, förutsatt att de icke redan förut äro lika stora. Betrakta vi nu utom dessa vinklar även vinkeln α_3 och ersätta denna vinkel och de båda förutnämnda med $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}$, öka vi ytterligare den elementarsymmetriska funktionens värde. På detta sätt kunna vi genom ett enkelt induktionsslut få fram det slutliga resultatet, som vi kunna formulera på följande sätt: I polynomet

$$\left(t + \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n}{n}\right)^n - \prod_{m=1}^{n}(t + \sin\alpha_m),$$

där $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq 180°$ och samtliga α äro positiva, äro alla koefficienter positiva eller noll, och det senare kan inträffa blott, om alla a_m äro lika stora. För en triangels vinklar erhålla vi de lätt bevisade formlerna

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin\beta\cdot\sin\gamma + \sin\gamma\cdot\sin\alpha \leq \frac{9}{4}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{3}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Om man nu använder sig av, att $90° - \alpha + 90° - \beta + 90° - \gamma = 90°$ och $90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2} = 180°$, erhåller man analoga formler för cosinusvärdena av en triangels vinklar.

Tillägg till uppsatserna ”Om Mersennes tal o. s. v.” samt ”Om faktorer till talen $a^p + 1$”.

Härmed meddelas följande kompletteringar till ovannämnda uppsatser (Elementa, *23*, 209, 212, 1940), på det att möjligtvis någon av Elementas läsare ej må utföra onödigt arbete.

Vid talen av formen $N = \frac{1}{3}(2^p + 1)$ fås för $p = 37$ en divisor 1777, och den andra faktorn visas vara ett primtal. För $p = 31$ är N ett primtal, såsom det framgår genom prövning med 50 st. eventuella divisorer, mindre än $\sqrt{N-1}$, d. v. s. mindre än 26 754. För $p = 41$ är den andra faktorn ett primtal. För $p = 59$ och 83 äro 2833 och 2657 primfaktorer. En eventuell primfaktor till talen N_{43}, N_{61}, N_{67}, N_{71} och N_{79} samt till den senare faktorn i N_{47}, N_{53}, N_{59} och N_{73} är större än 20 000.

Vid talen av formen $N = \frac{1}{4}(3^p + 1)$ erhålles för $p = 19$ en divisor 2851, och den andra faktorn är ett primtal. Det mot $p = 23$ svarande talet 23 535 794 707 bevisas vara primtal, genom prövning med inalles 319 st. divisorer av formen $138n + 1$, mindre än $\sqrt{N-1}$, d. v. s. än 153 413. För $p = 29$ finnes jämte 523 även primfaktorn 6091; den tredje faktorn visas vara primtal. För $p = 31$, 37, 47, 59 och 73 finnas faktorerna 6883, 18 427, 16 921, 3187 och 439. En eventuell divisor till talen N_{41} och N_{43} samt till den andra faktorn i talen N_{31}, N_{37} och N_{47} är större än 20 000.

Vid talen av formen $N = \frac{1}{2}(3^p - 1)$, vilka ej behandlas i nämnda uppsatser, fås följande faktorer P:

$p =$	5	11	17	19	23	29	31	41	43	47	53	83	89
$P =$	11	23	1871	1597	47	59	683	83	431	1223	107	167	179.

För $p = 17$, 19 och 23 är den andra faktorn ett primtal. För $p = 37$ har jag visat, att en eventuell divisor måste vara större än 50 000.

Hj. Tallqvist.

Även jag har funnit några nya faktorer. För $N = \frac{1}{3}(2^p + 1)$ och $p = 107$ finnes faktorn 643; för $p = 83$ har N jämte den förut angivna faktorn 499 även faktorn 1163; för $p = 97$ finnes jämte 971 även faktorn 1553. För $N = \frac{1}{4}(3^p + 1)$ och $p = 61$, 71, 83 ha faktorerna 367, 853, 499 erhållits.

Jag begagnar tillfället att tillägga några rader för att ytterligare gallra bland eventuella faktorer till $N = \frac{1}{3}(2^p + 1)$. Jag visade (sid. 213), att varje faktor måste ha formen $P = 2sp + 1$, och om s är jämnt, måste det vara delbart med 4. Av kongruensen (4) följer då, att 2 är en bikvadratisk rest till P. Varje primtal P av formen $4m + 1$ kan på ett enda sätt skrivas under formen $P = a^2 + b^2$, där den ena basen, t. ex. a, är jämn. Villkoret för att 2 skall vara en bikvadratisk rest till P är nu, att a är delbart med 8. Endast om P uppfyller detta villkor, kan det således tänkas vara faktor till N.

Om s är delbart med 3, följer av (4), att 2 är en kubisk rest till P. För varje primtal P av formen $6m + 1$ kan man på ett enda sätt skriva

$$4P = A^2 + 27B^2, \tag{8}$$

där A och B äro båda udda eller båda jämna. I senare fallet övergår likheten till

$$P = a^2 + 27b^2. \tag{9}$$

Villkoret för att 2 skall vara kubisk rest till P är just, att P kan skrivas under formen (9). Om nu $a = 2a_1$ och $b = 2b_1 + 1$, blir

$$b^2 \equiv 1, \quad 27b^2 \equiv 3, \quad P \equiv 4a_1^2 + 3 \pmod{8},$$
$$\therefore\ sp \equiv 2a_1^2 + 1 \pmod{4}.$$

Men jag har förut visat, att om sp är udda, måste $sp \equiv 1 \pmod 4$, och således måste a_1 vara jämnt. Om å andra sidan $a = 2a_2 + 1$ och $b = 2b_2$, blir

$$P \equiv 1 + 4b_2^2 \pmod 8, \quad sp \equiv 2b_2^2 \pmod 4.$$

Men om s är jämnt, måste det vara delbart med 4; således måste b_2 vara jämnt. Vi ha således funnit, att om s är delbart med 3, måste P ha formen (9), där det ena av talen a och b är udda, det andra delbart med 4.

Agne Wahlgren.

Elektrolys av glas.

Elektrolys av smältor har stor betydelse men torde dock sällan visas i skolan. Här beskrives en enkel elektrolys av smält glas.

Elektroderna bestå av 2 dm långa järntrådar med 2,5—3 mm diameter fästade i stadiga fotklämmor. »Härden» är en 3—4 cm tjock flisa av t. ex. granit. För att den ej skall falla sönder, om den spricker, armeras den t. ex. med ett vågrätt varv hårt åtdragen järntråd. Under stenen lägges en asbestskiva. Ett kort glasrör eller en liten glasskärva lägges på stenen, och järntrådarnas ändar få trycka mot glaset några mm från varandra.

Elektroderna anslutas till kopplingstavlan, och glaset värmes uppifrån med en bunsenlåga. När temperaturen stigit tillräckligt, blir glaset ledande och lågan borttages. Det hålles sedan glödande av strömvärmet. Man lägger mera glas i smältan, ökar avståndet mellan elektroderna och reglerar strömstyrkan. Denna behöver ej överstiga 3—4 A. Försöket blir dock mycket vackert, om strömstyrkan är 10—20 A. Smältan, som då kan göras större, utsänder ett bländande ljus, varför man bör ställa en färgad glasskiva framför densamma. Anoden frätes upp och får efter hand matas fram. Från katoden uppstiger en vit rök, som blåfärgar ett fuktat, rött lackmuspapper. Sedan smältan stelnat, är den grön av järnsilikat. Om man under elektrolysen rör om i smältan med endera eller båda elektroderna, blir den mera homogen. Om en av elektroderna lyftes upp ur smältan, bildas en gul ljusbåge.

Försöket kan utföras t. ex. i samband med behandlingen av den elektriska strömmens värmeverkningar.

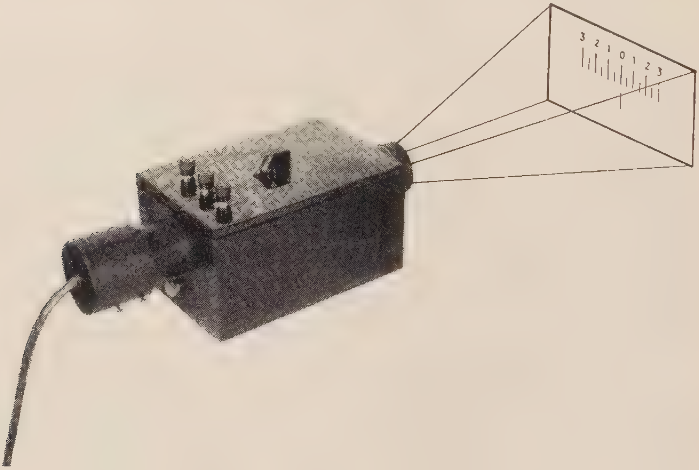
Alfred Nilsson.

Stig Lindholm

Projektionsmätinstrument.

Då det gäller demonstration av elektriska försök, är det i allmänhet svårt att med vanliga mätinstrument göra ett utslag så tydligt att det kan avläsas på långt håll. Med detta projektionsmätinstrument kunna demonstrationer göras även för ett mycket stort auditorium.

Mätinstrumentet är av vridspoletyp. Det är i stället för visare försett med en genomskinlig skala. Denna belyses och projiceras mot en vit skärm, en vägg eller dylikt. Belysningsanordningen består av en glödlampa (6 V, 25 W) och en kondensor. Projektionslinsen har en brännvidd av 10 cm. Den är fästad i en skjutbar fattning, så att projektionsavståndet kan varieras från 1 meter och uppåt. Samtidigt med skalan projiceras även ett fast index, med vars hjälp avläsningen sker.



Skalan är försedd med nollpunkt i mitten och indelad 10 — 0 — 10, med tjugo delstreck åt vartdera hållet. Denna gradering tillåter fullt tillräcklig noggrannhet vid avläsningen. (Vid 10 meters projektionsavstånd blir varje skaldel c:a 2 dm bred.) Med en skruv under belysningsapparaten kan nollpunkten korrigeras.

Alla delar äro sammanbyggda till en enhet i enlighet med figuren. Som strömkälla för glödlampan kan man använda ett ackumulatorbatteri eller vid växelström en transformator.

Shuntar och förkopplingsmotstånd för olika mätområden finnas inbyggda, och inkopplas med en ratt. Mätområdena äro för strömstyrkor 1 mA, 10 mA, 100 mA, 1 A, 10 A och för spänningar 0,1 V, 1 V, 100 V, 300 V. Noggrannhet: ± 1,5 %.

Vid största känslighet (1 mA) är instrumentet utmärkt som nollinstrument. Fullt tydligt utslag erhålles för 10^{-5} ampère. Inre motståndet är i detta fall c:a 100 ohm.

Instrumentet är användbart vid de flesta likströmsmätningar. Det är enkelt att använda. Bilden av skalan är så ljusstark, att man ej behöver förmörka rummet, utan försöken kunna utföras i fullt dagsljus.

Instrumentet tillverkas och försäljes av P. A. Norstedt & Söner.

Stig Lindholm.

Om bestämning av metallers värmeledningsförmåga.

I Elementa *23,* 184, 1940 har lektor G. FUNKE beskrivit en apparat för bestämning av metallers värmeledningsförmåga. Detta är av intresse, enär det måste anses önskligt, att metallers värmeledningsförmåga kvantitativt behandlas i gymnasiet, i synnerhet som antalet laborationstimmar i andra ringen är tillräckligt stort för att en sådan bestämning skall kunna medhinnas. Undertecknad har vid h. allm. läroverket i Umeå infört en dylik laboration. För denna har endast använts sådan materiell, som finnes vid varje läroverk, varför ingen specialapparatur behöver bekostas. Anordningen blir alltså mycket enklare än den av lektor F. beskrivna, men å andra sidan kan man naturligtvis ej vänta sig fullt så goda resultat som med en mera komplicerad anordning.

En 5 à 8 cm lång järnstav (diameter c:a $1/2$ cm) värmeisoleras enkelt på så sätt, att den trädes genom ett antal korkar. Endast 1 cm i vardera ändan lämnas fri. Staven sättes fast i lodrät ställning i ett stativ. Den övre ändan upphettas med en brännare till just begynnande rödglödning, varvid rummet lämpligen hålles mörkt. I en kalorimeter eller eventuellt en vanlig bägare hälles en uppmätt mängd vatten (50 cm^3 är en lämplig mängd). En laborant sköter upphettningen, medan en annan, när rödglödningen inträtt, lyfter upp kalorimetern, så att stavens undre ända doppar ned i vattnet, och avläser vattnets temperatur med en minuts mellanrum. Detta upprepas ett par gånger, så att ett medelvärde på temperaturstegringen i kalorimetern erhålles. Härav kan man sedan beräkna den värmemängd, som på 1 sek. genomströmmar staven. Stavens längd räknas från lågans nedre kant till vattenytan i kalorimetern. Temperaturdifferensen mellan stavens varma och kalla del får man genom att taga skillnaden mellan rödglödningstemperaturen och kalorimetervattnets temperatur. Att det senares temperatur stiger något under försöket spelar ingen roll, då temperaturdifferensen är så stor som c:a 500°. En speciell svårighet är att hålla temperaturen vid just begynnande rödglödning, men det visar sig gå bra, om man vid för stark rödglödning borttager brännaren ett ögonblick. Brännarens handhavande lär sig eleven mycket snabbt. Vattnet i kalorimetern omröres under försöket.

Laborationer, som under vederbörlig kontroll utförts av härvarande ring R II b ha för järnstavar givit värden på värmeledningsförmågan, som ligga mellan 0,13—0,16 och för stålstavar 0,09—0,10, värden vilka med hänsyn till anordningens enkelhet måste anses fullt tillfredsställande.

Följande siffror äro tagna ur ett elevprotokoll: Järnstavens längd 6,0 cm och diam. 0,56 cm; vattenmängd 50 cm^3; medelvärdet av temperaturstegringen i kalorimetern 3°,5; tid 60 sek; temp.diff. mellan stavens båda ändar 500°. Resultat: värmeledningsförmågan för järn 0,14.

Under en tvåtimmarslaboration medhinnes även försök med en kopparstav. Då ju koppar leder bättre än järn, tagas kopparstavarna klenare och tiden kortare, så att ej kalorimeterns temperatur stiger alltför mycket.

Samma elevprotokoll innehöll följande siffror för koppar: Kopparstavens längd 8,0 cm och diam. 0,40 cm; vattenmängd 50 cm^3; medelvärdet av temperaturstegringen i kalorimetern 4°,3; tid 30 sek; temp.diff. mellan stavens båda ändar 500°. Resultat: värmeledningsförmågan för koppar 0,91.

A. Guntsch.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Årsmötet i Stockholm den 7—8 januari 1941.[1]

Redan kl. 8.30 på tisdagsmorgonen hade ett 70-tal av föreningens medlemmar samlats på Radiotjänst för att under radiokommissarie E. Mattssons ledning bese Radiotjänsts studios och tekniska anordningar. Med tanke på det livliga intresse, som besöket hos Radiotjänst den 28 oktober 1940 tilldrog sig, hade arbetsutskottet hos Radiotjänst anhållit om att vid årsmötet få upprepa studiebesöket. För välvilligt tillmötesgående från Radiotjänst och för den intressanta demonstrationen får föreningen härmed uttrycka sitt vördsamma tack.

---

[1] Tidigare medd. från föreningen återfinnas i Elementa *16*, 226, 1933; *17*, 46 och 113, 1934; *18*, 42 och 47, 1935; *19*, 36, 1936; *20*, 42 och 133, 1937; *21*, 47, 1938; *22*, 45, 113, 1939; *23*, 41, 234, 1940.

Årsmötet öppnades sedan kl. 10.30 på Tekniska högskolans hörsal för fysik, där så småningom c:a 125 mötesdeltagare samlades (vid mötet närvoro inalles 140 av föreningens medlemmar). Först föredrogos styrelse- och revisionsberättelserna för år 1940, som godkändes. På förslag av den avgående styrelsen beslöts en stadgeändring: antalet medlemmar i styrelsen bestämdes till högst 21 (förut högst 18), och vid styrelsesammanträde skulle minst 6 medlemmar utom ordföranden vara närvarande (förut minst $^1/_3$), för att styrelsen skulle vara beslutmässig. Av de 21 medlemmarna i styrelsen skulle 20 väljas för år 1941. Till ordförande omvaldes lektor T. WETTERBLAD, och även i övrigt omvaldes den avgående styrelsen utom professor RIESZ, Lund, som undanbett sig återval. Till nya medlemmar i styrelsen valdes rektor LILLY TENGNÉR, Stockholm, lektor A. BJÖRKESON, Stockholm, och lektor G. FUNKE, Norrköping. Revisorer och revisorssuppleanter omvaldes.

Därefter talade lektor EVA RAMSTEDT över ämnet »Atomomvandlingar — en orientering». Tal. gav en exposé över de senaste årtiondenas atomforskning, främst då de arbeten, som utförts över atomsprängning och atomomvandlingar. Det utomordentligt klara och väldisponerade föredraget belystes med ett antal skioptikonbilder av Wilson-fotografier. Wilson-kammaren är framför allt det hjälpmedel, som avslöjat atomernas hemligheter och lett till upptäckten av bl. a. neutronen och positronen. Under föredraget visades också ett försök med en av teknolog S. LINDHOLM förfärdigad Wilson-kammare (efter en beskrivning i Elementa 22, 213, 1939), varvid alfa-strålar från ett poloniumpreparat projicerades på väggen, synligt för hela auditoriet. Föredraget publiceras i detta häfte av Elementa.

Efter lunchrast samlades deltagarna kl. 14.30 för att lyssna till teckningslärare G. A. NORDLANDER, som höll föredrag över ämnet »Rät parallellprojektion i matematik och teckning». Talaren framhöll, att projektionsritningen utgjorde en mycket betydelsefull kunskap för lärjungarnas fortsatta utbildning. Samarbete mellan ämnena teckning och matematik kunde ge en fördjupad kunskap häri. En vädjan gjordes till läroverkens matematiklärare, att de i så stor utsträckning som möjligt skulle använda den ortogonala projektionen vid undervisningen i stereometri. Härigenom finge teckningen med sitt knappt tillmätta utrymme i timplanen ett värdefullt stöd, inte minst så till vida att eleverna finge se, att de redan i skolan i ett annat fack hade användning för sina kunskaper i teckning. Matematiken skulle å andra sidan finna projektionsritningen vara ett betydelsefullt hjälpmedel. Vid behandlingen av åtskilliga uppgifter i stereometri är det en hjälp för eleven att använda projektionsritning och genom konstruktion finna problemets lösning och så genom mätning kunna kontrollera sina uträkningar. Talaren betonade uttryckligen, att långt ifrån alla stereometriska uppgifter lämpa sig för behandling medelst rät parallellprojektion och att många problem ej kunna lösas på konstruktiv väg. Kritik riktades mot det s. k. parallellperspektivet eller kavaljersperspektivet, (ej att förväxla med sned projektion). Denna avbildningsmetod, oavsett vilken variant som kommer till användning, är underlägsen såväl rät parallellprojektion som korrekt perspektiv (centralprojektion). På sistnämnda bildtyp behöver man inte ställa alltför stränga krav i fråga om korrekthet.

Under den följande diskussionen framställde föredragshållaren en fråga, huruvida icke enklare stereometriska uppgifter kunde givas i matematiken redan under de första gymnasieåren. För teckningen skulle detta vara mycket välkommet, och talaren trodde sig även veta, att av matematiklärare gjorts gällande, att det skulle vara fördelaktigt, om den inledande kursen i stereometri förlades till ett tidigare stadium än som nu är fallet.

Under diskussionen, som var mycket livlig, underströk först teckningslärare Bendelius inledarens synpunkter och framhöll, att teckningsundervisningen i skolan är grundläggande för arbetet vid Tekniska högskolan. Han ansåg, att matematikundervisningen skulle skörda den största vinsten av att acceptera den ortogonala metoden. Den på fri hand utförda teckningen i perspektiv vid matematikundervisningen ödelägger teckningsundervisningens perspektivundervisning. Han förordade användningen av den ortogonala avbildningen såväl i läroböcker i stereometri som vid lösandet av matematikproblem, det senare av tre skäl: metoden är lättare, den är välbekant för eleverna och ger ej rum för felkällor. Teckningarna i Mattssons lärobok i stereometri kritiserades.

Lektor Elvius erkände, att Mattssons stereometriska figurer ej voro bra. Tal. hade från inträdesprövningarna till Elektrotekniska fackskolan i Västerås nedslående erfarenheter av elevernas förmåga att göra nöjaktiga avbildningar av kroppar. De inträdessökande borde ha förmåga att rita vertikal- och horisontalprojektioner. Deras bristande förmåga häri vore delvis läroverkslärarnas fel, som godta slarvigt utförda teckningar. Tal. framhöll, att man kan få bra föreställningar ur klassiska perspektivfigurer men också många felaktiga. Det går att avbilda enkla föremål perspektiviskt men det går inte med svårare, såsom t. ex. dynamomaskiner. Sveriges akademiker borde lära sig ritningsmetodik. Läroverken skulle ha nytta av om flera matematiklärare vore civilingenjörer.

Adjunkt ÅSTRAND meddelade, att efter vad han hade sig bekant, så ägde i Danmark intet samarbete rum mellan tecknings- och matematikundervisningen. I Norge däremot undervisa matematiklärarna i deskriptiv teckning. I det skriftliga provet i studentexamen ingår en teckningsuppgift. Tal. hade svårt att se rymden i rät parallellprojektion men var av logiska skäl övertygad om lämpligheten av att använda den ortogonala metoden. Ville gärna få läroboksfigurerna omritade.

Adjunkt WAHLSTRÖM trodde ej, att fantasilösa elever kunde reda sig med enbart rät parallellprojektion. Det är lämpligt att först göra en perspektivisk skiss, en synpunkt, som sedan ytterligare betonades av lektor WAHLGREN.

Adjunkt CEDERSTRAND förordade samarbete mellan teckningen och matematiken. Problemgivningen i stereometri borde vara sådan, att den ej lade hinder i vägen för användning av ortogonal teckning och föreningen borde verka för en sådan utveckling.

Professor VELANDER: Det som läres i skolan är intet självändamål utan det verktyg, som skall användas ute i livet. Detta är en större synpunkt än att olika ämnen skola hjälpa varandra. I tekniken är den ortogonala teckningsmetoden det enda möjliga verktyget. Alla människor komma i beröring med rumsseende. Man kan underlätta uppfattningen med perspektivskisser men att på den vägen få fram mätbara teckningar är svårt. Tyvärr finns det nog inte tillräckligt med civilingenjörer för att sådana skola kunna användas som matematiklärare. Det är beklagligt för den tekniska utbildningen, att timantalet för ämnena matematik och teckning beskurits så hårt.

Lektor GUSTAVER: Om matematiklärarna skola kunna övergå till ortogonal teckning, så behöva de någon utbildning i teckningsmetodik. Frågan borde tagas upp i samband med frågan om lärarutbildningen. — Fil. mag. A. BENEDICKS meddelade, att vid Oslo universitet fanns en kurs i teckningsmetodik för matematiklärare.

Rektor MONTÉN: Då det gäller att välja avbildningsmetod, är det lämpligt att låta eleverna välja den som är lättast för dem. De flesta eleverna föredraga en skiss. Man skall inte tvinga eleverna att lägga ner mera tid än nödvändigt för att lösa ett problem. Vanligen är det lättare att lösa problemet med hjälp av en projektion. Skissen behövs för att man skall se, vad saken gäller. Projektionen möjliggör beräkning. Talaren motsatte sig bestämt föreskrifter, som binder läraren vid den ena eller andra metoden.

Därmed var diskussionen slut och teknolog S. LINDHOLM demonstrerade några nya fysikaliska apparater. Ehuru tiden hade blivit långt framskriden var det dock en rätt stor skara, som intresserat tog del av den vackert utförda demonstrationen.

Onsdagens program började kl. 9, då c:a 120 mötesdeltagare samlades vid Flottans varv på Djurgården för att göra ett besök ombord på två örlogsfartyg, ett pansarskepp och en U-båt. Som ciceroner tjänstgjorde 12 av fartygens officerare, och visningen skedde med berömvärd militär precision. För den intressanta upplevelsen och det älskvärda mottagandet ombord får föreningen härmed framföra sitt vördsamma och varma tack.

Härefter intogo nära 100-talet medlemmar lunch å Skansens Nyloft. Efter lunchen besågs under sakkunnig ledning bl. a. Drottningholms gamla slottsapotek från 1700-talet och den gamla Möllenborgska guldsmedsverkstaden.

Något försenade samlades man åter på Nyloftet, där kortare anföranden höllos av undervisningsrådet C. E. SJÖSTEDT om »Specialkurs och allmän kurs i matematik» och av lektor T. WETTERBLAD över »En för gymnasiets fysikundervisning aktuell fråga». I fråga om det första av dessa anföranden hänvisas till Tidning för Sveriges läroverk nr 2, 1941, det senare kommer att utsändas till huvudlärarna i fysik. Lektor W:s anförande anknöt sig till ämneskonferensernas uttalanden angående uteslutningar från den i läroböckerna givna kursen. Som ett komplement härtill berörde undervisningsrådet R. LUNDBLAD i ett kort yttrande tvenne frågor. Den ena var, huru man bör förfara, då en fyllnadsprövande från ett läroverk, där uteslutningar företagits, undergår prövning vid ett läroverk, där motsvarande uteslutningar ej gjorts. Man bör då pröva på lärjungens inlärda kurs och lärobok. I fråga om de kvalitativa fordringarna i fysik bör man följa läroverkets egna krav. Den andra frågan rörde möjligheten till uteslutningar. Valet är ej alldeles fritt, bl. a. på grund av den sista tidens täta lärarbyten. Uteslutningarna böra därför göras i högsta ringens kurs. Dynamiken är emellertid av stor betydelse för fackskolor. Läran om interferens kan lättare undvaras. Det har diskuterats mycket, om man skall läsa geometrisk optik. Talaren citerade en anekdot, där svaret gavs, att geometrisk optik borde läsas, om vederbörande skulle bli glasslipare. För närvarande ansåg dock undervisningsrådet Lundblad, att man bör behålla uppgifterna på geometrisk optik och lämna interferensläran. Emellertid ville han betona, att rätten att göra uteslutningar bör brukas med urskillning.

Som ingenting mera förekom på programmet, förklarade ordföranden årsmötet 1941 avslutat.

Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1940.

Styrelsen har under året bestått av 19 personer, varav följande även tillhört arbetsutskottet: lektor T. Wetterblad, Stockholm, ordförande, lektor A. Uhler, Stockholm, v. ordförande, lektor B. Gustaver, Stockholm, sekreterare och skattmästare, adjunkt E. Sandén, Stockholm, och adjunkt S. Åstrand, Stockholm. Övriga medlemmar i styrelsen ha varit: fil. lic. I. Bolin, Stockholm, lektor K. Dahr, Göteborg, lektor E. G. Hjalmar, Stockholm, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, lektor Eva Ramstedt, Stockholm, professor M. Riesz, Lund, lektor G. Starck, Stockholm, överste H. Stendahl, Stockholm, fil. lic. B. Svensson, Lund, rektor B. Söderborg, Stockholm, och adjunkt B. Wahlström, Stockholm.

Föreningen höll den 4—5 januari sitt ordinarie årsmöte i Stockholm å Stockholms Lärlings- och yrkesskolor (första dagen) och å Tekniska Museet (andra dagen). Referat från årsmötet har tillställts föreningens samtliga medlemmar i form av särtryck ur Elementa 23: 1.

Styrelsen hade vidare planerat ett sammanträde den 15 april å Institutet för organisk-kemisk forskning, med bl. a. ett föredrag av lektor Eva Ramstedt över ämnet: Atomomvandlingar, en orientering, vilket sammanträde dock måste inställas. Lektor Ramstedts föredrag har i stället förlagts till årsmötet 1941 och sammanträdet på Institutet för organisk-kemisk forskning anordnades den 28 oktober i samband med ett besök å Radiotjänst tidigare samma dag. Referat från detta sammanträde har utsänts till samtliga medlemmar i form av särtryck ur Elementa 23: 4.

Styrelsen har under året haft 4, arbetsutskottet 3 sammanträden.

Medlemsantalet i föreningen är vid årsskiftet 558. Under året har 1 medlem överförts till avdelningen i Lund, 2 ha avlidit och 21 begärt utträde eller vägrat att erlägga avgiften. 11 nya medlemmar ha gått in i föreningen.

Stockholm den 31 december 1940.

Torsten Wetterblad.
Ordförande.

/ Bror Gustaver.
Sekreterare.

Bokanmälningar.

C. E. Holmqvist, *Flygning.* Tekniskt Folkbibliotek, Bonnier, Stockholm 1940. 250 sid. Pris inb. kr. 9: 50.

Det krävs hundratals och åter hundratals snabba, väl bestyckade, väl utrustade, skickligt skötta flygplan för att bjuda effektivt motstånd mot en angripare av vårt land. Det kostar oss hundratals millioner och sänkt levnadsstandard, men när vi insett och rätt fattat den ofrånkomliga nödvändigheten av dessa väldiga anspråk på alla och envar för att vi över huvud taget skola få leva som fria medborgare i vårt gamla Sverige, först då mäkta vi utan knot bära de bördor som läggas på oss. Med tanke på den betydelse för vårt lands försvar som flyget har under krig såväl som under fred är det en tillgång för vår försvarskraft att intresset hos den andligt vakna delen av vårt folk inriktats och alltjämt inriktas på flygningen och vad därtill hör.

Flyget är en gren av vårt försvarsväsen och samtidigt ett viktigt kommunikationsmedel statt i våldsam utveckling. Det måste omfattas och stödjas av hela folkets förtroende, växa fram under en upplyst opinions medverkan. Kunskapen om flygningens mål och medel måste spridas i allt vidare kretsar.

Säkerligen är det också många som i dessa dagar ställa frågor som dessa: Vad krävs av ett modernt flyg, hur arbetar det, hur äro flygplanen och flygmotorerna konstruerade med hänsyn till de uppgifter, som med dem skola lösas, vilka möjligheter till fortsatt utveckling ges, vilka faktorer sätta en gräns för utvecklingen i en viss riktning? Vilka äro de naturkrafter, som här tagas i människans tjänst?

Dessa och andra frågor, som den flygintresserade gjort sig, får han vid studiet av redaktör Holmqvists »Flygning» ställda in i sitt sammanhang, belysta, besvarade. Detta arbete fyller mycket högt ställda krav såväl på sträng saklighet och fullständighet utan tyngande detaljrikedom som på en medryckande och klar framställningskonst. Man tycker nästan att man själv sitter med i flygplanet med dess 150 instrument, då man läser om den s. k. instrument- eller blindflygningen, denna viktiga flygmetod utan vilken trafikflygning vore en omöjlighet liksom de nattliga bombföretagen emot mörklagda industriorter.

Åt svenska militärflyget liksom åt den civila svenska flygningen ägnas några kapitel, där man bl. a. får en redogörelse för olika inom vårt försvarsväsen använda flygplanstyper, spanings-, jakt-, bomb-, torpedplan etc. Där redogöres också för s. k. konstflygning eller avancerad flygning, som varje militärflygare måste vara förtrogen med för att kunna behärska sitt plan under stridsflygning, i kamp med fientligt flyg.

Arbetet, vars typografiska utstyrsel är god, innehåller omkring 130 förstklassiga bilder på tjockt glättat papper. Rekommenderas för skolbibliotek och som premiebok.

Martin Sjöström.

NIELS ARLEY og K. RANDER BUCH, *Sandsynlighedsregning med Anvendelse paa Statistik, Fejlteori og Udjævningsteori.* G. E. C. Gads Forlag, København 1940, 166 s.

Den matematiska sannolikhetskalkylen har på senare tid varit stadd i en kraftig utveckling. Detta gäller såväl själva teorin som dess användningar inom olika vetenskaper. Den matematiska lärobyggnaden har fått en fast, axiomatisk grundläggning, främst av ryssen Kolmogoroff, varigenom teorins förhållande till verkligheten kunnat preciseras. Gränsförhållandena vid addition av ett stort antal oberoende statistiska variabler ha i detalj undersökts, och den s. k. normala eller Gauss'ska sannolikhetsfördelningens centrala ställning i teorin har accentuerats. Sannolikhetsteoretiska metoder komma i stor utsträckning till användning vid analys av statistiskt material. Det är härvid ofta fråga om att pröva uppställda hypoteser angående materialets struktur. Moderna metoder härför härröra från engelska forskare, främst R. A. Fisher.

Efter professor H. Cramérs bekanta lärobok (Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, Stockholm 1927) har icke på nordiskt språk utkommit något arbete som kan ge en introduktion i den nyare utvecklingen i ämnet. Det är därför med glädje man hälsar utgivandet av föreliggande elementära lärobok.

Framställningen är enkel och åskådlig. De förkunskaper som fordras äro grunderna av differential- och integralkalkylen. Det sista kapitlet förutsätter även kännedom om teorin för lineära ekvationssystem. Särskilt värdefull är den utförliga redogörelse som ges för grunderna av Fishers icke alldeles lättillgängliga teori. Denna har förut överhuvud icke framställts på nordiskt språk, varför boken här fyller ett känt behov.

En formel gällande sambandet mellan binomialfördelningen och den normala fördelningen ange författarna (s. 58) såsom härrörande från Laplace. Emellertid finnes en formel av väsentligen samma innebörd redan hos De Moivre, varför det torde vara riktigare att tillskriva denne formeln.

Författarna äro naturvetenskapsmän, och i de exempel och övningsuppgifter varmed boken är rikligt försedd dominera de naturvetenskapliga tillämpningarna. Bl. a. finnas uppgifter hämtade från teoretisk fysik, artillerivetenskap och telefondrift. I läroböcker i sannolikhetskalkyl figurerar vanligen ett stort antal exempel hämtade från teorin för hasardspel. Räkning med sannolikheter leder ju sitt ursprung från bedömande av spelarnas vinstchanser och förlustrisker i olika slags hasardspel. Dylika exempel förekomma här blott i mindre utsträckning, och läsaren får redan på ett tidigt stadium tillfälle att se sannolikhetskalkylens praktiska användbarhet.

S.-G. Lindblom.

C. Luplau Janssen, *Stjernehimlen og dens Vidundere.* Hagerups Forlag, København 1938, 485 s., häft. danska kr. 35: —; inb. kr. 42: —.

Boken är till omfattningen jämförlig med den välkända Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie. Sidorna äro färre, men i gengäld är formatet 50 % större.

Stort utrymme ägnas i början åt stjärnbilderna och orienteringen på himlen. Annars är denna förberedande, geocentriska och historiska del av ämnet något kortare behandlad än hos Newcomb-Engelmann.

Om den praktiska astronomiens hjälpmedel, särskilt nyare fotografiska, finns mycket att läsa. Här finner man också en redogörelse för de berömdaste observatorierna liksom för Nordens samtliga, därtill en presentation av astronomiska tidskrifter i olika länder.

Solsystemet får en rätt ingående behandling, särskilt solen (40 sid.), där nyare uppfattningar om solens byggnad och energiförråd refereras, samt månen (23 sid.) och Mars (28 sid.).

Stellarastronomien behandlas t. o. m. utförligare än i den tyska handboken. Särskilt uppehåller sig förf. vid fixstjärnornas natur (34 sid.), dubbelstjärnor, föränderliga och nya stjärnor (43 sid.), där de nyaste rönen och uppfattningarna komma till sin rätt. Stort utrymme ägnar förf. slutligen åt spiralsystemen (23 sid. mot i N.-E. 8 sid). Välmotiverat, då forskningen här gjort utomordentliga framsteg.

I slutet ger förf., förutom ett utförligt register, en lång förteckning över astronomisk litteratur (150 nummer), både populär och vetenskaplig.

Boken är skriven i ledig föreläsarstil. Den är avsedd att vara populär, »ikke for Fagfolk, men for den brede Almenhed», vilket inte hindrar, att den liksom den tyska ger en mycket ingående astronomisk kunskap.

Den enda sakliga invändning recensenten funnit skäl till är att förf. på tal om meteoriterna inte skiljer mellan dem och stjärnfallen i fråga om ursprung och frekvensförhållanden, där dock en viktig principiell skillnad föreligger.

Bildmaterialet är rikhaltigt och väl valt. En av de många månbilderna (sid. 213) kunde dock varit bättre. F. ö. äro somliga månbilder rättvända, andra vända upp och ned, vilket är onödigt förbryllande för nybörjaren.

Författaren, som även är konstnär, har i boken några vackra planscher med reproduktioner i färg av egna målningar med celesta motiv. Omslagets onödigt stjärnrika himmel är däremot säkert icke tecknad av förf., då den visar felaktig ljusstyrka för även mycket välkända stjärnor.

Boken ger ett behagligt intryck och lockar med sin fängslande stil till studium. Förf. blir säkert sannspådd, då han i förordet säger: »Maatte Læseren blot faa lige saa megen Glæde af at læse Bogen, som Forfatteren har haft af at skrive den!»

Conrad Lönnqvist.

E. Pilgrim, *Chemie — überall Chemie,* Teubner, Leipzig 1940, 290 s., i utl. RM 5: 63.

De senaste åren ha uppvisat en rik flora av tyska böcker, som i populär form behandla framstegen inom den kemiska tekniken. Dessa arbeten ha alla ett mer eller mindre framträdande syfte: att visa, hur Tyskland med kemiens hjälp allt mera skall bli i stånd att frigöra sig från beroendet av utländsk import. Den elegantaste typen för detta slags litteratur är nog Greilings Chemie erobert die Welt, vars svenska översättning recenserats i marshäftet 1940 av denna tidskrift. Pilgrims arbete saknar de stora vyerna i Greilings bok, utblickarna över kemiens betydelse för hela vår materiella kultur och de olika kemiska industriernas utveckling under ständigt ingripande i och samspel med varandra. Å andra sidan ger nog Pilgrims bok — för den som ej stötes tillbaka av den en smula docerande tonen — mera av kemisk kunskap än som är att hämta ur Greilings. Den påminner i det hela rätt mycket om Lassar-Cohns klassiska »Kemien i det dagliga livet». Den innehåller exempelvis mycket instruktiva kapitel om vår föda och matsmältningen, om bak och bryggd, om kläder och tvätt och en mängd annat sådant, som angår var och en. Särskilt förtjäna framhållas de redigt disponerade och ganska utförliga kapitlen om äggviteämnen, om vitaminer och om konstmassor. De många, delvis charmant vackra, illustrationerna visa tyvärr — om man undantar en del växtbilder — nästan uteslutande exteriörer av olika apparater eller fabriker och ge föga eller ingen behållning, ett i arbeten av detta slag ofta förekommande fel.

John Lundberg.

HARRY STOCKMAN, *Modern televisionsteknik.* Populär Radios handböcker, Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1940. 140 sid., kr. 3:—.

Med stor sakkunskap, delvis förvärvad genom studier i England, det land som torde ha hunnit längst på televisionsteknikens område, lämnar författaren en redogörelse för den i verklig mening moderna televisionen. Han förbigår sålunda de system, vilka arbeta med sådana »mekaniska» anordningar som hålskivor och spegeltrummor, och ägnar sig helt åt det »elektriska» systemet, som använder katodstrålar såväl för bildens »avsökning» på sändarsidan som för bildalstringen i mottagarens bildrör.

I fråga om televiseringens princip framhålles betydelsen av bildpunktsantalet och bildfrekvensen. Ikonoskopet, sändarens viktigaste detalj, behandlas med tillbörlig bredd liksom även det för televisering speciella sättet för bärvågens modulering. Ett kapitel ägnas åt anordningarna i televisionsstudion och ger en god föreställning om de speciella svårigheter, som här möta, icke minst i fråga om belysningen och de agerandes kläder och »make up». Mottagarantennen har gjorts till föremål för en mycket ingående behandling, varemot redogörelsen för själva televisionsmottagaren kan synas väl summarisk. Författaren anser dock, att en närmare behandling av den speciella typ av kortvågsmottagare, som användes inom televisionen, skulle falla utom ramen för ett arbete, vars huvuduppgift är att göra läsaren förtrogen med den moderna televisionsteknikens elementära grunder.

E. Herlin.

E. T. BELL, *Matematikens män.* Övers. av L. och A. Björk, Natur o. Kultur, tryckt i Helsingfors 1940, 512 s., häft. kr. 10:—, inb. kr. 14:50.

Denna fängslande bok har nu utkommit i svensk övers. Den engelska originaluppl. (av år 1937) har tidigare anmälts i tidskriften (årg. 22, 59, 1939), varför någon redogörelse för innehållet ej nu behöver lämnas. En del biografier (Poncelet, Jacobi, Hamilton, Sylvester, Boole) ha ej medtagits i övers., vilket läsaren kanske borde ha upplysts om; å andra sidan har den svenska uppl. försetts med utmärkta porträtt av flertalet av de matematikens stormän, förf. skildrar, ett tillskott av stort värde.

Översättningen utmärkes av en ledig stil och torde — frånsett fel, som förekomma i alla översättningar — i det hela kunna betraktas som god. Nog måste man emellertid beklaga, att sakkunskapen ej rådfrågats i större utsträckning än som synes ha skett. En sådan felaktig övers. t. ex., som återfinnes på sid. 113 o. 114, borde icke få förekomma i en bok, som kommer att läsas av många icke-fackmän. Här översättes »momentum» med *»rörelseenergi = massa × hastighet»*, vilket ju bör vara *rörelsekvantitet*. På grund av detta fel och en olämplig tolkning av »rate of change» — som översättes med »relativ förändring» i st. f. med förändringshastighet eller förändring per tidsenhet — är Newtons andra lag i nuvarande form onjutbar. Den bör lyda t. ex. så: »rörelsekvantitetens förändring per tidsenhet är proportionell mot kraften etc.».

Att med en ciceron sådan som Bell, matematiker till facket och utrustad med ett öppet sinne för det mänskliga, få göra en utflykt i matematikens och matematikernas värld är en givande upplevelse för envar.

C. E. B.

Gradualavhandlingar.[1]

FOLKE TYRÉN, *Precision Measurements of Soft X-Rays with Concave Grating*. Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. Ser. IV. Vol. 12. N:o 1, Uppsala 1940. Disp. i Uppsala den 25 maj 1940. Opponenter: docent BENGT EDLÉN och fil. lic. V. HUGO SANNER.

De undersökningar, som lämnat materialet till förf:s avhandling, beröra ett aktuellt område av röntgenfysiken, nämligen den mjuka röntgenstrålningens spektroskopi. Inom detta område ha på senare år ivriga forskningar bedrivits i syfte att utröna exempelvis energifördelningen hos atomerna i en kristall, som är uppbyggd av element med lågt atomnummer. Detta problem har förf. upptagit till behandling i samband med en systematisk undersökning av K-emissionsspektra för de lätta elementen 14 Si fram till 7 N (med undantag för ädelgasen 10 Ne). Avhandlingen innehåller dessutom en precisionsbestämning av våglängden för några av de starkaste linjerna i spektrum av de tre förstnämnda elementen, nämligen kisel, aluminium och magnesium. Ävenså ha av förf. bedrivna ultraviolettspektroskopiska studier i det undersökta spetralområdet, 10 — 120 Å. E., givit till resultat en utvidgad analys av de högjoniserade atomernas, 9 F — 5 B, optiska spektra.

Alla undersökningar ha utförts med en konkavgitterspektrograf, vars optiska element äro monterade enligt den av ROWLAND angivna principen. Konkavgittret är ritsat på en spegel av glas

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

(radie 471 cm) och med en av Siegbahn konstruerad gitterdelningsmaskin. Antalet ritsor är 576 per mm. Glansvinkeln, d. v. s. vinkeln mellan den infallande strålningen och gitterytan, är blott 1°, vilket enligt teorin (om man bortser från absorptionen i gitterytan) är lika med totalreflexionsvinkeln (mot glas) för ljus av våglängden 7 Å. E. Detta värde representerar alltså i våglängdsmått den kortvågiga gränsen för spektrografens reflexionsförmåga. Dispersionen, som beror av bl. a. glansvinkeln och gittrets krökningsradie, är utomordentligt stor, och dess inversa värde varierar mellan 0,20 och 0,40 Å. E. per mm i våglängdsområdet 20 — 100 Å. E.

K-emissionsspektra av elementen fluor, syre och kväve ha undersökts hos ett flertal olika föreningar. Fluorspektrum uppvisar samma karakteristiska linjesystem som spektra av element med högre atomnummer. Man återfinner sålunda icke blott diagramlinjerna utan även icke-diagram-linjerna (hos dessa senare synes en intensitetsväxling äga rum). Förf. har lyckats påvisa ett normalt K-spektrum även hos syreatomen (i vissa oxider), vilket givit anledning till en systematisk undersökning av detta spektrum. Det vill därvid synas, enligt förf:s tolkning av de experimentella resultaten, som om man för syreatomen hos de undersökta oxiderna har att räkna med väsentligen två olika elektronkonfigurationer. En av dessa konfigurationer är sannolikt $2p^6$, d. v. s. en neonkonfiguration, och den andra av typen $2p^5$ med den återstående elektronen i någon av de yttre kristallnivåerna. Den spektrala karaktären hos dessa båda oxidtyper är helt olika. Blott den förra ger ett normalt K-spektrum.

För kväve har blott en enda förening kunnat undersökas, nämligen bornitrid. Övriga kväveföreningar ha mer eller mindre sönderfallit under försöken. Undersökningen visar, att detta spektrum liksom syrespektrum består av ett flertal komponenter.

Linjer tillhörande K-emissionsspektra av elementen kisel, aluminium och magnesium ha uppmätts med stor precision för att genom jämförelse med motsvarande våglängdsvärden i den konventionella kristallskalan bestämma reduktionsfaktorn, d. v. s. värdet av 1 X-enhet i absolut mått. Då storleken av denna är beroende av ett antaget värde på kalkspatens gitterkonstant, erhåller man även värdet av denna storhet i absoluta enheter. Med noggrann kännedom om övriga kristallografiska data, som gälla för kalkspatkristallen, är man vidare i stånd att beräkna värdena på två av fysikens fundamentala konstanter, nämligen Avogadros konstant och elementarladdningen. De av förf. på detta sätt beräknade värdena äro: reduktionsfaktorn $= 1{,}00199 \pm 0{,}00007$; kalkspatens gitterkonstant, $d_{\mathrm{CaCO_3},\ 18^\circ\mathrm{C}} = (3{,}03547 \pm 0{,}00020)$ Å. E.; Avogadros konstant,

$N = (6{,}023 \pm 0{,}004) \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$; elementarladdningen, $e = (4{,}803 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-10}$ e. s. e. De angivna felgränserna ha erhållits genom summation av de relativa felen hos samtliga de storheter, som bestämma ifrågavarande konstanter.

Slutligen har förf. med denna metod registrerat ett flertal nya linjer i det extremt ultravioletta spektralområdet, tillhörande de högsta jonisationsstadierna hos atomer av elementen 9 F till 5 B, och därigenom kompletterat och utvidgat det standardsystem av H- och He-liknande linjer, som använts vid relativmätningar i detta spektralområde. Några linjer i N VII och den starkaste linjen i O VIII ha sålunda för första gången observerats, och registreringen av nya linjer i det He-liknande spektret har gjort det möjligt att noggrant beräkna termvärdet för bl. a. grundtillståndet $1s^2\ {}^1S_0$.

Lars Gunnar Sillén, *X-Ray Studies on Oxides and Oxyhalides of Trivalent Bismuth,* Stockholm 1940. Disp. vid Stockholms Högskola 14 dec. 1940. Opponenter: professor Gunnar Hägg och fil. lic. Harry Arnfelt.

Arbetets ursprungliga syfte var att utröna sambandet mellan de olika former av vismuttrioxid, Bi_2O_3, som beskrivits i litteraturen. Åt denna fråga är del I ägnad. Vissa försök vid denna undersökning gåvo icke de resultat som förf. åsyftat men ledde i stället till upptäckten av två nya slag av föreningar, nämligen blandade vismutoxider (del II) och blandade vismutoxihalogenider (del III).

I. Blott två former av ren Bi_2O_3 ha kunnat framställas, här kallade α- och β-Bi_2O_3. Den förstnämnda är stabil vid vanlig temperatur och är monoklin, ej rombisk såsom uppgivits av tidigare författare. Högtemperaturformen β-Bi_2O_3 har för första gången kunnat underkylas i större mängd. Den är vid rumstemperatur tetragonal, och atomanordningen visar intressanta likheter med strukturen av kubisk As_2O_3 och Sb_2O_3.

Om man till en lösning av ett vismutsalt sätter alkali i överskott och kokar blandningen i en glasbägare, får man efter någon tid små kubiska kristaller. Dessa ha ej — såsom tidigare ansetts — sammansättningen Bi_2O_3 utan $SiBi_{12}O_{20}$ (kisel kommer från glaset), en väldefinierad förening, som också kan framställas genom sammansmältning av SiO_2 och Bi_2O_3. Likartade föreningar ha framställts med Pb^{4+}, Al^{3+} och Fe^{3+} i stället för Si^{4+}.

II. Vid sammansmältning av CdO, PbO eller SrO med Bi_2O_3 bildas fasta lösningar, d. v. s. faser med föränderlig sammansättning, t. ex. $Cd_{2x}Bi_{2-2x}O_{3-x}$ (stabil med $x = 0{,}16 - 0{,}27$). Dessa blandoxider kunna knappast sägas vara bismutit, likartade med antimonit eller arsenit. Liksom många andra fasta faser beskrivas de bäst genom atomanordningen. I dessa föreningar synes den fasta stommen utgöras av metalljonerna, medan syregittret är defekt; ett växlande men alltid avsevärt antal av de platser, som kunna upptagas av syrejoner, stå tomma.

I de allra flesta hittills kända oxidfaser är förhållandet det omvända: stommen i strukturen är ett kompakt syregitter, medan luckor ofta finnas bland metalljonerna. I själva verket voro dessa vismutblandoxider de första påvisade fallen av defekt syreskelett.

III. De blandade vismutoxihalogeniderna upptäcktes av en ren slump vid ett misslyckat försök att framställa stora kristaller av α-Bi_2O_3 genom smältning med LiCl. Därvid uppstod en ny förening $LiBi_3O_4Cl_2$, vars atommönster visade sig vara mycket enkelt och på flera sätt ovanligt. Denna upptäckt ledde förf. att systematiskt leta efter liknande blandade oxihalogenider. Atommönstret uträknades för de faser — tillsammans 23 stycken — som i likhet med den först funna litiumföreningen bilda (tetragonala) plattor.

Ehuru de kemiska formlerna skifta mycket, äro alla dessa föreningar uppbyggda efter en gemensam princip. I samtliga finnas nämligen flak av metall- och syrejoner av sammansättningen $(MeO)_n$; i dessas mycket enkla mönster är enheten kvadratisk, och sidan är nästan densamma i alla dessa ämnen, nämligen 3,8 — 4,1 Å, vilket avstånd återkommer som a-axel i den tetragonala enhetscellen. De olika metall-syreflaken äro åtskilda av enkla, dubbla eller tredubbla halogenskikt, vilka för korthetens skull betecknas med X_1, X_2 och X_3 ($X =$ halogen).

Enkla halogenskikt, X_1, förekomma i en rad föreningar med den allmänna formeln Me_2O_2X, såsom $BaBiO_2Cl$, $CdBiO_2J$ och $LiBi_3O_4Cl_2$. Dubbla halogenskikt finnas i de enkla ämnena BiOCl, BiOBr och BiOJ, som tidigare undersökts av Bannister och Hey. Tredubbla skikt, X_3, förekomma slutligen i oxikloriden $Cd_{4-3x}Bi_{2+2x}O_4Cl_6$ ($x = 0{,}4 — 0{,}6$) och motsvarande oxibromid; inne i varje X_3-skikt finns ett ofullständigt kadmiumskikt.

I vissa föreningar omväxla två olika slag av halogenskikt. I föreningen $SrBi_3O_4Cl_3$ är vartannat halogenskikt dubbelt och vartannat enkelt; den kan sålunda betecknas med X_1X_2. Även föreningar med skiktföljderna $X_1X_1X_2$, X_2X_3 och $X_2X_2X_3$ ha kunnat framställas. — Stundom uppträda i samma kemiska system en rad föreningar med olika halogenlagring. Sålunda kan man ur smält $SrBr_2$ kristallisera föreningarna $SrBiO_2Br$ (X_1), $SrBi_2O_3Br_2$ ($X_1X_1X_2$), $SrBi_3O_4Br_3$ (X_1X_2) och BiOBr (X_2).

Åtskilliga av strukturerna ha bestämts med hjälp av s. k. Patterson-analys.

Föredrag under hösten 1940 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Kemiska Föreningen, ordf. fil. dr K. E. Thomé, sekr. fil. lic. Ido Leden.

Föredrag: docent B. Adell, Citronsyrans dissociationsförhållanden i natriumkloridlösningar (27/9); amanuens I. Leden, Om några kadmiumsalters dissociation (27/9); fil. lic. G. Sjöström, Fosfatasenzymet i mjölken (25/10); fil. lic. B. Sjöberg, Några merkaptansynteser med tioättiksyra (29/11); amanuens T. Nilsson, Sulfoner som mellanprodukter vid hydrolys av halogensubstituerade alifatiska sulfonsyror (29/11).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Danielson.

Föredrag: lärov.adj. S. Comét, Om matriser (25/10); Dr. F. Wolff, Harmoniska funktioner (15/11 och 25/11).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. amanuens B. Grabe.

Föredrag: prof. G. Borelius, Selenundersökningar och halvledareproblem (23/9); prof. A. Odencrants, Det optiska glasets egenskaper och framställning (tills. med Fotografiska Föreningen 8/10); prof. J. Hartmann (Köpenhamn), En akustisk generator, med demonstration och filmförevisning (2/11); fil. lic. E. Fredlund, Om radiometereffekten (11/11); prof. W. Heiskanen (Helsingfors), Den isostatiska jämvikten i jordskorpan (tills. med Svenska Geofysiska Föreningen 22/11); prof. N. Bohr (Köpenhamn), Nyare kärnfysikaliska undersökningar (föredrag anordnat av Stockholms Högskola 28/11).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. fil. dr. fru Anna Beckman.

Föredrag: fil. lic. G. Ehrensvärd, Nervledningen, nyare teorier, med experiment (2/12).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. E. Brunius.

Föredrag: fil. lic. L.-G. Sillén, Några nya typer av oxihalogenider (11/11); prof. A. Tiselius, Om virus från kemisk synpunkt (29/11).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. kand. B. Kjellberg.

Föredrag: fil. mag. G. Borg, Om ett minimalproblem (5/12).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Gunnar Kellström, v. ordf. docent B. Edlén.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. S. Brohult.

Föredrag: prof. R. Nilsson, Om cellstrukturens betydelse för det harmoniska förloppet av cellens ämnesomsättning (27/9); prof. B. Holmberg, Om ligninets tioglykolsyreföreningar (19/11); prof. A. Tiselius, Det kemiska teckenspråket före Berzelius (17/12). Tillägg till föredrag under våren 1940: docent O. Lamm, Oorganiska högpolymerer (7/6).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1940: 3—4.

Ur innehållet: H. Köhler, Temperaturfluktuationer och något om deras samband med solfläcksfrekvensen; T. Elvius, Om kometerna; N. V. E. Nordenmark, Några svenska Herschelminnen; N. V. E. Nordenmark, Några återfunna Wargentinmanuskript.

Svensk kemisk tidskrift, 1940: 11—12, 1941: 1.

Ur innehållet: K. Myrbäck, Über die Oxydation der Aldosen durch Hypojodit IX; G. Sjöström, Fosforbestämningar i mjölkfett, erhållet vid fettbestämningar å mjölk; S. Ranta, Kemi och kemister i Finland; T. Nilsson, δ-Valerosulton; K. Myrbäck och L. Enebo, Alkoholjäsning av mjölksocker i vassle; E. Larsson, α-Oxi-α-metyltiodiättiksyra; E. Adler und S. Kyrning, Über den Mechanismus der Härtung von Resolen; K. E. Zimens und J. A. Hedvall, Orientierende Messungen über die Beeinflussung der magnetischen Suszeptibilität durch Struktur- und Gefügeänderungen; H. Willstædt, Über den Vitamingehalt einiger essbarer Pilze. Meddelande från Sveriges Kemiska Industrikontor: Konstsilke och konstull.

Ljuskultur, 1940: 1—4.

Ur innehållet: Den nya ljusenheten; Terminologi i belysningstekniken; Belysningsekonomi; Undersökning av belysning i teckningssalar; Nya Ulampor; Thulehusets belysning med lysämneslampor; Läsbelysning; En enkel metod för beräkning av belysning från linjelampor.

Flygning, 1940: 22—24, 1941: 1—3.

Ur innehållet: Segelflyg och meteorologi; Isbildning på flygplan; Uppvindarna och deras orsaker; Fallskärmshopp från stratosfären; Luftfartsmedicinens grunder; Flygaren och motorn; Propellerproblem; Några instrument för undersökning av de högre luftlagren.

Teknik för alla, 1940: 40—44, 1941: 1—8.

Ur innehållet: Teknik på farfars tid; Vår industris anor; Flygningens teori i populär framställning; Växelströmsgenerator för mycket låga frekvenser; Ångbilar och ångflyg; Från kinesisk linborrning till diamantborrning; Mikrofotografering med enkla medel; Telegrafi på millimetervåglängd; Flytande gas som drivmedel för bilar; Mikroskopet avslöjar K-silkets hemligheter; Hur ögat bedrar oss; Räknestickan, en elementär handledning; John Ericsson och hans varmluftsmaskiner; Leonardo da Vinci, universalgeniet; Perpetuum mobile; Underjordisk förgasning av kol; Gengas för alla.

Populär Radio, 1940: 11—12, 1941: 1.

Ur innehållet: Mätmetoder för ultrakorta vågor; Mottagarrörens verkningssätt; Tillverkning av dekadmotstånd och dekadkondensatorer för experiment; Åskforskningen; Elektrolytkondensatorn; Radioteknisk revy.

Fysisk Tidsskrift, København 1940: 5—6.

Ur innehållet: M. Nielsen, En Metode til Bestemmelse af Hudens Varmeudstraalingsevne; J. Koch, Sekundærelektroner; M. Pihl, Røntgenstrålernes biologiske virkning; H. Hansen, Magnetismen som en relativistisk Korrektur til Elektricitetslæren; C. M. Hvorslev, Forsøg over Faseforskydningens Afhængighed af Selvinduktion og Kapacitet; N. Wieth-Knudsen, Eksperimentel Begrundelse for Formeln $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

(Forts. sid. 58.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1147) *Om en triangels hörn speglas i motstående sidor, bilda spegelbilderna en liksidig triangel. Beräkna den ursprungliga triangelns vinklar.* *X.*

1148) *Att konstruera en fyrhörning, då sidornas längder äro givna och två närbelägna vinklar skola vara lika stora.* *S. B.*

1149) *Hur skall ett rektangulärt bord placeras i ett rektangulärt rum, vilket icke är så mycket större än bordet, för att man skall komma lättast fram runt bordet?* *N. J.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1150) Beräkna värdet av $\frac{\log a + \log 2}{\log b}$, om $\log\left(\frac{a+2}{b}\right) = \frac{1}{2}$ och $\frac{\log (a+2)}{\log b} = 2$.

Svar: log 256.

1151) Ett lån, som löper efter 6 %, amorteras på 20 år. Vid varje halvårs slut betalas ränta för det gångna halvåret och dessutom $\frac{1}{40}$ av det ursprungliga lånebeloppet. När inträffar det första gången, att det inbetalade beloppet blir mindre än om lånet amorterats med sinsemellan lika annuiteter vid varje halvårs slut?

Svar: Efter $8\frac{1}{2}$ år.

1152) Bissektrisen och höjden från samma hörn i en triangel dela en av de andra höjderna i tre lika delar. Visa, att triangelns sidor förhålla sig som $2 : 3 : \sqrt{7}$.

1153) I triangeln ABC dragas från A höjden, bissektrisen och medianen, vilka råka BC i resp. D, E och F. Sträckorna BD, DE och EF äro lika långa. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: $A = 82^\circ,81$; $B = 69^\circ,30$; $C = 27^\circ,89$.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1150—1158, 1160—1161 äro insända av *B-r*, 1159 av *T. Edqvist.*

1154) Med sträckan $AB = 2r$ som diameter ritas en halvcirkel. Från punkterna P och Q på dess båge dragas normalerna PC och QD mot AB. Bågarna AP, AQ och AB bilda en aritmetisk serie, sträckorna AC, CD och DB bilda likaledes aritmetisk serie. Beräkna de sistnämnda sträckornas längder.

Svar: $AC = \frac{r}{12}(7 + \sqrt{33})$; $CD = \frac{2r}{3}$; $DB = \frac{r}{12}(9 - \sqrt{33})$.

1155) Tre kantlinjer i en kub äro AB, AC och AD. I vilket förhållande delar planet BCD den kring kuben omskrivna sfärens volym?

Svar: 7 : 20.

1156) I triangeln ABC är vinkeln $A = 90°$, D är mittpunkten på BC och E mittpunkten på AC. Om triangeln CDE roterar kring AB, blir den av CD alstrade ytan lika med summan av de ytor, som alstras av CE och DE. Beräkna förhållandet mellan sidorna i triangeln ABC.

Svar: 5 : 12 : 13.

1157) En rät cirkulär kons basradie och höjd förhålla sig som 3 : 4. Ett klot har sin medelpunkt O på konens höjd AB och tangerar dess basyta i B. Vidare är $BO : OA = 3 : 4$. Hur stor del av klotets yta ligger utanför konen?

Svar: 48 %.

1158) I en fyrsidig pyramid med basytan $ABCD$ och spetsen O har varje kantlinje längden a. Pyramiden skäres av ett plan, som går genom A samt genom mittpunkterna av OB och OD. Beräkna snittytans storlek.

Svar: $\frac{a^2\sqrt{5}}{6}$.

1159) Ett vinglas hade form av en stympad kon, som i sin nedre, smalare del fortsattes av ett sfäriskt segment, varvid konens sida tangerade segmentets buktiga yta. De för mätningar lättast tillgängliga dimensionerna voro: mynningsdiametern = 4 cm, glasets djup = 6 cm, den stympade konens sida = 5 cm. Hur många centiliter rymde glaset?

Svar: 4,45 cl. Klotradien beräknas till $\frac{5}{4}$ cm och segmentets höjd till $\frac{18}{17}$ cm.

1160) A och B äro ändpunkterna av parametern i parabeln $y^2 = 2px$, O är vertex och P en rörlig punkt på kurvan. Sök orten för skärningspunkten mellan AP och en linje genom B parallell med OP.

Svar: Parabeln $y^2 = 4px - p^2$.

1161) Bestäm ett tal a sådant, att kurvorna $y = 3\cos x$ och $y = a\sin x + \cos x$ skära varandra vinkelrätt samt angiv skärningspunkternas y-koordinater.

Svar: $a = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$; ± 2.

Lösn. till uppg. 1116—1118.

1116) *Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, då den båge av parabeln $y = ax^2$, som avskäres av räta linjen $y = kx$, roterar ett varv kring denna räta linje.* *Stig Comét.*

Linjen $y = kx$, där k antages positiv, skär parabeln i O och $P\left(\frac{k}{a}; \frac{k^2}{a}\right)$. Diametern till OP skär denna i $A\left(\frac{k}{2a}; \frac{k^2}{2a}\right)$ och parabeln i $B\left(\frac{k}{2a}; \frac{k^2}{4a}\right)$ Enligt en sats av Arkimedes ligger segmentets tyngdpunkt T på AB så, att $AT : TB = 2 : 3$; T blir då $\left(\frac{k}{2a}; \frac{2k^2}{5a}\right)$, och dess avstånd från OP är $\frac{k^2}{10a\sqrt{1+k^2}}$. Segmentets yta är $\frac{4}{3}$ av triangeln OBP, alltså $\frac{k^3}{6a^2}$. Rotationskroppens volym är då enl. Guldins regel $\frac{\pi k^5}{30a^3\sqrt{1+k^2}}$.

B-r.

Även löst av *E. Smn.*, *Lwl.*, *S. L.*, *D. Hjelle* och *L. Krogset.*

1117) *Funktionerna* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *och* $Y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ *äro givna. Då* $y = Y$, *är deras gemensamma värde* d_1 *eller* d_2. *Då* $y - Y$ *är extremum, är antingen* $y = p_1$, $Y = P_1$ *eller* $y = p_2$, $Y = P_2$. *Visa geometriskt, att* $d_1 + d_2 = p_1 + P_1 = p_2 + P_2$. *X.*

Om x uttryckes i y och införes i uttrycket för Y, fås ett nytt samband $Y = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, motsvarande en liksidig hyperbel. Om de nämnda speciella y- och Y-värdena äro reella, skär linjen $y = Y$ den ena hyperbelgrenen i två symmetriskt belägna punkter, vilkas mittpunkt $A\left(\frac{d_1+d_2}{2}; \frac{d_1+d_2}{2}\right)$ ligger på reella axeln. Extremvärden för $y - Y$ erhållas för de båda vertices. Vertex $(p_1; P_1)$ och punkten $(P_1; p_1)$ ligga symmetriskt till linjen $y = Y$; deras mittpunkt sammanfaller då med A. Således är $d_1 + d_2 = p_1 + P_1$ och på samma sätt fås $d_1 + d_2 = p_2 + P_2$.

B-r.

Även löst av *N. J.*

1118) *I talteorien visas, att varje primtal p kan skrivas* $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, *där a, b, c och d äro hela tal eller 0. Använd denna sats för att bevisa, att varje tal kan skrivas som en summa av fyra (ev. mindre antal) heltalskvadrater.*

B. Lindwall.

Genom bestämning av tecknen så, att produkttermerna försvinna, finner man identiteten $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = (Aa + Bb + Cc + Dd)^2 + (Ab - Ba \pm Cd \mp Dc)^2 + (Ac \mp Bd - Ca \pm Db)^2 + (Ad \pm Bc \mp Cb - Da)^2$, ur vilken ytterligare andra sådana kunna erhållas genom teckenändring. Om de båda faktorerna på vänstra sidan beteckna primtal, kan således deras produkt på ett flertal sätt skrivas som en summa av fyra heltalskvadrater. Om denna produkt sammanställes med en primtalsfaktor, kan således varje produkt av tre primtal uttryckas på samma sätt o. s. v.

Löst av *B-r.*, *S. L.*, *Sven Andersson.*

(Forts. från sid. 54.)

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1940: 4.

Ur innehållet: F. J. M. Stratton, Novaer og Supernovaer; K. Thernøe, Observationer af Solens Corona og Protuberanser uden for totale Solformørkelser; O. Hesselberg, Vurdering af Tiendedeler i smaa Længde- og Tidsintervaller; Iakttagelser af foranderlige Stjerner; Salg af ældre Aargange af Nordisk Astronomisk Tidsskrift til væsentlig nedsat Pris.

Naturens Verden, København 1940: 8—10.

Ur innehållet: I. Lehmann, Jordrystelsen i København den 27. sept. 1940; I. Bertelsen, Elektriske Jordbundsundersøgelser; E. F. Fogedby, Om virusarterne, specielt Mund- og Klovesygens Virus; E. S. Nielsen, Vækststoffer i Havet og deres Betydning for Planteplanktonet.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1940: 4.

Ur innehållet: R. Tambs Lyche, Om Rolles sætning; L. Reitan, Nogen betraktninger over et tallteoretisk emne; L. Reitan, Den eulerske funksjon og dens talltre; Th. Skolem, Nogon bemerkninger til L. Reitans artikler; O. M. Thalberg, Figurer og trigonometriske formler; Eksamensopgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo årg. 2, 1940 i ett häfte.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Professor L. Vegard 60 år; R. Widerøe, Vil atomenergi kunne utnyttes teknisk?; N. H. Moxnes, Elektronmikroskopet; J. Aars, Litt om spektrografer; O. Lindstad, Synsmåter og erfaringer fra fysikkundervisningen.

Naturen, Bergen 1940: 12 och 1941: 1—2.

Ur innehållet: A. Eriksen, Teleproblemet, dets fysikaliske og tekniske side; E. Føyn, Radioaktiviteten i havet; H. Haraldsen, Kunststoffer og deres anvendelse; E. Bjørkdal, Fra aerologiens arbeidsfelt.

Uppsatser av matematiskt och naturvetenskapligt innehåll under 1940 i följande tidskrifter:

Tidning för Sveriges läroverk: Inlägg om studentskrivningarna i matem.: i nr 22 och 25 av E. Wetterwik, i nr 23—24 av C. E. Sjöstedt och K. A. Wingårdh; En fysikers syn på biologien (nr 23—24); Premieböcker i naturvetenskapliga ämnen (nr 12).

(Forts. sid. 64.)

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1941.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x-y)=2, \\ 2x-\dfrac{3}{x-y}=x-y. \end{cases}$$

2. Summan av termerna i en oändlig geometrisk serie är 1, och summan av termernas kvadrater är 2. Beräkna summan av termernas kuber.
3. Vinkeln vid spetsen i en likbent triangel delas genom en rät linje i förhållandet 2 : 3. Den nämnda linjen bildar med basen en vinkel av 85°. I vilket förhållande delar linjen triangelns yta?
4. I triangeln *ABC* är vinkeln *A* 43°,60, sidan *AB* 13 cm och den inskrivna cirkelns radie 4 cm. Beräkna triangelns övriga vinklar.
5. Radien i en cirkelsektor *OMN* är 3 cm och medelpunktsvinkeln 120°. I sektorn inskrives en triangel *ABC*, så att *A* delar *OM* i förhållandet 1 : 2, *B* delar *ON* i förhållandet 2 : 1 (i båda fallen från *O* räknat) och *C* ligger mitt på bågen *MN*. Beräkna sidorna i triangeln *ABC*.
6. I ett likbent parallelltrapets med ytan 22 cm² är summan av de parallella sidorna 11 cm och den mindre av dessa sidor hälften så stor som en av de icke parallella sidorna. Beräkna trapetsets sidor och vinklar.
7. *P* är en punkt på hypotenusan *BC* i den rätvinkliga triangeln *ABC*. Beräkna förhållandet mellan triangelns sidor, då

$$PB : PA : PC = 1 : 2 : 3.$$

8. I en spetsvinklig triangel med basen 8 cm och höjden 10 cm inskrives en rektangel, så att dess bas faller utefter triangelns bas. Rektangelns höjd betecknas med x, dess yta med y. Uttryck y som funktion av x, och undersök denna funktion grafiskt. Angiv med tillhjälp av diagrammet eller på annat sätt det största värde, som rektangelns yta kan antaga.

Resultat: 1. $x_1=2$; $y_1=1$ och $x_2=-2$; $y_2=-1$. **2.** $2\frac{2}{7}$. **3.** 0,684 : 1 (= sin 20° : sin 30°). **4.** 106°,26 och 30°,14. **5.** Alla sidorna = $=\sqrt{7}$ cm. **6.** De parallella sidorna 2,5 cm och 8,5 cm, de övriga 5 cm; vinklarna 53°,13 och 126°,87. **7.** $a : b : c = 4 : \sqrt{10} : \sqrt{6}$. **8.** $y=\frac{1}{5}(10x-x^2)$; den största rektangeln är 20 cm² med höjd och bas resp. 5 cm och 4 cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Bestäm värdet på konstanten a i ekvationerna $4x^2 + ax - 3 = 0$ och $4x^2 - 16x + 3a = 0$, så att för vardera ekvationen summan av rötternas inverterade värden blir en och densamma. Angiv även ekvationernas rötter, sedan värdet på a bestämts.
2. Två av en triangels hörn ligga i punkterna (2; 0) och (6; 2), det tredje ligger på den räta linjen $x = -2$. Den del av triangelns yta, som ligger inom andra kvadranten, är 2 ytenheter. Bestäm triangelns yta.
3. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^3 + bx^2$, då man vet, att den skär x-axeln i punkten (4,5; 0) och att dess normal i denna punkt skär y-axeln i punkten (0; $^2/_3$).
4. Lös ekvationen $\cos 4x + 2 \sin 2x \cos x + 2 \cos 2x + 1 = 0$.
5. En rät pyramids basyta är en liksidig triangel. Pyramidens spets ligger i medelpunkten till en given sfär. Basytans hörn ligga på sfärens yta. Bestäm det största värde, som förhållandet mellan pyramidens och sfärens volymer kan antaga.
6. Los Angeles och Osaka ligga på ungefär samma geografiska bredd, 34°,5 *N*. Longituderna för de båda städerna äro 117°,5 *V* respektive 134°,5 *O*. Beräkna det kortaste avståndet mellan orterna *a*) utefter parallellcirkeln, *b*) utefter jordytan, d. v. s. utefter storcirkeln genom orterna. Jorden betraktas som en sfär med omkretsen 4 000 mil.
7. A och B äro två godtyckliga punkter på kurvan $y = x^2$. Tangenterna till kurvan i dessa punkter skära varandra i C. Visa, att abskissan för C är aritmetiskt medium till abskissorna för A och B samt att ordinatan för C är medelproportional till ordinatorna för A och B, med positivt eller negativt tecken, allt efter som A och B ligga på samma eller på olika sidor om y-axeln.
8. Två från början lika stora kapital växa med ränta på ränta under ett jämnt antal år. Det ena förräntas halva tiden efter p % och halva tiden efter q %. Det andra förräntas hela tiden efter $\frac{p+q}{2}$ %. I vilket fall blir slutkapitalet störst?

Resultat: 1. $a = 4$ med rötterna $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, 1 och 3; $a = -4$ med rötterna $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ och $2 \pm \sqrt{7}$. 2. Triangelns yta = 16 ytenh. Drag medianen från (2; 0), som blir parallell med y-axeln och = 4 längdenh. 3. $a = \frac{1}{3}$ och $b = -\frac{3}{2}$; $y_{\max} = 0$ för $x = 0$; $y_{\min} = -4{,}5$ för

$x = 3$. 4. $90° + n \cdot 180°$; $210° + n \cdot 360°$; $330° + n \cdot 360°$. 5. $1 : 8\pi$. 6. a) 989 mil, b) 929 mil. 7. Ekv. för tangenterna i $A(x_1;\ y_1)$ och $B(x_2;\ y_2)$ bli $y = 2xx_1 - x_1^2$; $y = 2xx_2 - x_2^2$, varur för C fås $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ och $y = x_1x_2 = \pm\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2}$. 8. I senare fallet. Det gäller att visa, att det aritmetiska mediet är större än det geometriska, i detta fall att $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 > pq$, vilket t. ex. framgår av att skillnaden $= \frac{(p-q)^2}{4}$ är positiv.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Sök maximi- och minimivärdena av funktionen
$$\cos 2x - 2 \sin x - 1.$$
2. Ekvationerna för två cirklar äro $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ och $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$. En punkt P är så belägen, att summan av kvadraterna på de fyra tangenterna från P till cirklarna är 66 ytenheter. Sök orten för P. Angiv dess ekvation, konstruera den och undersök, om hela den erhållna kurvan svarar mot problemet.
3. Kurvan $y = f(x)$, där $f(x)$ är en hel rationell funktion av tredje graden, tangerar linjen $x - y = 0$ i origo samt har ett maximum för $x = 1$ och en inflexionspunkt för $x = -\frac{1}{2}$. Bestäm $f(x)$ och konstruera kurvan.
4. Två fyrhörningar äro inskrivna i en ellips. Den enas hörn äro belägna i parametrarnas, den andras i axlarnas ändpunkter. Bestäm excentriciteten hos den ellips, i vilken förhållandet mellan ytorna av dessa fyrhörningar, tagna i nyss nämnd ordning, är så stort som möjligt.
5. Abskissorna för punkterna A och B på parabeln $2py = x^2$ äro a och b, där $a > b$. Diametern till kordan AB skär parabeln i punkten C. Bevisa, att ytan av triangeln ABC är
$$\frac{(a-b)^3}{16p}.$$
6. I tvenne konjugathyperbler synas parametrarna från medelpunkten under vinklarna 2α och 2β. Bevisa, att $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = e_1 + e_2$, där e_1 och e_2 äro hyperblernas excentriciteter.
7. Skillnaden mellan abskissorna för två punkter A och B på kurvan $2y = x^2 - 4x + 6$ är en längdenhet. A och B sammanbindas med origo O. Studera, hur ytan av triangeln OAB varierar, då punkterna A och B genomlöpa kurvan, och åskådliggör detta grafiskt.

Resultat: 1. $y_{\max} = \frac{1}{2}$ för $x = 210° + n \cdot 360°$ och $x = 330° + n \cdot 360°$; $y_{\min} = -4$ för $x = 90° + n \cdot 360°$ och $y_{\min} = 0$ för $x = 270° + n \cdot 360°$. **2.** Den del av cirkeln $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, som faller utanför de givna cirklarna. 3. $12y = 12x - 3x^2 - 2x^3$ [$y_{\max} = \frac{7}{12}$ för $x = 1$; $y_{\min} = -1\frac{2}{3}$ för $x = -2$]. 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. Om M är AB:s mittpunkt, så är $\triangle ABC = \frac{a - b}{2} \cdot \overline{MC}$ o. s. v. **7.** Om x är den mindre abskissan, blir $\triangle OAB = T = \pm \frac{1}{4} \frac{(x + 3)(x - 2)}{}$, där minustecknet gäller för $-3 < x < 2$; $T = 0$ för $x = -3$ och $x = 2$, $T_{\max} = \frac{25}{16}$ för $x = -\frac{1}{2}$. Då x växer från $-\infty$ till $+\infty$, går T från $+\infty$ genom värdena 0, $\frac{25}{16}$ och 0 mot $+\infty$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En buss bromsas upp på en rak horisontell väg. Dess hastighet är i ett visst ögonblick 10 m/sek och 5 sek senare 6 m/sek. Bussens rörelse antages vara likformigt retarderad. Under det bromsningen pågår, faller en kropp i golvet. För enkelhetens skull antages, att det är fråga om en liten kula, som faller fritt och vid fallrörelsens början inte har någon hastighet relativt till bussen. Kulan befinner sig från början 1,8 m rakt över en punkt P på golvet. Var träffar den golvet?
2. Ett smalt rör, böjt i form av en cirkel med radien 25 cm, roterar omkring denna cirkels vertikala diameter. Omloppstiden är 0,8 sek. I röret finnes en liten kula, som utan nämnvärd friktion kan röra sig längs röret. Var i röret befinner sig kulan, då den är i jämvikt i förhållande till röret?
3. En lufttät glasballong väger 2,500 g och har vid 20° C en yttre volym av 2,000 cm³. Om den nedföres i en vätska, vars täthet vid 0° C är 1,280 g/cm³, flyter ballongen, men upphettas det hela till 80°, sjunker den nätt och jämnt ner genom vätskan. Glasets volymsutvidgningskoefficient är 0,000026; beräkna vätskans.
4. För att bestämma vinkeln mellan syftlinjerna till två stjärnor A och B kan man begagna ett teleskop, vars objektiv är ituskuret längs en diameter. Ena halvan av objektivet är förskjutbar längs snittdiametern, varvid de båda halvlinsernas huvudaxlar förbli parallella. Kikaren riktas mot de båda stjär-

norna och vrides så, att dessa komma i samma plan som huvudaxlarna. Den ena objektivhalvan ger då bilderna A_1 och B_1, den andra bilderna A_2 och B_2. Den rörliga objektivhalvan inställes först så, att B_1 och A_2 sammanfalla, och förskjutes därefter så mycket, att i stället A_1 och B_2 komma att sammanfalla. Objektivets brännvidd antages vara 2,8 m och det stycke, den rörliga objektivhalvan förskjutits mellan de båda inställningarna, 3,96 cm. Beräkna synvinkeln mellan stjärnorna.

5. Ett optiskt plangitter i en spektrometer belyses med vinkelrätt infallande ljus, som omfattar våglängdsområdet från 4 000 till 7 600 ångström, och giver därvid ett fullständigt spektrum av tredje ordningen, vilket på vanligt sätt observeras i kikaren. Vilket våglängdsområde inom detta spektrum blir fritt från överlagring av ljus, som tillhör något spektrum med annat ordningsnummer?

6. En elektrisk kokapparat, som är väl värmeisolerad från omgivningen, innehåller en halv liter vatten. Det hela har en temperatur av 18° C. Anslutes apparaten till en väggkontakt med spänningen 220 volt, börjar vattnet koka efter 7,5 min. Om vattenmängden i apparaten i stället från början är en liter, dröjer det 12 min, innan kokningen börjar. Beräkna motståndet i kokapparaten. Motståndet antages oberoende av temperaturen.

7. Med en ackumulators verkningsgrad menas vanligen förhållandet mellan den energi, som uttages under ackumulatorns urladdning, och den energi, som tillföres, då den sedan åter laddas upp till sitt ursprungliga tillstånd (verkningsgraden med avseende på *energien*). Stundom definieras dock verkningsgraden som förhållandet mellan det uttagna och tillförda antalet ampèretimmar (verkningsgraden med avseende på *elektricitetsmängden*). Beräkna verkningsgraderna med avseende på energi och elektricitetsmängd för en nifeackumulator, som normalt laddas med 2,0 ampère under 5 timmar vid en genomsnittlig polspänning av 1,6 volt och normalt urladdas med 1,5 ampère under 5 tim 40 min vid en genomsnittlig polspänning av 1,2 volt. Ackumulatorns inre motstånd är mycket litet.

8. Ofta använder man för att analysera en växelspänning ett instrument, som kallas oscillograf. Instrumentet åstadkommer på en skärm en lysande kurva, som är en sinuskurva, om den undersökta spänningen själv är sinusformad. Ibland sammanbyggas två sådana instrument. Man får på så sätt ett instrument med fyra anslutningsklämmor *A*, *B*, *C* och *D*. Anlägges en växelspänning på klämmorna *A* och *B* och en annan på klämmorna

C och *D*, ritar instrumentet två kurvor. Vid korrekt injustering kan man av deras inbördes läge bestämma en eventuell fasförskjutning mellan de båda undersökta spänningarna. Man ville begagna ett sådant instrument för undersökning av en växelströmskrets, som i serie innehöll en växelströmsgenerator, en varmtrådsampèremeter, ett reglerbart induktionsfritt motstånd $A'B'$ och en spole $C'D'$ med järnkärna. Oscillografkretsen AB kopplades därvid parallellt med motståndet $A'B'$ och på samma sätt kretsen CD parallellt med spolen $C'D'$. När motståndet $A'B'$ reglerats till 11 ohm, fingo båda kurvorna samma amplitud och fasförskjutningen mellan dem uppmättes till 40°. Varmtrådsampèremetern visade samtidigt 3,6 ampère. Beräkna effektförbrukningen i spolen. Instrumentets båda kretsar ha mycket stort motstånd och giva lika stora utslag för lika spänningar.

Resultat: **1.** 14,7 cm framför *P*. **2.** Kulan befinner sig i nivå med en punkt 15,9 cm under det cirkulära rörets medelpunkt. **3.** 0,000320. **4.** 0°,40. **5.** Området mellan $\frac{2}{3}\cdot 7\,600$ Å och $\frac{4}{3}\cdot 4\,000$ Å, d. v. s. mellan 5 067 och 5 333 Å. **6.** 76,5 ohm. **7.** Verkningsgrad m. a. p. energi och elmängd är resp. 64 % och 85 %. **8.** 109 W.

(Forts. från sid. 58.)

Skola och Samhälle, 8 häften, 262 s.: N. Beckman, Skolastik och matematik i läroverkens logikundervisning; Elsa Bengtsson, Fram för större säkerhet och kombinationsförmåga i räkning; Å. Fältheim, Trevliga och tråkiga räkneuppgifter.

Skola och Hem, tidskrift utg. av Finlands svenska läroverksförening; 87 s. fördelade på två dubbelhäften: S. Segerstråle, Synpunkter på undervisningen i allmän biologi; dessutom recensioner av läroböcker i matematik och naturvetenskap.

Tidskrift, utg. av Pedagogiska föreningen i Finland; 189 s. fördelade på 5 häften; inga uppsatser på svenskt språk med matem.-naturv. innehåll förekomma.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja; 259 s. fördelade på 4 häften; innehållet är mycket rikhaltigt; följ. uppsatser äro skrivna på svenska: T. P. Lesch, Om en de koniska sektionerna beträffande relation; R. Meinander, Resultatet av matematikprovet vid studentskrivn. 1936—1939.

Den høgre Skolen, Oslo; 19 häften, 480 s.: F. Karlsen, Om regneoperasjoner med tallet 0 og om bruken av tegnet ∞ for »uendelig»; E. H. Sørensen, Bøker for fysikklærere; G. Kjellevold, Pol og polare; T. Thorstensen, Skolens steinsamling; K. Piene, Pythagoras og hans disipler; Th. Johansen, Projeksjonstegningen og matematikksensuren; J. Lohne, Elevøvinger i lyslæra. Referat från sektionsmöten: elevøvinger i fysikk; matematikk i 2. realskoleklasse; lektor Skjulstads sentrifugalapparat.

Syn og Segn, Oslo; 10 häften, 460 s.: A. Øye, Mineralemne og D-vitamin; J. Huus, Korleis greier dyra kulden?; S. Rosseland, Stjerneteljing.

Reflexioner över några polygonsatser.

Av **NILS JURINGIUS.**

Det följande är huvudsakligen innehållet i ett brev till fil. lic. ARNE PLEIJEL med anledning av hans artikel i Elementa, *22*, 14, 1939. Ehuru lic. Pleijel meddelat, att han även själv funnit ett elementärt bevis för sin huvudsats, vilande på konvexitetsresonemang, har han givit mig tillstånd att publicera nedanstående.

Avsikten med det följande är att söka giva det elementära bevis för huvudsatsen i lic. Pleijels artikel, vilket där efterlystes, och samtidigt visa, att alla satserna i denna artikel gälla för allmänna n-hörningar, samt att diskutera olika bevismetoder och satsernas räckvidd.

Innan dess vill jag emellertid förutskicka något om docent HARALD BERGSTRÖMS uppsats (Elementa, *21*, 187, 1938), som var upphovet till artikeln i fråga. Det geometriska bevis för sin sats, som docent Bergström efterlyser, ligger däri, att niopunktscirkeln, vars radie ju är hälften av den omskrivna cirkelns radie, tangeras innantill av den inskrivna cirkeln.[1] Det bevis, han efterlyser för den därmed ekvivalenta trigonometriska olikheten, följer av att kurvan $y = \log \sin x$ är konkav nedåt för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. F. ö. följer satsen direkt ur formeln i Elementa, *8*, 56: $d^2 = R(R-2r)$, där R är omskrivna och r inskrivna cirkelns radie samt d avståndet mellan dessa cirklars medelpunkter.

Lic. Pleijel har nu funnit en övre gräns för förhållandet mellan största minimalavståndet till en konvex n-hörning från en punkt inom densamma och minsta maximalavståndet till n-hörningen från en fix punkt; man kan också säga: det lineära förhållandet mellan största innercirkeln och minsta yttercirkeln. Den förra tangerar tre av polygonens sidor. Den senare är den entydigt bestämda cirkel, som till en diameter har sträckan AB mellan två polygonhörn sådana, att $\angle ACB$ ej är spetsig, vilket polygonhörnet

---

[1] Betr. niopunktscirkeln, se t. ex. A. E. HELLGREN, Allmänna metoder för plangeometriska problems lösning, del I, 3:e uppl., Stockholm 1906, s. 63, uppg. 243—244, eller utförligare M. ZACHARIAS, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1930 (de Gruyter), s. 128—129.

C än må vara, om två sådana hörn A och B existera. I annat fall är den den entydigt bestämda omskrivna cirkeln till den (spetsvinkliga) triangel ABC, där

$$\wedge ABC = \min \wedge ADC; \quad \wedge BCA = \min \wedge BDA; \quad \wedge CAB = \min \wedge CDB,$$

A, B, C, D polygonhörn. Något liknande gäller för polyedrar.

Blaschkes sats gäller nu för allmänna plana kurvor, vilkas löpande koordinater x och y äro funktioner av en parameter t, likformigt kontinuerliga i hela kurvmängden för varje fixt t. Speciellt gäller den för kurvor med likformigt begränsad båglängd inom ett begränsat område, alltså ej blott för konvexa (plana) figurer inom ett begränsat område. Hilberts diagonalförfarande kan användas på i varandra inneslutna delföljder av kurvor, på vilka ett växande antal punkter med rationellt t konvergera mot var sin punkt, och till slut utnyttjas kontinuiteten. För att bevisa sats *1* och sats *2* räcker det emellertid att tillämpa satsen, att en i en sluten mängd kontinuerlig funktion av ändligt många variabler uppnår sitt maximum i minst en och sitt minimum i minst en mängdpunkt.

Den åberopade artikelns satser *1* och *2* gälla för godtyckliga polygoner utan dubbelpunkter och dess huvudsats för godtyckliga polygoner. I denna sats men ej i sats *2* kan som största innercirkel till en polygon, på vilken multipelpunkter tillåtas, t. o. m. betraktas den största cirkel på vars alla radiers förlängning inklusive deras ändpunkt någon randpunkt till polygonen ligger. Huvudsatsen och sats *1* gälla a fortiori för dessa allmännare månghörningar, eftersom de gälla för deras konvexa hölje, vilket kan definieras som den minsta, dem omslutande konvexa polygonen eller den största konvexa polygon, vars hörnmängd är en delmängd av den ursprungliga polygonens hörnmängd. Liksom i beviset till sats *1* höljets hörn radiellt flyttas till den minsta yttercirkelns rand, ersättes n-sidingen i sats *2* med en konvex cirkel-p-siding med mindre yta, om så påfordras, där $p \leq n$, t. ex. med den konvexa, omkring den största innercirkeln omskrivna polygonen, bildad av tangenterna i cirkelns skärningspunkter med halvstrålarna från dess medelpunkt genom den ursprungliga polygonens hörn (att denna polygon ej har större yta än den ursprungliga, följer bl. a. av en formel, som angives senare, s. 67, rad 20).

Låt oss i förbigående observera, att för att bevisa huvudsatsen, t. o. m. på en halvsfär, två satser äro användbara, gällande den förra för konvexa, den senare för allmänna n-hörningar och vilka f. ö. erhållas ur sats *1* och sats *2* genom utbyte av ytan mot omkretsen.

I det följande kalla vi »centrifigurer» sådana figurer, som äro begränsade av två radier och antingen motsvarande korda eller de två motsvarande tangenterna till en cirkel (ytter- eller innercirkeln i vårt problem) och så beskaffade, att det ej finnes någon randpunkt till den betraktade cirkel-n-hörningen resp. cirkel-n-sidingen inom den båge av cirkeln, vilken upptages av deras centrivinkel, men väl i båda ändpunkterna av denna båge. Nu kunna vi, utan att villkoren ändras i sats *1* och *2*, godtyckligt omkasta centrifigurernas ordning. Speciellt kunna centrivinklarna tänkas följa på varandra i avtagande ordning, så att de tillsammans bilda ett varv kring den gemensamma spetsen.

Om man, i st. f. att, som i det redan publicerade beviset till sats *1*, göra två olika, bredvid varandra liggande centrivinklar exakt lika, endast närmar dem till varandra med bibehållande av deras summa, så ökas i alla fall cirkel-n-hörningens yta. Man har nämligen

$$2\sin a - [\sin(a+x) + \sin(a-x)] = 4\sin a \cdot \sin^2\frac{x}{2},$$

som växer med $|x|$, då $0 < a < \pi$ och $0 < |x| < a$. Genom samma operation minskas cirkel-n-sidingens yta i sats *2*, ty man har

$$\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg}(a-x) - 2\operatorname{tg} a = 2\operatorname{tg} a \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x},$$

som växer med $|x|$, då $0 < a < \frac{\pi}{2}$ och $0 < |x| < \min(a, \frac{\pi}{2} - a)$.[1] Motsvarande påståenden gälla även, om $-\sin x$ resp. $\operatorname{tg} x$ ersättas med en godtycklig konvex funktion, d. v. s. funktion representerad av en nedåt konvex kurva.

Samma resultat erhålles lika lätt för den inskrivna polygonen på följande sätt. Då den inskrivna polygonen transformeras genom flyttning av ett hörn längs cirkeln, så att centrivinklarna i två angränsande centrifigurer närma sig varandra, ökas polygonytan samtidigt med ytan av den av tre närliggande polygonhörn bestämda triangeln, vars bas är konstant, under det att dess höjd växer. För den omskrivna polygonen kan man använda någon av de i det följande nämnda bevismetoderna.

Vid den nyss gjorda diskussionen kan (med samma beteckningar som i Elementa, *22*, 14) $\wedge ABC + \wedge BCD$ vara $\leq \pi$, såsom när polygonen är en triangel. Gäller tecknet $<$, så skulle det behöva visas, att (med i triangelgeometrien vanliga beteckningar) den likbenta triangeln med $b=c$ gör T till minimum för givna a och $p-a$. Man kan emellertid bevisa ej blott denna sats och den i artikeln nämnda analoga satsen utan även vårt föregående påstående genom följande resonemang.

---

[1] Lektor JOSEF ANDERSSON är jag tack skyldig för angivande av de trigonometriska formler, som visa riktigheten av dessa påståenden.

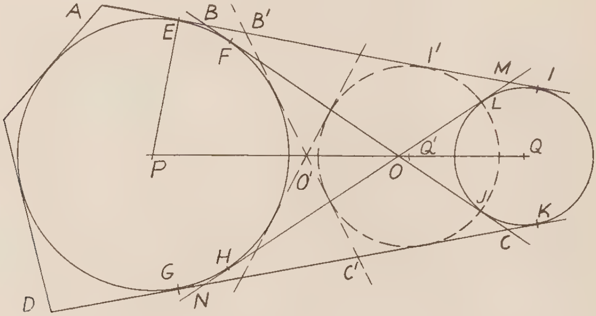


Fig. 1.

Välj F mellan B och C, M på AB och N på CD så, att E, F, G, H resp. I, J, K, L bliva tangeringspunkterna för de gemensamma tangenterna AB, BC, CD och MN till den givna cirkeln och en annan cirkel, och låt BC skära MN i O. Den givna cirkelns centrum må vara P och den andras Q. När BC närmar sig symmetriläget, ökas tangentvinkeln vid O; därvid minskas PO och således även PQ och GK. Men ytan $PEBCG = PG \cdot GK$, ty

$$EI = EB + BI = 2EB + FJ \text{ och } GK = GC + CK = 2CK + FJ,$$

varav följer $$EB = CK; \quad \because \; GK = GC + EB.$$

Man kan även avgöra polygonskillnadens (en triangelskillnads) tecken genom att på densamma använda formeln

$$T^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

för negativt d, där T, a, b, c, d, α, β, γ, δ beteckna arean samt sidorna och vinklarna i ordning tagna hos en fyrsiding, vars halva perimeter är p. Som denna är en cirkelfyrsiding i detta fall, går första termen bort. Man bör lägga märke till att det här är summan av två närliggande sidor, som är lika med summan av de båda övriga. Tecknet för den uppträdande kvadratroten erhålles genom att låta den rörliga tangenten intaga gränslägena, varvid den ena triangeln försvinner eller blir oändlig.

Ett tredje sätt, som generaliserat visar, att i rymden masscentrum för en polyederyta spelar samma roll som mittpunkten på en polygonsida i planet, är att uträkna

$$dT = \frac{1}{2}(BF^2 - FC^2)\,dw, \qquad \text{där } w = \wedge BCD.$$

Nu kan man för att undvika Blaschkes sats skaffa sig en konvergent process genom att upprepade gånger ersätta max v och min v med $\frac{1}{2}$(max v + min v), där v betyder medelpunktsvinkeln i en centrifigur; max v — min v nedbringas alltid åtminstone till hälften efter $\left[\frac{n}{2}\right]$ sådana operationer.

Men av mitt resonemang synes, att man kommer till målet med ändligt antal steg, om man närmar två centrivinklar, av vilka en ligger över och en under $\frac{2\pi}{n}$, till varandra, så att den ena blir $\frac{2\pi}{n}$ och summan hålles konstant.

Förutsättes teorien för konvexa (konkava) funktioner, framgår sats *1* utan vidare därav, att $\sin x$ är konkav för $0 < x < \pi$, och sats *2* därav, att $\operatorname{tg} x$ är konvex för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Det här åberopade resonemanget, vilket flera gånger kommit till användning i denna artikel, är följande: Är (X, Y) angreppspunkten för resultanten till m parallella, likriktade krafter, $p_1, \ldots, p_m$, anbragta i resp. punkterna $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ på en nedåt konvex kurva med ekvationen $y = f(x)$, så är Y, som genom bevis från n till $n + 1$ visas vara

$$Y = \frac{p_1 y_1 + \cdots + p_m y_m}{p_1 + \cdots + p_m},$$

tydligen större än ordinatan för den kurvpunkt, vars abscissa är X, alltså

$$\frac{p_1 y_1 + \cdots + p_m y_m}{p_1 + \cdots + p_m} > f\left(\frac{p_1 x_1 + \cdots + p_m x_m}{p_1 + \cdots + p_m}\right).$$

Satserna och deras bevis enligt denna metod låta överföra sig till geodetiska polygoner på ytor med konstant krökning, t. ex. sfären, endast med den ändringen, att man betraktar $y = \operatorname{arccot}(\cos R \operatorname{tg} x)$ och $y = \arccos(\cos r \sin x)$, där R och r äro reella eller rent imaginära, i st. f. $\sin x$ och $\operatorname{tg} x$. I båda fallen är det lämpligt att sätta $z = \frac{\pi}{2} - y$ och tillämpa regeln för första derivatan av en implicit funktion på ekvationerna

$$\operatorname{tg} z = a \operatorname{tg} x \quad \text{och} \quad \sin z = a \sin x$$

samt undersöka, om derivatan varierar monotont, vilket kan ske på följande sätt.

Låt AB vara axel, t. ex. storaxel, i en ellips och diameter i en cirkel med medelpunkten C. Låt $DF \perp AB$ skära AB i D, ellipsen i E och cirkeln i F. $\wedge DCF = x$, $\wedge DCE = z$. Då reduceras den första uppgiften till att studera den som bekant monotona variationen av CE.

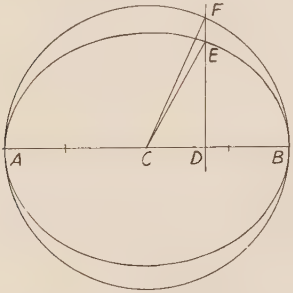


Fig. 2.

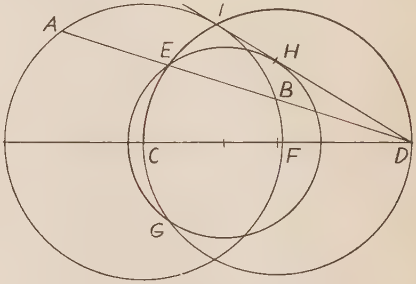


Fig. 3.

Låt E halvera och D ligga t. ex. på förlängningen av kordan AB i cirkeln ABF med centrum i C. $\wedge CAD = x$, $\wedge CDA = z$. Den andra uppgiften går då ut på en undersökning av $AE : ED$, och hur detta förhållande varierar, framgår på följande sätt: Om AD vrider sig kring D, beskriver E en del av en cirkel med CD som diameter. Vidare, om man utgår från ett godtyckligt fixerat läge av AD, därefter låter AD vrida sig kring D och därvid med E' betecknar en punkt på AB, sådan att $AE' : E'D = \text{konstant} = AE : ED$, så är orten för E' en cirkel (EHG), som är likställd med den givna cirkeln AIF och skär cirkeln CED i E och den därmed symmetriska punkten G. Då $\wedge CDA$ ökas, rör sig alltså mittpunkten E av AB från det inre till det yttre av cirkeln EHG, vilket innebär att förhållandet $AE : ED$ minskas. Detta gäller för varje läge av AD (mellan DC och DI), varför alltså $AE : ED$ varierar monotont. — Detta kan även inses därav, att förhållandena $\frac{AE}{ED}$ och $\frac{AE + ED}{ED \quad AE} = \frac{AD}{BD}$ variera på samma sätt (båda monotont eller båda icke monotont) och att $\frac{AD}{BD}$ uppenbarligen varierar monotont med $\wedge CDA$.

I en sfärisk triangel finnes en Harts cirkel med radien ϱ, där

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{1}{2} \operatorname{tg} R$$

(R = omskrivna cirkelns radie), så beskaffad, att den och inskrivna cirkeln tangera varandra innantill och den och de utomskrivna cirklarna tangera varandra utantill. Alltså är den större än den inskrivna cirkeln, utom för den liksidiga triangeln, för vilken dessa cirklar sammanfalla. Även härav följer

$$\operatorname{tg} R \geq 2 \operatorname{tg} r$$

(r = inskrivna cirkelns radie), där likhetstecknet endast gäller för liksidiga triangeln. Denna sats följer även ur relationen

$$(\sin d \sec R \sec r)^2 = \operatorname{tg} R (\operatorname{tg} R - 2 \operatorname{tg} r).$$

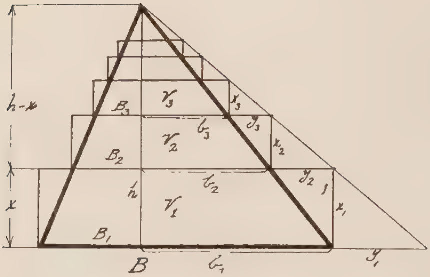
Här betyder d avståndet mellan in- och omskrivna cirklarnas centra. Begreppen »avstånd», »radie» och »centrum» uppfattas såsom brukligt är inom sfäriken.

En affintransformation i satserna *1* och *2* visar, att ej heller förhållandet mellan ytorna av den största innerellipsen och den minsta ytterellipsen till en n-hörning överskrider $\cos^2 \frac{\pi}{n}$, vilket maximum uppnås för en till en reguljär polygon affin polygon, t. ex. en godtycklig triangel för $n = 3$. Motsvarande satser gälla om en polygons konvexa hölje. Analoga satser om inner- och yttersfärerna och om inner- och ytterellipsoiderna till en tetraeder gälla även.

Att för polyedrar med fixt yt- eller hörnantal, n, förhållandena mellan en innerellipsoid eller innersfär och en ytterellipsoid eller yttersfär icke kunna ha ett maximum, som växer strängt med n, under förutsättning, att de reguljära polyedrarna maximera för vederbörande n-värden, synes därav, att dessa förhållanden äro lika för reciproka polyedrar. För att inse detta är det på grund av reciprociteten tillräckligt att visa, att vartdera maximalförhållandet för en polyeder av topologiskt given form ej kan vara större än motsvarande maximalförhållande för den reciproka polyedern. Detta följer därav, att en viss polarisation med avseende på en andragradsyta, vilken överför den största innerellipsoiden eller -sfären och den minsta ytterellipsoiden eller -sfären till en polyeder i varandra, transformerar denna polyeder i en till densamma reciprok polyeder, som har den inre ellipsoiden (sfären) till innerellipsoid (-sfär) och den yttre ellipsoiden (sfären) till ytterellipsoid (-sfär). Att satserna *1* och *2* icke låta sig fullständigt generaliseras till rymden på det sättet, att antalet ytor eller hörn hålles fixt, synes därav, att å ena sidan en kub och en oktaeder med volymförhållandet $\frac{\sin 90^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, å andra sidan en dodekaeder och en ikosaeder med volymförhållandet $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 120^\circ} > 1$ låta omskriva sig om den ena och inskriva sig i den andra sfären i ett och samma par. Detta visar även, att alla reguljära polyedrar ej kunna maximera de studerade proportionerna för fixt kantantal n.

En härledning av pyramidens volym.

Av **AXEL NORDHULT.**



Följande härledning av formeln för pyramidens volym förutsätter kännedom om geometriska serier, likformighet och satsen att likformiga ytor förhålla sig som kvadraten på motsvarande linjer.

Figuren är en sektion lagd genom pyramidens höjd. Pyramidens basyta är B och dess höjd h.

Pyramiden omslutes av ett oändligt antal sinsemellan *likformiga,* raka prismor med volymerna V_1, V_2, V_3 ..., basytorna B_1, B_2, B_3 ... och höjderna $x_1 (= x)$, x_2, x_3 .... Den första höjden x väljes godtyckligt. Prismavolymerna bilda en konvergent, oändlig geometrisk serie med första termen Bx och kvoten $\left(\frac{h-x}{h}\right)^3 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^3$.

$$\text{Alltså } V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = \frac{Bx}{1 - \left(1 - \frac{x}{h}\right)^3} = \frac{B}{\frac{3}{h} - \frac{3x}{h^2} + \frac{x^2}{h^3}}.$$

Om x går mot noll erhålles pyramidens volym som limesvärdet $V = \frac{Bh}{3}$.

Elever, som ej äga kännedom om likställighet, kunna exempelvis använda sig av den »geometriska trappan» till höger i figuren för att successivt fastställa höjderna x_2, x_3 ..., varefter det kan visas, att prismavolymerna bilda en geometrisk serie med kvoten $\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3$.

Likformigheten i figuren ger nämligen

$$\frac{h-x}{h} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_3}{y_2} = \frac{x_3}{x_2} = \ldots\ldots = k.$$

Vidare är

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{b_2^2}{b_1^2} = \frac{y_2^2}{y_1^2} = k^2; \text{ på samma sätt fås } \frac{B_3}{B_2} = \frac{B_4}{B_3} = \ldots\ldots = k^2.$$

Härav inses, att

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{B_2 x_2}{B_1 x_1} = k^3 \text{ och på samma sätt att } \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} = \ldots\ldots = k^3.$$

Prismornas volymer bilda alltså en geometrisk serie med kvoten

$$k^3 = \left(1 \quad \frac{x}{h}\right)^3.$$

Det är mig obekant, om denna uppdelningsmetod kommit till användning i den elementära matematikundervisningen vid härledning av pyramidens volym.

Om faktorer till tal av formerna $5^p - 1$ och $5^p + 1$.

Av **HJ. TALLQVIST.**

Det här meddelade är en fortsättning till de båda talteoretiska uppsatserna i Elementa 23: 4. Jag har kommit till följande två tabeller, där p betecknar ett primtal.

p	$S = \frac{1}{4}(5^p - 1)$	$T = \frac{1}{6}(5^p + 1)$
3	31	$21 = 3 \cdot 7$
5	$781 = 11 \cdot 71$	521 primtal
7	19531 primtal	$13021 = 29 \cdot 449$
11	12207031 »	$23 \cdot 67 \cdot 5281$
13	305175781 »	$5227 \cdot 38923$
17	$409 \cdot 466344409$	$3061 \cdot 41540861$
19	$191 \cdot 6271 \cdot 3981071$	$761 \cdot 19609 \cdot 213029$
23	$8971 \cdot 332207361361$	$47 \cdot 4227279713043$
29	$59 \cdot 789256419165659759$	31044085820515950521
31	$\equiv 0 \pmod{1861}$	$\equiv 0 \pmod{1303}$
37	$\equiv 0 \pmod{149}$	....
41	....	$\equiv 0 \pmod{83}$
43	....	$\equiv 0 \pmod{1549}$
47	....	$\equiv 0 \pmod{2069}$

Härtill följande betraktelser. Talet 5 är kvadratisk rest till primtal av formerna $10n \pm 1$ och icke-rest till primtal av formerna $10n \pm 3$. Om $k = 2p + 1$ är ett primtal, utgör det en divisor till motsvarande tal S, ifall 5 är kvadratisk rest till k, och till motsvarande tal T, ifall 5 är icke-rest till k. Det förra inträffar för $p = 5$ och 29, det senare för $p = 3$, 11, 23, 41.

Allmännare måste en eventuell primfaktor till ett tal S ha formen $k = 2sp + 1$ med villkoret att 5 är kvadratisk rest till k, sålunda

$$k = 2sp + 1 = 10m \pm 1.$$

Det övre tecknet ger

$$k = 10np + 1,$$

det undre villkoret $sp + 1$ delbart med 5. För $p = 19$ fås t. ex. $191 = 10 \cdot 19 + 1$, $6271 = 330 \cdot 19 + 1$ och den tredje faktorn är primtalet $209530 \cdot 19 + 1$. För $p = 13$ ha de eventuella primtalsdivisorerna formen $130n + 1$ eller $130n + 79$; 71 st. av dem äro mindre än $\sqrt{S - 1}$, d. v. s. än 17469 och ingen går jämnt upp, varför motsvarande tal S är primtal. Analogt ha de eventuella divisorerna för $p = 17$ formen $170n + 1$ eller $170n + 69$; sålunda är $409 = 2 \cdot 170 + 69$ och den andra faktorn, som är lika med $2743202 \cdot 170 + 69$, bevisas medelst inalles 77 provdivisioner utgöra ett primtal. Jag har vidare bevisat att en eventuell divisor till den andra faktorn i S_{23} måste vara större än 20000, till den andra (icke utskrivna) faktorn i S_{31} och S_{37} samt till talen S_{41}, S_{43} och S_{47} måste överstiga 10000.

En eventuell primfaktor till ett tal T har formen $k = 2sp + 1$, där 5, om s är jämnt, skall vara kvadratisk rest till k, om s är udda, icke-rest. Det förra fallet ger

$$k = 2sp + 1 = 10m \pm 1$$

och med det övre tecknet

$$k = 20np + 1,$$

med det undre villkoret $sp + 1$ delbart med 5. I det senare fallet fås

$$k = 2sp + 1 = 10m \pm 3$$

och med det övre tecknet $sp - 1$ delbart med 10, med det undre $sp + 2$ delbart med 5. Exempelvis erhålles för $p = 19$ möjliga primfaktorer av formerna $380n + 1$, $380n + 229$, $380n + 267$ och $380n + 343$, sålunda $761 = 2 \cdot 380 + 1$, $19609 = 51 \cdot 380 + 229$ och den sista faktorn lika med $560 \cdot 380 + 229$ och utgörande ett primtal. Detsamma är fallet med den sista faktorn i talen T_7, T_{11}, T_{13} och T_{17}. Medelst det nödiga antalet provdivisioner har jag visat, att en eventuell divisor till talen T_{29} och T_{37} samt till den andra faktorn i talen T_{23} och T_{31} är större än 20000, till den andra faktorn i T_{41} större än 10000.

Naturen av tre tal S och två tal T är ännu oklar. Går man till större primtalsvärden p och större divisorer k, återstår här mycket arbete för en intresserad räknare.

Om Kundts rör.

Referat av **K.-J. LENANDER.**

Behovet av noggranna värden på ljudets hastighet i gaser har givit E. N. da Costa Andrade anledning att med moderna metoder ingående undersöka, experimentellt och teoretiskt, de fenomen, som uppträda i Kundts rör. I det följande kommer att lämnas ett referat av ett par avhandlingar, i vilka Andrade framlagt resultaten av sina undersökningar: »On the Circulations Caused by the Air in a Tube» och »On the Groupings and General Behavior of Solid Particles under the Influence of Air Vibrations in Tubes».[1] Avhandlingarna refereras i nu nämnd ordning. De kasta nytt ljus över de komplicerade förhållandena i det Kundtska röret och torde därför förtjäna att uppmärksammas.

Sin avhandling »Über eine neue Art akustischer Staubfiguren und über die Anwendung derselben zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern und Gasen» publicerade Kundt år 1866.[2] K. var tydligen en försiktig herre, vilket framgår av följande citat från s. 516: »Was die Entstehung dieser Querrippen überhaupt anlangt, so enthalte ich mich darüber an dieser Stelle jedes Urtheil, ... und ich möchte daher lieber überhaupt keine Erklärungsversuchen, als eine solche geben, die ich später zurückzunehmen gezwungen wäre». Alla ha ej varit lika försiktiga, och under årens lopp ha utbildats en hel del försök till förklaring trots mindre gott experimentellt underlag.

Den mest framträdande teorin är Königs.[3] Denne sökte beräkna de krafter, som verka mellan två sfärer i ett svängande medium, och begagnade sig därvid av det av Bjerknes behandlade omvända problemet att studera de krafter, som verka mellan svängande sfärer i ett vilande medium. Resultatet av beräkningarna visade, att sfärerna attrahera varandra, då sammanbindningslinjen mellan deras centra är vinkelrät mot mediets rörelseriktning, men repellera varandra, då denna sammanbindningslinje sammanfaller med rörelseriktningen. Genom uppkomsten av dessa krafter menade

---

[1] Publicerade resp. i Proceed. Royal Soc., London A 134, 1932 och Phil. Trans. Royal Soc., London A 230, 1931.

[2] A. KUNDT, Ann. d. Physik u. Chemie, 127, 4, 1866.

[3] KÖNIG. Ann. d. Phys. 42, s. 353 och s. 549, 1891.

König sig kunna förklara bildningen av tvärsträngarna i det Kundtska röret och ansåg detta fenomen analogt med grupperingen av järnfilspån i ett magnetiskt fält. Vid denna sin utredning förutsatte König virvelfri rörelse hos mediet. Andrade har visat, att denna förutsättning ej är berättigad.

För undersökning av luftens rörelse använde Andrade rökpartiklar. Närmast gällde det att taga reda på i vad mån dessa följde luftens rörelser. Förhållandet mellan den maximala hastigheten hos en i ett visköst medium vibrerande sfär och mediets maximala hastighet kan beräknas ur en hydrodynamiskt härledd formel. Är förhållandet mellan sfärens och mediets maximala hastigheter ett eller nära ett, kan sfären (partikeln) tjänstgöra som indikator av mediets rörelse. Det är just en av Andrades upptäcker, att inom hörområdet vanlig tobaksrök (from a cheap cigarette), filtrerad genom ett klorkalciumrör är en lämplig indikator.

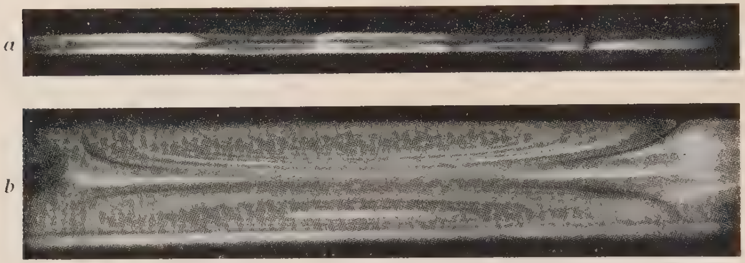


Fig. 1. Cirkulationen från nod till buk längs rörets axel och tillbaka efter rörets väggar; i *a* fem och i *b* en kvartsvåglängd.

För framkallande av svängningarna använde Andrade en elektromagnetisk högtalaremembran, monterad på ett flänsförsett, kort mässingsrör, vilket sköts utanpå glasröret vid dess ena ände och fästes med vax vid detta. Högtalaren anslöts till en tongenerator med heterodynkoppling. Differenstonen stabiliserades i en filterkrets och förstärktes med 2-rörs förstärkare. Prov med en katodstråleoscillograf visade, att strömmen var nära nog idealiskt sinusformad. Andrade arbetade med konstant rörlängd och varierade frekvensen. Intensiteten kunde regleras inom vida gränser medelst ett motstånd, kopplat parallellt till oscillatorenheten.

I den första avhandlingen studeras dels svängningstillståndet i röret, då det är fyllt med rök men fritt från partiklar, som kunna verka störande på luftens rörelse, dels den virvelbildning, som uppkommer kring i röret införda kroppar.

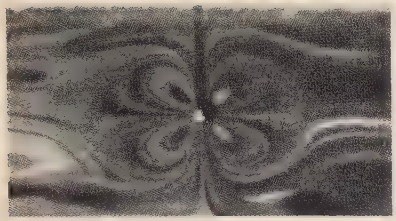


Fig. 2. Virvelbildning kring en cylinder med 0,24 cm diam.

Genom ett spegelglasfönster, anbragt i rörändan mitt emot membranen, belystes det rökfyllda röret medelst ett smalt, parallellt, axialt strålknippe från en kraftig ljuskälla. För att förekomma störande inverkan av värmestrålningen (konvektion) omgavs röret med ett vattenskikt.

Rökpartiklarnas och därmed luftpartiklarnas rörelse kunde nu studeras från sidan av röret. Andrade fann, vad redan Lord Rayleigh förutsagt, att luften är stadd i cirkulation från nod till svängningsbuk (antinod) längs rörets axel och tillbaka efter rörets väggar, se fig. 1. Våglängden är här 56,5 cm; i *a* synas fem och i *b* en kvartsvåglängd. Anmärkningsvärt är, att rökpartiklarna samlats till strömlinjer. Andrade anser detta bero på att rökpartiklarna i sin oscillationsrörelse släpa något efter luftpartiklarna, varvid den av König omnämnda attraktionsverkan vinkelrätt mot rörelseriktningen gör sig gällande.

Härefter studerades den virvelbildning, som uppträder kring i svängningsbuken införda kroppar, i fig. 2 kring en cylinder med 0,24 cm diameter, i fig. 3 *a* kring en sfär med 0,32 cm diameter. Virvelsystemet kring den senare är fullt symmetriskt (fig. 3 *b*). Villkoret för att virvelbildning skulle inträda befanns vara, att svängningsintensiteten skulle överstiga ett visst värde, bestämt av sfärens storlek och frekvensen. Amplituden hos de svängande rökpartiklarna (av storleksordningen 0,01—0,001 cm) mättes med mikroskop.

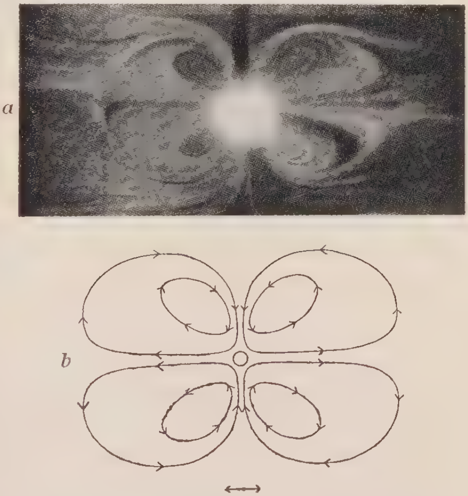


Fig. 3. Virvelbildning kring en sfär med 0,32 cm diam.

Kring alla kroppar (filspån av kork och järn, sand), som ej helt deltaga i luftens svängningsrörelse, uppstå dylika virvlar. Rörelsen i det Kundtska röret är således ej virvelfri, som König förutsatte vid sin utredning av kraftverkningarna mellan vibrerande partiklar.

Sin andra avhandling ägnar Andrade de speciellt »Kundtska» fenomenen. Här studeras först experimentellt de krafter, som uppträda mellan kroppar, kring vilka virvlar bildas. Genom att i röret införa en fast och en lättrörlig cylinder av elfenben kunde krafter påvisas, som stämma väl överens med de iakttagna virvlarna. Även kraftverkningarna mellan kulor undersöktes. Följande resultat erhöllos.

Befinna sig kropparna i ett plan, vinkelrätt mot rörets längdriktning, attrahera de varandra, då deras inbördes avstånd är mindre än deras diameter, men repellera varandra, då deras avstånd är endast obetydligt större. Äro kulorna eller cylindrarna godtyckligt orienterade och tillräckligt nära varandra, förefinnes tendens till inställning vinkelrätt mot rörets längdriktning. Kvarhållas partiklarna i longitudinell ställning i förhållande till röret, inträder ett jämviktstillstånd för ett visst avstånd, då virvlarna beröra varandra. Är avståndet mindre, uppträder repulsiva krafter, är det större, attraktiva.

De här påvisade krafterna kunna förklara de i det Kundtska röret uppträdande tvärsträngar, i vilka pulvret samlar sig. Dessa äro en följd av de i vinkelrät riktning mot röret verkande attraktionskrafterna och av de nyssnämnda jämviktslägena längs röret, vilkas inbördes avstånd betingas av virvlarna.

Fig. 4 återger ett par bilder av de i svängningsbukarna uppträdande tvärsträngarna (för en ton med svängningstalet 1240). Pulvermaterialet är här korkfilspån, som Andrade i regel arbetat med; samma fenomen erhålles emellertid även med pulver av annat material. Korkspånen erhöllos med fin fil och siktades. Det visade sig dock svårt att få pulver av lika kornstorlek. I den övre bilden synes en serie finare strängar. Dessa bestå av mindre korn, som finna ett ganska labilt jämviktsläge i gränsskiktet mellan virvlarna. En knackning på glasväggen visade sig tillräcklig för att få dem att förflytta sig till de grövre strängarna. På så sätt har den undre bilden i fig. 4 erhållits ur den övre.

För att kunna utföra noggranna mätningar av avstånden mellan strängarna sökte Andrade i görligaste mån avlägsna friktion och ojämnheter och tillverkade därför små kulor av karnaubavax, vilka siktades till stor enhetlighet. Då dessa användes, kunde man emellertid misstänka störning av statisk elektricitet. För att eliminera denna försilvrades röret invändigt och jordleddes, varefter synnerligen väl utbildade strängar erhöllos. Avståndet mellan strängarna befanns vara störst vid svängningsbukarnas mitt, där rörelsen är kraftigast, och avtaga mot noderna. Nära dessa upphöra strängarna. För dessas uppkomst kräves tydligen en viss intensitet.

Det bör betonas, att alla iakttagelser äro gjorda och alla fotografier tagna under själva svängningsrörelsen, ej efter denna såsom vid tidigare undersökningar. Det som möjliggjorde denna iakttagelse under själva rörelsen var att Andrade med sin tongenerator kunde hålla konstant frekvens och konstant intensitet. Vid den äldre metoden, då tonen erhölls genom longitudinell anstrykning av en stav, saknade man helt möjlighet att hålla intensiteten konstant, liksom man ej kunde variera dess storlek. Det visade sig, att intensiteten utövade ett stort, för att inte säga avgörande inflytande på förhållandena i röret.

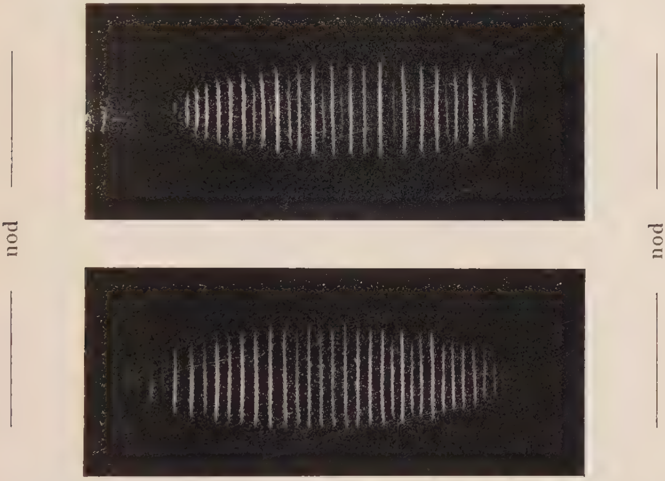


Fig. 4. Tvärsträngar; svängningstal 1240.

Redan Kundt och flera andra efter honom hade funnit, att i röret uppträda även andra fenomen än tvärsträngar, t. ex. »ögonbildning» i närheten av noderna. Någon lagbundenhet för uppträdandet av de olika fenomenen hade emellertid ej påvisats. Andrade lyckades göra detta och fann även ett nytt fenomen av största betydelse för en noggrann våglängdsbestämning.

En systematisk undersökning gjordes med ett rör av 163 cm längd och 3,5 cm diameter (vid 20°,1 C), varvid svängningstalet varierades från 200 upptill 2300. Inom detta område utbildades från 2 t. o. m. 22 halva våglängder i röret. Ur Andrades mätserie anföras i bifogade tabell endast de värden, som hänföra sig till ett jämnt antal ($= k$) halva våglängder (se tabellens fjärde kolumn). I den första kolumnen anges svängningstalet, i den andra vid vederbörande svängningstal observerat fenomen, i den tredje frekvensen ($= n$) för den kraftigaste resonansen; den femte innehåller produkten $k \cdot n_0$, där $n_0 = 102{,}58$ är ett medelvärde svarande mot rörets »grundton». En god överensstämmelse befinnes råda mellan talen i tredje och femte kolumnen.

Svängningstal	Iakttaget fenomen	Svängningstal vid resonans	k	$k \cdot n_0$
2285	R. H.	2253	22	2257
2220	R. L.			
2055	R. H.	2044	20	2052
2033	R. L.			
1850	R. H.	1840	18	1846
1830	R. L.			
1655	R. H.	1645	16	1641
1635	R. L.			
1442	R. H.	1434	14	1436
1426	R. L.			
1244	R. H.			
1234	A. N. D.	1234	12	1231
1054	R. H.			
1034	A. N. D.	1034	10	1026
857?	R. H.			
829	A. N. D.			
820	C.	820	8	821
653	A. N. D.			
619	C.	619	6	615
422	A. N. D.			
413	C.	413	4	410
200	C.	c:a 200	2	205

Med hänsyn till de fenomen, som uppträda, kan man särskilja tre frekvensområden, ett högre från 2285 ned till 1244, ett mellanregister från 1244 till 719 och ett lägre område från 653 till 200.

Inom de två förstnämnda områdena uppträdde skarpa tvärsträngar (uppträda även vid låga frekvenser, när intensiteten är liten, men äro då ej skarpa). De framträdde dock ej tydligt vid den frekvens (tredje kolumnen), vid vilken resonansen var kraftigast, utan strax över och under denna. I andra kolumnen anger R. H. (= ridges high) och R. L. (= ridges low) att skarpa tvärsträngar observerats vid de i första kolumnen angivna frekvenser, som ligga över, resp. under resonansfrekvensen.

I mellanregistret uppträder ett egendomligt fenomen vid frekvensen, för vilka svängningsintensiteten är större än den, som svarar mot R. H. och R. L. Mitt på svängningsbuken visar sig då, särskilt vid de högre frekvenserna inom området, en tunn skiva, som sträcker sig över hela rörets tvärsektion (fig. 5). Skivan har en tjocklek av knappt 1 mm, och hela dess plan är fyllt av fint stoft. Andrade benämner den »antinodal disc», i tabellen beteck-

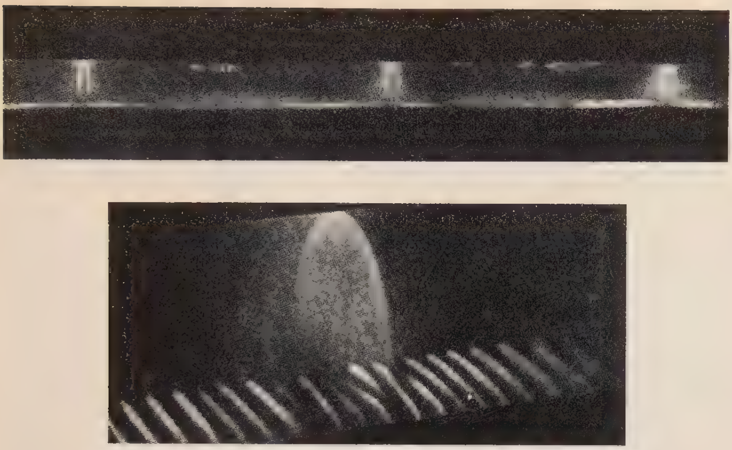


Fig. 5. Skarpt begränsade skivor av stoft (»antinodal disc») i svängningsbukarna.

nad A. N. D. (Samtidigt med denna skiva formas ej fullt skarpa tvärsträngar på rörets botten, se undre bilden i fig. 5.) Uppträdandet av denna skarpt utbildade skiva utgör en av de väsentliga upptäckterna vid Andrades undersökning. Den möjliggör en noggrann bestämning av våglängden och därmed av ljudets hastighet i gaser, som uppgives kunna erhållas med en noggrannhet av 1 på 2000.

Vid en frekvens, som endast obetydligt skiljer sig från den, vid vilken »skivan» uppträder, börja tvärsträngarna röra sig från buken mot noderna. Denna rörelse inträder, då resonansen i röret är kraftigast och är tydligen en följd av den ovan omtalade allmänna luftcirkulationen från nod till buk längs rörets axel och tillbaka utefter rörets väggar. Denna rensopning (»clearance», C. i tabellen) resulterar i att pulvret samlar sig i ett par vallar på ömse sidor om noden under bildande av ett »öga» (se fig. 6) eller

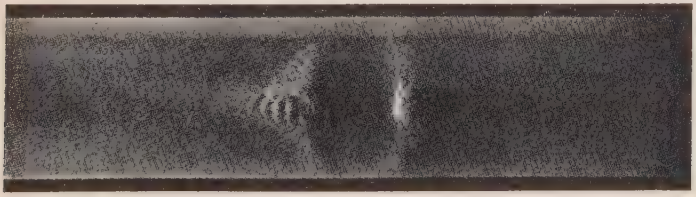


Fig. 6. »Ögon»-bildning kring noderna.

— vid ännu större intensitet — att pulvret bildar en enda tjock sträng i noden. Denna rensopning inträdde i experimentserien vid de lägre frekvenserna.

Av tabellens andra och tredje kolumn framgår, att C. genomgående uppträder vid resonansfrekvensen. Uppträder ej C., bildas A. N. D. vid resonansfrekvensen, och där endast tvärsträngar uppstå, är resonansfrekvensen medeltalet mellan frekvenserna för R. H. och R. L. Resonanstillståndet är således ej utmärkt av något för alla svängningstal likartat uppträdande hos korkpulvret. Det är huvudsakligen intensiteten, som bestämmer fenomenets art. Rensopning (C.), skivan (A. N. D.) och tvärsträngarna (R. H. och R. L.) svara mot intensiteter av avtagande storlek.

Den bild man får av hela undersökningen kan sammanfattas på följande sätt. Korkpulvrets lägen i röret vid resonans synas för givna dimensioner på röret vara enbart beroende av frekvensen och intensiteten. I röret samlas kornen i strängar; till varje sträng hör ett system av virvlar, utbildade åt båda hållen, där de utbreda sig, tills de tangera motsvarande virvlar hos närliggande strängar. Men i röret försiggår också den förut omnämnda allmänna luftcirkulationen från nod till antinod längs röraxeln och tillbaka utefter rörets väggar. Vid stor intensitet tar denna luftrusning överhanden och sopar med sig pulvret till noderna, så att dessa helt täckas av en enda tjock sträng *eller* till en plats nära noderna, så att ett s. k. öga bildas. Men det kan också hända, att strängarna äro väl utbildade som höga tunna vallar, och tänkbart är ju, att de för smala rör kunna utbreda sig över rörets hela tvärgenomskärning. Det är detta, som skett för den rördimension, som Andrade valt, men endast där denna bildning varit mest gynnad, nämligen mitt på svängningsbuken, där intensiteten är störst och en skiljevägg redan finnes mellan två luftcirkulationssektioner. Denna tunna skiva synes endast kunna bildas inom ett ganska trångt intensitetsintervall.

Mer vore att tillägga från dessa avhandlingar. Beträffande en metod att mäta rökpartiklarnas amplituder och därmed intensiteten utlovas vidare undersökningar. Detsamma gäller frågan om noden är belägen vid själva den svängande membranen eller nära intill den. Vid den andra slutna ändan är givetvis alltid en nod belägen. Referenten hoppas emellertid, att vad som anförts ger kärnpunkterna och kan vara av intresse, då klara upplysningar om det Kundtska röret ej stå att få vare sig ur den större litteraturen eller av våra vanliga läroböcker, där man förbigått svårigheterna, vilket säkert har varit det visaste under de förhållanden, som förelegat.

Objektiv fotometri.

Några laborationsförsök.

Av **GÖSTA FUNKE.**

Både av ekonomiska och pedagogiska skäl torde man ha anledning att organisera laborationer efter två olika linjer. Den ena typen är laborationer, som kunna göras av alla grupper gemensamt och som anknytas direkt till den löpande undervisningen, den andra typen är sådana laborationer, till vilka endast en uppsättning instrument kan anskaffas. Under förutsättning att båda typerna användas i lämplig proportion och på lämpligt sätt, är den senare lika värdefull som den förra, speciellt som den onekligen än bättre än denna kan förväntas utveckla förmågan till självverksamhet. Vid mitt läroverk (tekniskt gymnasium) ha vi en serie av sju à åtta sådana laborationsuppgifter varje termin, inpassade i schemat av gemensamma laborationer. De här beskrivna försöken äro av detta slag.

Med objektiv fotometri förstås fotometri, där ögat icke direkt användes för ljusmätningen utan ersatts med fotoelement eller fotocell. De förra äro att föredraga av flera orsaker. En väsentlig fördel har den objektiva fotometrin framför den subjektiva däri att man direkt kan få ett mått på en belysningsstyrka utan att behöva någon standardljuskälla. Mätning har därigenom blivit möjlig i många fall, där man förut tvingats nöja sig med kvalitativ uppskattning. De i senare delen av denna uppsats angivna försöken ha t. ex. tidigare delvis beskrivits i kvalitativ form av C. Rendahl i denna tidskrift *21*, 103, 1938. I praktiken torde den subjektiva fotometrin nära nog ha försvunnit.

Några ljustekniska data för en glödlampa.

G. Nilsson har i en artikel i Elementa, *19*, 85, 1936 lämnat en framställning av moderna ljustekniska definitioner och enheter. Nedanstående förslag till laboration avser att ge en praktisk-pedagogisk komplettering av Nilssons mera teoretiskt lagda artikel. Den omfattar upptagning av en ljusfördelningskurva samt uppmätning av totala ljusflödet, sfäriska medelljusstyrkan och ljusutbytet hos en glödlampa. Apparaturen torde framgå av figur 1. Lampan A (i mitt fall en 95 W klar glödlampa) är uppsatt i ett lyktstolpliknande stativ B (taget från en gammal fallmaskin). Ett spärrskiktfotoelement C (Pressler selenfotoelement 36 mm diameter), förbundet med en mikroamperemeter (0—240 μA, inre motstånd $10\,\Omega$) är fäst i en 1 m lång arm D, rörlig kring lampan som centrum. Elementets yta blir på detta sätt alltid vinkelrät mot strålningsriktningen. Med ett avstånd $AC = 0{,}65$ m blir strömstyrkan i största ljusintensitetens riktning omkring 100 μA. En på armen fäst visare, E, rör sig över en gradskiva F. Lamphållaren G är höj- och sänkbar genom den enkla anordningen vid H (till en åtta böjd metalltråd). Denna anordning gör det även möjligt att vrida lampan. Med ställskruvarna K och anordningen H kan lampan injusteras mitt för riktpinnen L, som anger armens centrum. Med lodet M kan elementet sättas i rätt läge. L och M borttagas efter injustering.

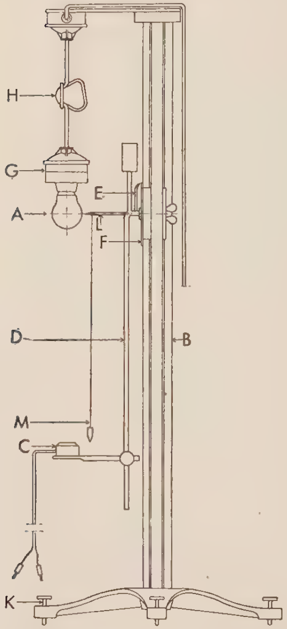


Fig. 1. Apparat för upptagande av ljusfördelningskurvor.

För att gott resultat skall erhållas måste några försiktighetsmått iakttagas. Lampan måste efter isättning torkas (med t. ex. sämskskinn), så att alla fingeravtryck tas bort. Spänningen på belysningsnätet är icke tillräckligt konstant, varför några ackumulatorer och ett skjutmotstånd kopplas i serie med lampan, så att såväl över- som underspänningar kunna kompenseras. Laborationen bör alltså göras av tre elever: en som håller spänningen på lampan konstant, en som ställer in fotoelementets läge och en som avläser instrumentet.

Ljusstyrkan hos en glödlampa är olika i olika riktningar i ett plan genom lampans axel, och ljusfördelningskurvan avser att på ett överskådligt sätt återge detta. Ljusstyrkan bestämmes alltså i olika riktningar varvet runt t. ex. för var tionde grad, och resultatet avsättes i ett polärt koordinatsystem på så sätt, att radius vektor sättes lika med ljusstyrkan i normalljus. De så erhållna punkterna sammanbindas till en kurva, ljusfördelningskurvan. I allmänhet utritas kurvan endast för halva varvet (se fig. 2). Varje experimentellt bestämd punkt är då medelvärdet av en mätning i första (resp. fjärde) kvadranten och en i andra (resp. tredje). För att få goda värden bör helst två mätserier upptagas; en med glödtråden i en viss ställning och en sedan lampan vridits 90°.[1] I så fall blir varje experimentell punkt på kurvan medelvärdet av fyra mätningar.

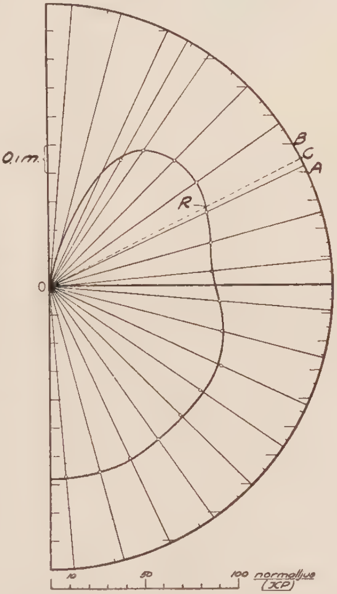


Fig. 2. Ljusfördelningskurva till klar 95 W glödlampa upptagen med apparaten fig. 1 samt storcirkel till enhetssfär kring lampan. Zonindelningen antydes med de horisontella märkena och zonernas mittpunkter angivas med korta mot centrum riktade streck. Längst ned skala för kurvan.

De mätriktningar som framgå av fig. 2 torde vara de lämpligaste med hänsyn till att ingen strålning går rakt uppåt. Mikroamperemeterns utslag (a skaldelar) är direkt proportionellt mot belysningsstyrkan; om avståndet lampa-element är r meter och varje skaldels utslag motsvarar l lux, blir lampans ljusstyrka i denna riktning $a \cdot l \cdot r^2$ normalljus.

Ljusfördelningskurvan användes nu för grafisk integrering av totala ljusflödet. En enhetssfär (radie = = 1 m) omkring lampan indelas i zoner (t. ex. AB) med lika höjd (0,1 m i fig. 2); ytan av varje zon, ΔF, blir alltså = 0,2 π kvadratmeter. En linjal lägges mellan centrum av cirkeln i fig. 2 och mittpunkten på varje till en zon hörande båge (t. ex. punkten C). Sträckan OR anger ljusstyrkan i denna riktning. Med hjälp av skalan avläses 93,5 normalljus). Ljusflödet genom zonen AB är alltså 0,2 $\pi \cdot$ 93,5 lumen och totala flödet

$$\Phi = 0{,}2\,\pi n_1 + 0{,}2\,\pi n_2 + \ldots + 0{,}2\,\pi n_{20} =$$

$$= 0{,}2\,\pi \cdot \sum_{k=1}^{20} n_k = \Sigma n_k \Delta F,$$

där n_k är ljusstyrkan genom zonen k. Sfäriska medelljusstyrkan erhålles sedan genom att dividera med 4π och ljusutbytet genom att dividera med effekten (V och I för lampan mätes). För den här använda lampan blir $\Sigma n_k = 1831$, d. v. s. $\Phi = 115$ Dlm. Effekten var $220 \cdot 0{,}428 = 94{,}2$ W. Ljusutbytet blir $12{,}2\ \mathrm{lm/W}$ och sfäriska medelljusstyrkan $91{,}7$ ICP.

---

[1] Dessa två mätserier ge överensstämmande värden endast för lampor med någorlunda symmetriskt monterad glödtråd, varför en dylik bör användas vid försöket.

Om man har en från början graderad luxmeter, bortfaller konstanten l i formeln ovan, och detta är givetvis det enklaste. Mina elever få emellertid använda en separat mikroamperemeter och fotoelement och kalibrera instrumentet genom att utföra en särskild mätserie på en av Lumafabriken kalibrerad glödlampa (sekundärnormal, 400 lumen, pris för skolor kr. 11: 50). De få även göra motsvarande mätningar för två standardarmaturer (Siverts GeBe-kombination PL-13 och PL-14), varigenom dels uppfattning vinnes om hur mycket ljus, som förloras i en armatur och dels — vilket är viktigare — med ljusfördelningskurvornas hjälp påvisas, att glödlampans ljus ej är en färdig produkt utan en råvara, som kan och måste förädlas i en armatur avpassad för det förhandenvarande ändamålet. Detta senare torde dock vara en för de allmänna läroverken alltför tidskrävande utvidning.

I den enklare formen medhinnes laborationen väl på två timmar, om den på förhand preparerats. Utom de erfarenheter den ger rörande belysningens problem — samtliga de fotometriska enheter och definitioner, som ingå i gymnasiekursen, beröras av laborationen — har den även stort värde som tillämpad matematik, dels som exempel på stereometri, dels ock alldeles särskilt för att den ger en praktisk inblick i integralens betydelse, i detta fall som gränsvärdet för summan $\Sigma \Phi_k \Delta F$, där Φ_k är flödet per ytenhet genom zonen k i enhetssfären och ΔF zonens yta. Φ_k är ju lika med n_k, ljusstyrkan i denna riktning.

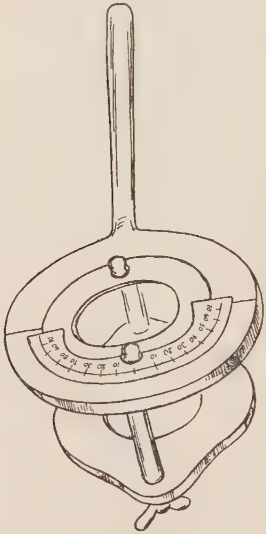


Fig. 3. Polarisationsapparat.

Undersökning av polariserat ljus.

1. Polarisationsapparaten fig. 3 innehåller såväl polarisator som analysator av polaroidglas. Det ena glaset kan vridas över en skala, under det att det andra är fast. Apparaten är avsedd att uppsättas i ett vanligt stativ. Glasen fås billigast från ett par kommersiella bilglasögon. Ljuset från en Reuterlampa sändes genom po-

larisationsapparaten och får träffa ett selenfotoelement. Polarisatorglaset vrides och avläsning på mikroamperemetern göres för var 5:e grad. Utslaget ($y\,\mu A$) uppritas som funktion av polarisatorns ställning ($x°$) och befinnes vara en sinuskurva, som noga följer formeln $y = A + B \cdot \sin[2(x + \varphi)]$ eller för kurvan i fig. 4 $y = 43{,}2 + 40{,}4 \cdot \sin[2(x + 72{,}5)]$. Denna formel har följande teoretiska grund. Om a är amplituden hos det från analysatorn utgående, lineärt

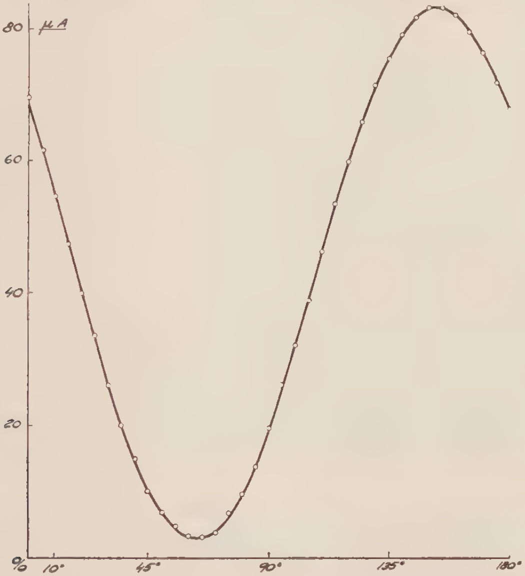


Fig. 4. Kurva utvisande det av polarisationsapparaten genomsläppta ljusets intensitet som funktion av vinkeln mellan polarisatorns och analysatorns polarisationsplan.

polariserade ljuset, då polaroidernas polarisationsplan äro parallella, så kommer denna amplitud att vara $a \cdot \cos v$, då polarisationsplanen bilda vinkeln v med varandra. Ljusets energi är emellertid proportionell mot kvadraten på amplituden, så att ljusflödets intensitet Φ är proportionell mot $\cos^2 v$, en iakttagelse, som redan Malus, polarisationens upptäckare, gjorde. Alltså: $\Phi = k \cdot \cos^2 v = k \cdot \frac{1 + \cos 2v}{2} = \frac{k}{2} + \frac{k}{2} \cdot \sin(2v + 90)°$. Även vid korsade polaroider genomsläppes en viss ljusmängd. Detta visar, att det ljus, som genomgått det första polaroidfiltret, icke är till 100 % polariserat. För gult uppges polarisationsgraden vara högst och uppgå till c:a 98 %. Åt rött och violett försämras polarisationsförmågan, och det vid korsade polaroider genomsläppta, svaga ljuset har även en rödviolett färg. Det av polarisationsapparaten genomsläppta ljuset består alltså av en av vinkeln v beroende del Φ och en av v oberoende del Φ_1. Enl. kurvan är Φ_1 ung. 4 % av $\Phi_{\max}$. Addition av Φ och Φ_1 ger formeln $y = A + B \cdot \sin 2(x + \varphi)$, där φ beror på att nollpunkten för gradindelningen på polarisatorn är godtyckligt vald. Med hänsyn till växelströmsläran måste det anses vara en nyttig övning att fastställa värden på A, B och φ och jämföra de med dessa konstanter beräknade värdena på y med de empiriska. Kurvan kan jämföras med en på en likström A lagrad växelström med amplituden B.[1]

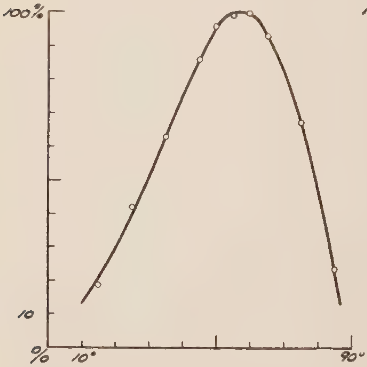


Fig. 5. Polarisationsgraden hos reflekterat ljus som funktion av infallsvinkeln.

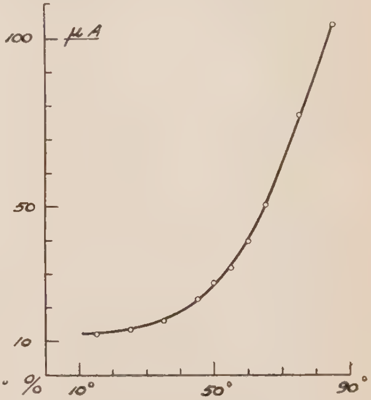


Fig. 6. Det reflekterade ljusets intensitet som funktion av infallsvinkeln.

2. Man lossar vingmuttrarna och borttager det fasta polaroidfiltret. Ljuset från Reuterlampan får först reflekteras mot en glasruta (vinkeln likgiltig) och sedan infalla genom det vridbara polaroidglaset mot fotoelementet. Samma upptagning som under 1. visar, att det från glaset reflekterade ljuset är polariserat. Bestäm noga vinkeln för maximalt och minimalt utslag.

---

[1] Vill man göra en mera detaljerad jämförelse, kan man lämpligen tänka på den emk, som genereras av en fyrpolig växelströmsgenerator. Maskinens emk genomlöper en hel period, då rotorn vrides 180°, på samma sätt som kurvan i fig. 4 genomlöper en period, då polaroidglaset vrides 180°. Om kurvan förskjutes 72°,5 i x-axelns positiva led, kommer den att få sin »nollpunkt» på y-axeln. Detta betyder en fasförskjutning på $\frac{72{,}5}{180}$ period. Om man, som är brukligt i växelströmsläran, sätter en period = 360 elektriska grader (°el), blir fasförskjutningen 145°el.

3. Glasskivan ställes nu i sådana lägen (markerade på ett på bordet utbrett papper), att infalls- och reflexionsvinklarna bli 15°, 25°, 35°, 45°, 50°, 55° 60°, 65°, 75° och 85°. Utslagen vid de under 2. bestämda vinklarna för maximalt och minimalt utslag avläsas (I_{max} resp. I_{min}); I_{max} är ett mått på den reflekterade strålens totala ljusflöde, I_{min} är ett mått på flödet av opolariserat ljus. $I_{max} - I_{min}$ är således ett mått på polariserat flöde och $\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}}$ ett mått på polarisationsgraden. Man finner mellan 55° och 60° ett utpräglat maximum för polarisationsgraden på c:a 96 %. Under hänvisning till att polaroidglaset enl. 1. ej är 100 % effektivt ligger slutsatsen nära, att polarisationen vid 57° är fullständig. (Strängt gäller ju detta endast för monokromatiskt ljus.) Man kan eventuellt korrigera för det genomsläppta polariserade ljuset. I fig. 5 är detta gjort genom att i st. f. $I_{max} - I_{min}$ införts $(I_{max} - I_{min}) + 0{,}05 \cdot (I_{max} - I_{min})$.

Försöket ger dessutom en fundamental optisk lagbundenhet, den reflekterade strålens intensitet som funktion av infallsvinkeln. Det infallande ljusflödet är ju nämligen oberoende av vinkeln, om man använder parallellt ljus, varför den sökta relationen erhålles, om I_{max} avsättes som funktion av infallsvinkeln (se fig. 6).

Fil. doktor H. Hellström vid Lumafabriken har haft vänligheten genomläsa manuskriptet till laborationen rörande glödlampan.

Meddelande från föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föreningen hade onsdagen den 21 maj vårsammanträde på Tekniska högskolans kårhus, Stockholm. Till sammanträdet hade infunnit sig ett 50-tal medlemmar, huvudsakligen från Stockholm. Bland de närvarande märktes fyra representanter för Skolöverstyrelsen ävensom samtliga i Stockholm bosatta medlemmar av Skolkommissionen. Föreningen hade i samverkan med Föreningen Norden inbjudit rektor Einer Torsting från Charlottenlund, Danmark, att tala över ämnet: De matematisk-naturvetenskapliga ämnenas ställning i danska skolor. Som rektor Torsting kommer att behandla detta ämne i en uppsats i ett senare nummer av Elementa, skall här ej lämnas något referat av föredraget. På en fråga av undervisningsrådet R. Lundblad om de s. k. examensfria mellanskolorna i Danmark svarade rektor Torsting, att några erfarenheter av deras verksamhet ännu ej kunnat vinnas, då de endast fungerat i två år.

Efter föredraget visade ingenjör G. Cronquist ett antal färgfotografier från svenska landskap. De utsökt vackra bilderna väckte stor beundran och förevisningen belönades med starkt bifall.

Till sist intogs gemensam supé i kårhusets restaurang, varunder ordföranden, lektor T. Wetterblad, utbringade ett leve för aftonens danska gäster, rektor och fru Torsting. Rektor Torsting svarade med några djupt gripande ord, varmed han framförde sitt tack för inbjudan till Sverige och talade för den nordiska samhörigheten.

Bror Gustaver.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning sammanträdde i Lund lördagen den 26 april. Vid årsmötesförhandlingarna omvaldes till ordf. rektor P. G. PERSSON, Malmö, och till v. ordf. rektorerna E. HERNQVIST, Halmstad, och K. PARCK, Eslöv, samt till sekr. och kassör docent BÖRJE SVENSSON, Lund. Till styrelseledamöter utan särskild funktion valdes: läroverksadj. T. EDQVIST, Malmö, rektor H. HOLMGREN, Skurup, lektor A. JÖNSSON, Malmö, prof. J. KOCH, Lund, rektor H. KÖRNER, Lund, lektor A. LEIDE, Lund, prof. K. LUNDMARK, Lund, rektor F. MONTÉN, Malmö, lektor H. NORDSTRÖM, Växjö, prof. M. RIESZ, Lund, rektor S. SJÖBERG, Lund, amanuens EVE STAFFANSSON, Lund och lektor BERNARD SVENSSON, Lund.

I omedelbar anslutning till årsmötesförhandlingarna framförde lektor A. Leide en serie demonstrationer med en speciell projektionsanordning. Efter att inledningsvis ha påpekat de svårigheter som ofta uppstå att inför en klass på 30—35 elever åskådliggöra vissa fysikaliska försök, demonstrerade lektor Leide en projektionsapparatur, som användes vid läroverket i Lund, en förenklad Pohls projektionsanordning. Som exempel på dennas användbarhet visades en interferensbild erhållen med Fresnels biprisma och en serie magnetiska kraftlinjebilder. De till ett 70-tal uppgående åhörarna kunde alla från sin plats i föreläsningssalen utmärkt bra se försöken, vilket på ett slående sätt visade anordningens fördelar.

Efter lektor Leides demonstrationer följde ett föredrag av överingenjören Tore Husberg, Malmö över »Ångpanneeldstadens utformning med hänsyn till bränslets beskaffenhet». En översikt lämnades över de olika faktorer, som måste beaktas vid konstruktionen av en ångpanna. Det betonades, att vid de ekonomiska kalkylerna bränslekostnaderna icke få dominera, utan hänsyn måste tagas till räntabiliteten hos det i anläggningen nedlagda kapitalet. För att av ett givet bränsle kunna utvinna största möjliga energi är det synnerligen viktigt att eldstaden gives lämplig form. En ångpanneeldstad avsedd för de bästa utländska kolen med ett bränslevärde på 6000—7000 kcal per kg kan t. ex. ekonomiskt icke eldas med svenska kol, som i vissa fall ha betydligt lägre bränslevärde. Det kan t. o. m. hända, att de lågvärdigaste svenska kolen med ett bränslevärde på 3000 kcal per kg icke ens kunna brinna i en ångpanneeldstad avsedd för de bästa utländska kolen. En redogörelse för olika typer av ångpanneeldstäder och eldningsapparater lämnades. Som exempel på utvecklingen på området gjordes en intressant sammanställning av ångpanneeldstadens utformning vid Höganäsbolagets kraftcentraler under de senaste 40 åren.

Som gemensamt föredrag för föreningens båda sektioner upptog programmet ett föredrag av professor T. Thunberg över de biologiska oxidationsprocesserna. Föreläsningen gestaltade sig till en intressant uppgörelse med äldre uppfattningar — främst med Warburgs andningsfermentteori — om oxidationens förlopp i den organiska världen, enligt vilka det aktiverade syret spelar rollen av primum movens. De nyare föreställningarna, vilka utarbetats av Wieland och föredragshållaren i ett stort antal arbeten, hävda i stället, att väte aktiveras genom enzymer, dehydrogenas, och lösryckas från de ämnen som oxideras. Ämnena nedbrytas utan att syre behöver vara närvarande, vilket föredragshållaren kunnat konstatera bl. a. vid försök med oxidering av bärnstenssyra i urtvättade muskler. Överhuvud taget sakna organismerna förmåga att oxidera kol direkt. Indirekt sker detta genom att vatten adderas omväxlande med att väte lösryckes, så att slutstadierna bli de kända, koldioxid och vatten. Härvid äro ett stort antal enzym verksamma, en pluralistisk uppfattning motsatt den Warburgska unitariska. Det inandade syret får sin roll först i slutstadiet som vätgasacceptor, medan syret i koldioxiden härstammar från syre som primärt förefanns i näringsämnena samt sådant som tillkommit genom vattenadderingen. Till sist framhöll talaren, hur man sålunda finner, att oxidationsprocesserna äro oerhört invecklade men att livet också här liksom på andra områden realiserat det otänkbara.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

R. Tambs Lyche, *Lærebok i matematisk analyse.* I. 318 s. II. 285 s., Gyldendal, Oslo 1940.

Av ekonomiska orsaker är lärobokslitteraturen på vårt språk i matematik utöver skolkursen kvantitativt mycket ringa. I och för sig är detta faktum kanske ej så olägligt, då utmärkt utländsk litteratur är lättillgänglig. Man kan kanske till och med säga, att det erbjuder vissa fördelar, att de studerande redan vid början av sina studier få erfarenhet av att de språkliga svårigheterna, då det gäller facklitteratur, äro mycket små och lätt övervinnas. Detta utesluter emellertid ej, att ett tillskott till matematiklitteraturen på svenskt eller annat nordiskt språk hälsas med tillfredsställelse. I en sådan lärobok kan stoffet sovras, så att det precis passar våra examensfordringar, och som en bestämd vinst måste det räknas, att våra fackmän få tillfälle att utnyttja sina pedagogiska resurser. Man blir i varje fall övertygad om detta, då man tar del av ovanstående arbete.

Den norska läroboken, vars båda första delar utkommit, är närmast avsedd för bruk vid tekniska högskolor, men det är uppenbart, att den är lika användbar vid vilken högskola som helst, där matematik förekommer som disciplin. Framställningen har en bredd och ett djup, som i första ögonblicket verkar överraskande. Men man förstår snart nog, vart förf. syftar. Säkerligen har förf. som tentator fått erfara, vilka vanföreställningar, som kunna uppkomma genom en ytlig lärobok, särskilt vad beträffar de grundläggande begreppen. Författarens utredning av sådana begrepp som gränsvärde, kontinuitet m. m. har fått en synnerligen grundlig utformning, vars värde förhöjes därigenom att förf. ofta anmärkningsvis gör läsaren uppmärksam på vanligt förekommande feltolkningar. Trots denna grundlighet tror jag, att läsaren icke skall finna framställningen svårtillgänglig. Därtill bidrager författarens skickliga och klara skrivsätt och hans strävan att med illustrationsmaterial förtydliga innebörden av det anförda. Vad det senare beträffar blir man förtjust över författarens fyndighet och originalitet.

Första delen omfattar gränsvärden, derivat- och integralräkning samt serier, andra delen determinanter, vektorräkning och dess användning i analytisk rymdgeometri, funktioner av flera variabler, partiella derivator med tillämpningar, dubbel- och trippelintegraler samt funktioner av en komplex variabel. Varje kapitel innehåller rikligt med övningsexempel. Dessa äro merendels valda så, att de ytterligare klargöra de begrepp och de metoder, som förf. framställt i texten. För vinnande av teknisk färdighet särskilt med hänsyn till examensträning torde det dock bli nödvändigt för de studerande att dessutom anlita särskild problemsamling. Vad stoffets omfattning beträffar har uppritandet av algebraiska och andra kurvor samt studiet av andragradsytorna erhållit en mycket blygsam plats och behandlas endast i förbigående. Detta sammanhänger måhända med norska examensfordringar.

Som helhet betraktad måste läroboken betecknas som ett förnämligt bidrag till nordisk matematisk lärobokslitteratur och värd all uppmärksamhet. Man motser med intresse den tredje delen.

Arvid Uhler.

Harald Bohr og Johannes Mollerup, *Lærebog i matematisk Analyse.* Anden omarbejdede Udgave ved A. F. Andersen og Richard Petersen. II: Funktioner af een reel Variabel. Jul. Gjellerups Forlag. København 1940. 420 s.

Denna andra del skiljer sig från motsvarande del av den första upplagan främst därigenom att den endast omfattar funktioner av en enda variabel, medan funktioner av flera variabler komma att behandlas i en följande del, samt att teorien för ordinära differentialekvationer fått ett väsentligt utvidgat utrymme.

I första kapitlet införes talbegreppet medelst Dedekindska snitt, och sedan ges en utförlig framställning av punktmängder och talföljder. Här finns också en kortfattad framställning av oändliga serier och produkter. Begreppen gränsvärde och kontinuitet äro här införda på ett mycket klart och tydligt sätt samt belysta med väl valda exempel.

Integralbegreppet definieras i andra kapitlet först, och efter en allmän teori för integraler och en diskussion av de elementära funktionerna får läsaren göra bekantskap med derivator. Sedan följer differential- och integralkalkylen på vanligt sätt.

I tredje kapitlet behandlas geometriska användningar av det föregående, ytberäkningar, tangenter, båglängder, tyngdpunkter m. m. Krökningsteori saknas dock fullständigt.

Fjärde och sista kapitlet ger en mycket fyllig och klar framställning av ordinära differentialekvationer. Existensbeviset är det Picardska med successiva approximationer. Talrika exempel och figurer ge en god bild av hur integralkurvorna förlöpa i de olika fallen. Om singulära integraler finns ingenting. Annars är detta kapitel så fullständigt som möjligt.

Vid ett par tillfällen har framhållits, att goda exempel illustrera texten. Det är en sak som är genomgående för hela boken, men den har tidigare särskilt understrukits av anmälaren på grund av dess stora betydelse för att klara upp de abstrakta sammanhangen i bokens första kapitel samt de vackra bilder man får av integralkurvorna till differentialekvationer.

En stor samling övningsexempel på de olika delarna av differential- och integralkalkylen jämte användningar avslutar boken. I en tidigare anmälan av första delen av Bohr-Mollerups Lærebog i Matematisk Analyse har framhållits det tydliga och lättlästa sätt, på vilket den var skriven. Det är någonting, som kanske i än högre grad gäller om den nu föreliggande delen. Det är en ren njutning att läsa t. ex. kapitlet om differentialekvationer. *S. Danielson.*

NILS ERIK FREMBERG, *Inledning till differential- och integralkalkylen.* Lunds Studentkårs Intressebyrå. Lund 1941. 223 s. (stencilerad), kr. 12: —.

Boken, som är avsedd som kompendium för 1-betygskursen i matematik, inledes med en elementär och utförlig framställning av reella och komplexa tal — borde inte kap. 2 kommit före kap. 1? — Sedan följa de elementära funktionerna, gränsvärden och serier samt differential- och integralkalkyl. Framställningen är den i sådana läroböcker vanliga. Införandet av begreppet bestämd integral är gjord på ett sätt, som säkerligen för nybörjaren kommer att underlätta förståelsen av dessa frågor. Bland de geometriska användningarna av differentialkalkylen saknar man teorien för envelopper. *S. Danielson.*

FRITZ EMDE, *Tafeln elementarer Funktionen.* 1940. 181 + XII s. RM 12.

JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.* 1938. RM 15. Teubner, Leipzig.

Den lilla lätthanterliga Jahnke-Emde av år 1909 har i denna tredje upplaga växt till två band. Andra bandet innehåller de »högre funktionerna»: integralsinus, integrallogaritmen, felintegralen, theta-funktioner, elliptiska integraler och funktioner, klotfunktioner och Besselska funktioner m. m.

Första bandet innehåller de »elementära funktionerna»: potenser, räkning med komplexa tal, exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner, hyperbelfunktioner och en del speciella funktioner, såsom Plancks strålningsfunktion. Tabellerna illustreras rikligt med kurvor och perspektivfigurer.

Verket vänder sig till dem, som räkna mycket utan att behöva större noggrannhet än som uppnås på räknesticka eller räknerulle. Tabellerna äro genomgående uppställda så, att största relativa felet blir 1 : 20 000.

Som exempel på verkets användning kan nämnas lösningen av tredje- och fjärdegradsekvationer. På dessa brukade man förr illustrera ekvationsteorien med dess metoder att förbättra ett närmevärde, såsom t. ex. Newtons regel. Metoderna ha den fördelen, att de äro överskådliga och användbara även på transcendenta ekvationer. Men vid tredje- och fjärdegradsekvationerna fungera nämnda metoder oftast långsamt. Man har ofta ett drygt arbete, innan man fått ett användbart närmevärde som utgångspunkt för förbättringsmetoderna. I denna bok finner man i stället rikligt med nomogram, där ett första närmevärde strax kan avläsas. Alltefter koefficienternas storlek rekommenderar boken sedan olika metoder, som föra till snabb förbättring av dessa första värden.

Verkets stora förtjänst är att minska fruktan inför numeriska räkningar. Man får anvisningar om hur man skall börja räkningen och kurvor och tabeller, som ge tillräckligt noggranna värden för de flesta praktiska användningar. Men man är också mycket tacksam för de mycket rikliga litteraturanvisningarna. Det vore annars rätt svårt att få reda på titeln på de noggranna tabellverk, man i specialfall behöver.

Varje ingenjör och studerande, som sysslar med sifferräkningar, borde ha tillgång till dessa böcker.

O. H. Faxén.

HANS PETTERSSON, *Jorden och radium,* ett bidrag till jordens utvecklingshistoria, Albert Bonnier, Stockholm 1940, 161 s., kr. 4: 50.

Upptäckten av de radioaktiva ämnena och deras egenskaper var i och för sig revolutionerande, men föga anade pionärerna på detta område vilken utomordentligt genomgripande betydelse den skulle få för många av vetenskapens discipliner. Det inflytande, som de radioaktiva processerna kunna tänkas ha haft och ha på vår egen jords daning och utveckling, behandlades av professorn i oceanografi Hans Pettersson i en serie föreläsningar vid Göteborgs Högskola hösten 1938, och dessa ha nu med smärre ändringar och tillägg utgivits i bokform.

I de första kapitlen ger förf. en allmän överblick av olika åsikter om jordens och hela solsystemets uppkomst och utveckling under tidrymdernas lopp och framhåller därvid särskilt det värmeflöde från jordens hela inre mot ytan, som ständigt förefinnes. I kapitlet radium och den underjordiska elden lämnas en kort översikt av de radioaktiva ämnenas väsentligaste egenskaper och hur med deras hjälp jordvärmen mer än väl kan underhållas. Därefter följa redogörelser för vad jordskalven lära om jordens inre och för de utomordentliga möjligheter radioelementen ge till mätningar av jordens ålder. Förf. är själv sysselsatt med intressanta undersökningar av radiumhalten i havsvatten samt i ostron- och musselskal. Av stort intresse är vidare framställningen av Jolys teori om den roll de radioaktiva ämnena spelat såsom drivkraft för de periodvis inträdande omvälvningar vår jord varit utsatt för. Dessa ha bl. a. bestått i kontinenternas under många miljoner år fortgående sänkning i förhållande till havet med åtföljande erosion och därefter en med häftiga vulkanutbrott inträdande relativt snabbare kontinentalhöjning under bergskedjebildning. Även Wegeners kontinentalförskjutningar förklaras på liknande sätt.

De sista kapitlen ägnas universum. För att förklara den oerhörda energiutstrålning, som äger rum från solen och i ännu högre grad från en del stjärnor har man uppställt möjligheten av en verklig materieförintelse med direkt omvandling av massa i energi. Som budbärare för dylika processer uppträda de kosmiska strålarna, för vilka en kort översikt ges. Även frågan om universums ålder tas upp till diskussion.

Förf. har en synnerligen livfull och medryckande stil och finner lätt målande uttryckssätt. I några enstaka fall äro uttrycken kanske ej fullt adekvata. Här må endast nämnas på sid. 51 »anrikade uranpreparat», skall väl vara radiumpreparat, och sid. 56, rad 3 ovanifrån står radium B i stället för radium C.

Boken, som även är försedd med ett belysande bildmaterial, kommer säkert att med nöje och stor behållning läsas av alla naturvetenskapligt intresserade och lämpar sig väl till premiebok för gymnasiets och seminariernas elever.

Eva Ramstedt.

GEORGE RUSSELL HARRISON, *Atomerna i arbete.* Natur och Kultur, Stockholm 1941, 348 s., kr. 8: 50, inb. kr. 11: —.

Detta arbete, vars orginaltitel är »Atoms in action», anger sitt innehåll med underrubriken »Den skapande fysikens värld». Professor Harrison önskar uppvisa, att den moderna tekniken och med den vår materiella kultur helt och hållet är uppbyggd på den fysikaliska forskningens rön. Efter det första kapitlet om energin i alla dess former givas dels översikter över hur fysiken ingripit på olika arbetsområden, såsom lantbruk och läkarvetenskap, dels skildringar av hur till en början betydelselösa fysikaliska upptäckter genom samverkan av olika omständigheter blivit grundläggande för viktiga tekniska uppfinningar. Sålunda redogöres för spektroskopet och elektronrörel, radion och grammofonen. Ett kapitel behandlar flygning, ett annat meteorologi och luftkonditionering, ett tredje linser, teleskop, mikroskop och polaroidglas. Framställningen blir desto mer intressant, som de allra senaste framstegen inom tekniken, t. ex. television och fotografering med ultraröda strålar, behandlas. Man får en mängd på ett synnerligen underhållande sätt serverade uppgifter, med vilka man kan levandegöra fysikundervisningen. Ibland tar förf. måhända väl lätt på problemen, och vissa krav ställas på läsarens förkunskaper, men arbetet är ju inte avsett som någon grundläggande lärobok.

Bland ett så stort antal fakta råkar dock någon gång ett mindre bestyrkt förhållande komma med, såsom när det påstås, att ultraljud påskyndar mognaden av inlagda gurkor, vilket väl närmast avser den moderna botanikens upptäckt, att ultraljud påskyndar fröns mognad och tillväxt. Vad som däremot måste påtalas med mer skärpa är, att bokens två översättare tydligen inte ha tillräcklig fysikalisk utbildning, varigenom en del oegentligheter ha uppkommit. Sålunda anges att s. k. mjölkglas framställes genom att glasmassa blandas med fluor, vilken felaktiga uppgift torde ha uppkommit därigenom, att översättarna ej observerat, att det engelska fluor eller fluorite även betyder flusspat. Som ren obekantskap med nu gängse nomenklatur måste rubriceras, att det engelska X-rays genomgående översättes med X-strålar i stället för med röntgenstrålar, att ordet prisma blivit realgenus och kallas en prisma, att det tekniska namnet på fotocell påstås vara fotorör eller att det vid behandling av ljudvågor alltid talas om vibrationer per sekund i stället för svängningar per sekund, o. s. v.

Boken är skriven med pigg och rapp stil och kan trots de påtalade bristerna rekommenderas som en angenäm och givande underhållning.

Arnold Guntsch.

Ellen Gleditsch og Einar Jensen, *Laerebok i uorganisk kjemi.* Forlagt av Cammermeyers Boghandel, Oslo 1940. 343 sid., pris bunden kr. 18: 50.

Boken är skriven för blivande medicinare och farmaceuter, och dess innehåll motsvarar ganska noga kursen i oorganisk kemi för våra realstudenter, åtminstone sådan den ter sig i gängse svenska läroböcker. I några avseenden står dock innehållet på ett högre plan. Uppställningen och lärostoffets anordning visa hän på en bok, avsedd för personer, som redan ha förvärvat ett visst mått av elementära kunskaper i kemi. Om innehållet onekligen ter sig strängt traditionsbundet och inte bjuder på några sensationer, så är det å andra sidan absolut vederhäftigt och anmärkningsvärt rikt på fakta. Beträffande den typografiska utstyrseln fäster man sig vid att författarna försmått varje kraftigt framhävande av textens olika delar; boken kännetecknas, kunde man säga, av en viss lågmäldhet, men i gengäld flyter språket lätt och har en personligt älskvärd prägel, som gör att man läser arbetet med stort nöje och behållning.

G. Starck.

MARTIN HOLE, *Elevøvelser i kjemi.* Aschehoug, Oslo 1940, 75 s., kr. 1:72.

Häftet är en arbetsbok, innehållande 44 experiment inom realskolans kurs, vari eleven med ledning av kortfattade anvisningar utför försöken och på härför avsedda sidor besvarar de förelagda frågorna. Blott ytterst enkla apparater och obetydliga kvantiteter kemikalier behövas, varför även en lärare med anspråkslösa materiella resurser med fördel kan använda bokens lärogång. Försöken äro av välkänd art, logiskt framförda och, speciellt inom den organiska kemien, mycket givande. De innefatta även några titreringar och andra mätningar, t. ex. rörande salthalten i havsvatten, styrkan hos ackumulatorsyra samt volymförhållandet vid gasreaktioner. Boken torde med fördel kunna användas även vid undervisning inom folkskolans kurs.

E. Nordefeldt.

STURE LÖFGREN, *Teknisk varukännedom.* Under medverkan av Gunnar Hult och Ernst Herlin. Svenska Bokförlaget, Sthlm 1940. 148 sid., 136 ill., pris bunden kr. 3:80.

Arbetet är avsett som lärobok för tekniska mellanskolor och innehåller följande kapitel: Järn (74 sid.), Övriga metaller (17 sid.), Legeringar (11 sid.), Lerprodukter (20 sid.), Diverse material (glas, trä, smörjmedel m. m., 16 sid.), Något om bränslen och förbränning (10 sid.). Den med ifrågavarande skolform obekante läsaren förvånas över den mängd inte alltid så lättillgängligt stoff, som boken rymmer, och frågar sig, om det verkligen är en lagom kvantitet smältbar kost för en mellanskola, låt vara tekniskt betonad. Jag anför som exempel järnets kristallstrukturer och tillståndsdiagram eller kapitlet om legeringar. Emellertid framhåller författaren, att ett urval, olika för olika skolor, är avsett, likaså en viss frivillighet vid studiet av svårare avsnitt. Man frågar sig också, om inte kapitlet järn kunde få vidkännas någon avkortning och en del andra tekniska varor, särskilt organiska, införas på den så erhållna platsen. Den organiska tekniken har i vårt land inte nått den utveckling, som tillgången på råvaror motiverar, och frågan är väl, om inte våra elementära läroböcker med sitt starka framhävande av järntillverkningen ha sin andel i skulden härtill. Emellertid kan man beteckna arbetet som en förträfflig bok, förträffligt illustrerad, och även en gymnasielärare kan i den inhämta en mängd praktisk detaljkunskap av intresse för sin undervisning.

G. Starck.

Eli F. Heckscher, *De svenska penning-, vikt- och måttsystemen.* En historisk översikt. 2:a uppl. P. A. Norstedt & Söner, Stockholm 1941. 34 s. Kr. 1: 50.

Som första häfte i serien »Publikationer utgivna av Historielärarnas Förening» har Prof. Hecksehers lilla orientering i det vidlyftiga ämnet utkommit. Huvudparten av framställningen berör penningväsendet och trots det ringa omfånget får man en viss överblick över en labyrintiskt villsam terräng. En god sak är, att man får veta, att man ej *kan* begära att direkt i entydig tabellform få framlagd omräkningskursen på äldre tiders mynt till våra kronor, utan måste nöja sig med att få veta, vad ett visst belopp i penningar motsvarade i en *alldeles bestämd vara* vid en *viss tidpunkt.* Mått och vikt behandlas mera summariskt än penningväsendet, men lämpliga litteraturanvisningar underlätta ett vidare studium.

J. Tandberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Sven Arrhenius, *Eine dielektrische Untersuchung von Kohlenoxyd-Hämoglobin.* Disp. i Upsala 31. 11. 1940. Opponenter: docent Jan-Axel Reuterskiöld och fil. mag. Harry Svensson.

Ett elektriskt fält förmår icke att momentant orientera de dipolbärande molekyler, som befinna sig däri, då rivningen mot de omgivande molekylerna medför, att en viss tid är erforderlig för deras orientering. Den del av polarisationen som härrör från denna orientering bortfaller därför helt, om fältet mycket ofta växlar tecken. Mäter man därför dielkonstanten för ett dipolhaltigt medium vid olika våglängder (frekvenser), så stiger denna kontinuerligt från värdet ε_u vid 0 meters våglängd (inom optiska området) till det övre gränsvärdet ε_s vid oändligt långa vågor (statiskt fält). Är det blott fråga om en sorts molekyler, vilka blott på ett sätt bringas i rotation av växelfältet, så är den kurva, som dielkonstanterna avsatta som funktion av våglängden bilda, alltid av en och samma form, och helt fastlagd av tre storheter: gränsvärdena ε_u och ε_s, vilka kurvan närma sig asymptotiskt, och språngvåglängden λ_s, d. v. s. den våglängd, där dielkonstanten uppnår medelvärdet av ε_u och ε_s.

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Undersökningen har gått ut på att ur vid olika våglängder mellan 100 m och 3 000 m bestämda dielkonstanter för olika hämoglobinlösningar beräkna dessa tre storheter. Ur språngvåglängden erhålles den tid, relaxationstiden, som molekylen behöver för att vridas ett varv om sin axel. Denna tid är proportionell mot mediets viskositet och molekylens volym och en funktion av dess form. För hämoglobin kan molekylens volym erhållas ur ultracentrifugbestämningar. De dielektriska mätningarna användas därför för att fastställa molekylformen. Det visar sig, att för hämoglobin denna mycket nära ansluter sig till en avlång rotationsellipsoid med axelförhållandet 10 : 3. Molekylerna rotera kring sina kortaxlar, vilket tyder på, att de elektriska laddningarna äro ganska symmetriskt fördelade kring molekylens långa axel.

Ur ε_u och ε_s kan man beräkna dipolmomentet under förutsättning, att polarisationen invändningsfritt kan härledas därur. Den kända Clausius-Mosottiska polarisationsformeln är korrekt för gaser, kubiska kristaller och utspädda lösningar i dipolfria lösningsmedel (såsom bensol), och avvikelser därifrån för andra vätskor ha hittills tillskrivits associationen dipoler emellan. På senare tid ha andra formler (av Onsager m. fl.) uppställts, där associationens betydelse förringats. Användandet av dessa nya formler föra för vattenlösningar till moment av en helt annan storleksordning än de, som ur samma data beräknas medelst den Mosottiska formeln. Då den absoluta storleken av dipolmomenten spelar en stor roll inte minst för biokemiska spörsmål, har en stor del av avhandlingen ägnats åt frågan angående polarisationens beräknande och associationens betydelse.

Oavsett vilken beräkningsmetod som användes, visar sig de funna momenten vara olika för olika preparationer; frågan om detta beror på, att hämoglobinet mer eller mindre skadats under preparationen, eller om orsaken är en verklig skillnad i utgångsmaterialet, svinblod, måste lämnas tills vidare obesvarad. Dipolmomenten ligga, beräknade med Mosottis formel, mellan 11 och 18 Debye (1 Debye $= 1 \times 10^{-18}$ elektrostatiska enheter). Tillsatser även av stora mängder främmande ämnen (glycerin, glycos, glykokoll eller urinämne) ändra ej momentens storlek.

Samtliga dielkonstanter ha mätts med en för ändamålet byggd högfrekvensbrygga. I korthet redogöres även för andra mätmetoder.

Sven Brohult, *Investigations of Helix Pomatia Haemocyanin.* Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Ser. IV, Vol. 12. N:o 4. 69 sid. Disp. vid Uppsala Universitet $^{9}/_{11}$ 1940. Opponenter: docent Ole Lamm och mag. scient. Kai O. Pedersen.

Inledningsvis redogöres kortfattat för hämocyaninernas egenskaper samt för ultracentrifugen och dess metoder. Hämocyaninerna, som innehålla koppar, höra till de respiratoriska äggviteämnena. De finnas lösta i blodplasman hos vissa arthropoder och mollusker. Genom sedimentationsanalyser i ultracentrifugen ha Svedberg och medarbetare visat, att hämocyaninerna äro jättemolekyler med molekylvikter från ungefär en halv miljon upp till ungefär 10 miljoner. De ha vidare funnit, att flera av dessa jättemolekyler vid förändring av pH dissocieras i submultiplar och att denna dissociation är reversibel, ifall pH-förändringen ej varit alltför stor. Till de hämocyaniner, som kunna undergå en dylik dissociation, hör bl. a. hämocyaninet från vinbergssnäckan, Helix pomatia. I föreliggande arbete har Helix pomatia hämocyanin varit föremål för en mera detaljerad undersökning.

I en första avdelning (*dissociationsreaktioner*) redogöres för molekylviktsbestämningar av hämocyaninet och dess dissociationsprodukter samt för en rad olika dissociationsreaktioner. Molekylvikterna (M) ha bestämts genom sedimentationsmätningar kombinerade med diffusionsmätningar. Resultaten framgå av följande tabell:

Molekylvikter för Helix pomatia hämocyanin och dess dissociationsprodukter.

	M	$M_{\text{ber.}}$
Ursprunglig molekyl	$8{,}91 \cdot 10^6$	$9{,}01 \cdot 10^6 = 512 \cdot 17600 = 2^9 \cdot 17600$
Första dissociationsprodukt	$4{,}31 \cdot 10^6$	$4{,}51 \cdot 10^6 = 256 \cdot 17600 = 2^8 \cdot 17600$
Andra »	$1{,}03 \cdot 10^6$	$1{,}13 \cdot 10^6 = 64 \cdot 17600 = 2^6 \cdot 17600$

Som tidigare antagits av Svedberg, svara dissociationsprodukterna sannolikt mot en halv och en åttondedel av den ursprungliga molekylen. $M_{\text{ber.}}$ äro de molekylvikter, som beräknats enligt Svedbergs lag om enkla multiplar. Om 17 600 tages som enhet (den för alla äggviteämnen använda grundenheten), bli multiplarna 512, 256 och 64 gånger 17 600.

Svedberg och medarbetare ha visat, att Helix pomatia hämocyanin dissocieras i submultiplar vid pH-förändring. Författaren har funnit, att denna dissociation framkallas likaledes vid tillsats av salt. Dissociationen ökar med jonernas valens och är beroende av både katjon och anjon. I ej alltför höga saltkoncentrationer är effekten av olika salttyper följande:

$$1-4 > 1-3 > \begin{matrix}2-1\\1-2\end{matrix} > 1-1.$$

Hämocyaninmolekylen dissocieras i submultiplar likaledes av icke-elektrolyter såsom glykos, glycerin och urinämne. Effekten är emellertid mindre än för elektrolyterna.

Det framgår av denna och tidigare undersökningar, att hämocyaninets dissociation framkallas av ett stort antal olika ämnen. Dissociationen är således ett allmänt fenomen, som ej är knutet till en speciell typ av föreningar. Hämocyaninmolekylen uppför sig i flera avseenden som en svårlöslig kristall, vilkens löslighet ökas i närvaro av elektrolyter. Dissociationsprodukterna kunna betraktas som stora elektrolytjoner och dissociationen, till en viss grad, som ett löslighetsfenomen.

I en andra avdelning (*spjälkningsreaktioner*) beskriver författaren inverkan av ultraljud, ultraviolett ljus och α-partiklar. De produkter, som erhållas, äro i storleks- och formhänseende lika med de dissociationsprodukter, som erhållas vid pH-förändring och vid tillsats av salter eller icke-elektrolyter, men då de kunna förekomma i lösningar, där normalt endast den ursprungliga hela molekylen existerar, måste de emellertid ha andra egenskaper än dissociationsprodukterna. De kallas därför spjälkningsprodukter.

Om en hämocyaninlösning, som endast innehåller den ursprungliga molekylen, utsättes för påverkan av ultraljud, erhålles halva molekyler och i vissa fall åttondedels molekyler.

Vid inverkan av ultraviolett ljus spjälkas hämocyaninmolekylen i halva molekyler. Reaktionen sker även vid flytande lufts temperatur; den är monomolekylär och temperaturoberoende.

Hämocyaninmolekylen spjälkas likaledes i halvor vid inverkan av α-strålar. Spjälkning äger rum såväl i rumstemperatur som vid flytande lufts temperatur. Försök av Svedberg och författaren ha visat, att varje hämocyaninmolekyl, som träffas av en α-partikel, spjälkas i halvor.

Homopolära bindningar som t. ex. peptidbindningen kunna brytas vid de ovan nämnda spjälkningsreaktionerna. När sådana bindningar brytas, störs fördelningen av de laddade grupperna. Härvid ändras de attraktiva krafterna mellan molekylfragmenten, vilket skulle kunna förklara, att submultiplar av den ursprungliga molekylen uppträda i sådana lösningar, där de normalt ej förekomma.

OVE LUNDBERG, *On random processes and their application to sickness and accident statistics.* Disp. i Stockholm den $^{14}/_{12}$ 1940. Opponenter: docent HERMAN WOLD och amanuens SVEN-GUNNAR LINDBLOM.

En »random process» eller en stokastisk process är en process, vars förlopp mer eller mindre sammanhänger med utfall av slumpen. En sådan process är blott bestämd med viss sannolikhet (stokastiskt bestämd). Motsatsen till en stokastisk process är en process, vars förlopp är fullt bestämt ur vissa initialvillkor. Som processer av sistnämnda slaget kunna ett flertal kemiska och fysikaliska processer betraktas. Emellertid kan ett sådant fenomen som diffusionen lämpligen beskrivas genom en stokastisk process (diffusionsprocess).

Riskförloppet för ett försäkringsbolag är ett typiskt exempel på en process av slumpkaraktär. Låt oss exempelvis betrakta riskförloppet för en sjuk- eller olycksfallsförsäkrad individ, vilket vi för enkelhets skull tänka oss representerat av antalet skador. En sådan process blir stokastiskt bestämd genom antagandet att sannolikheten för att n skador skola inträffa under ett tidsintervall (s, t) är entydigt bestämd av enbart antalet inträffade skador före tidpunkten s, och sålunda oberoende av vid vilka tidpunkter sistnämnda skador inträffat. Stokastiskt bestämda processer, som äro kontinuerliga i tiden, ha under generella förutsättningar blivit behandlade av den ryske matematikern Kolmogoroff.

Ett fortlöpande hasardspel kan betraktas som en stokastisk process. Låter man här de enskilda spelen (kast med tärning, dragningar av kulor ur en urna etc.) ske tätare och tätare, kommer i limes ett spel att äga rum varje tidsintervall, hur litet detta än väljes. Sannolikhetsschemat för ett dylikt kontinuerligt hasardspel erhålles genom gränsövergång i sannolikhetsschemat för det givna hasardspelet. I förf:s arbete intar den process, som erhålles genom gränsövergång i Pólya-Eggenbergers urnschema, en central plats bland de allmänna processer som behandlas. Nämnda urnschema är baserat på följande modell:

Ur en urna innehållande ett givet antal vita och svarta kulor dragas successivt kulor på så sätt att efter varje dragning återlägges den dragna kulan plus eller minus ett visst antal av samma färg som den sist dragna kulan. Detta antal utgör ett mått på den s. k. sannolikhetssmittan i försöket. Om proportionen av vita kulor som dragits är hög, ökas eller minskas sannolikheten för vit i följande dragningar med ett värde som beror av sannolikhetssmittans storlek och tecken.

Skadeförloppet inom sjuk- och olycksfallsförsäkring kan schematiskt tolkas som ett spel där positiv sannolikhetssmitta föreligger. Personer med många skador under en period uppvisa enligt erfarenheten hög skadefrekvens även under en följande period. Vid lämpligt val av de två ingående parametrarna visar det sig vidare, att Pólya-Eggenberg's sannolikhetsschema efter gränsövergång ger en god anpassning till den observerade frekvensfördelningen av antalet skador.

Föredrag under våren 1941 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Kemiska Föreningen, ordf. fil. dr K. E. Thomé, sekr. fil. lic. Ido Leden.

Föredrag: fil. dr S. Hagman, Konstämnen (${}^{31}/_{1}$); fil. mag. T. Bergkvist, Styrolklorhydrinernas bildningssätt och alkaliska hydrolys (${}^{31}/_{1}$); docent N. Ryde, Om atomernas elektronkonfiguration (${}^{14}/_{3}$); fil. lic. K.-J. Karlsson, Några klor- och jodhaltiga bensolderivats termokemi (${}^{2}/_{5}$).

Föreningen i Lund för matem.-naturv. undervisning, se sid. 90.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. lic. S. Danielson.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. E. Holm, sekr. amanuens B. Grabe.

Föredrag: byrådirektör J. W. Sandström, Meteorologiska problem (tillsammans med Geofysiska föreningen, ${}^{11}/_{2}$); observator Y. Öhman, Polarisationseffekter i kometspektra (${}^{24}/_{2}$); prof. W. Weibull, Statistiska synpunkter på hållfasthet och liknande fysikaliska företeelser (${}^{17}/_{3}$); laborator S. Benner, Sekundärstrålarnas betydelse för mätning och dosering inom radiologien (${}^{24}/_{3}$); prof. H. Müntz, Über eine theoretische Ableitung der unteren kritischen Reynoldszahl (${}^{28}/_{4}$); prof. Lise Meitner, Über die Energieniveaus der Atomkerne (${}^{12}/_{5}$).

Föreningen för matem.-naturv. undervisning, se sid. 89.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. L.-G. Sillén.

Föredrag: prof. A. Fredga, Om bestämmandet av konfigurativa sammanhang hos optiskt-aktiva föreningar (${}^{14}/_{3}$); prof. P. E. Simola, Helsingfors, Om omsättning av pyrodruvsyra i djurorganismen (${}^{4}/_{4}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. S. Täcklind, sekr. fil. kand. B. Kjellberg.

Föredrag: prof. H. Bohr, Köpenhamn, Sannolikhetskalkylens matematiska grundsatser (${}^{21}/_{2}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Gunnar Kellström, v. ordf. docent B. Edlén.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. lic. S. Brohult.

Föredrag: prof. C. Drucker, Bestämningar av specifika volymer i binära och ternära lösningar (${}^{21}/_{2}$); prof. A. Tiselius, Om adsorptionsanalys (${}^{8}/_{4}$); Dr. R. Lepsius, Neue Werkstoffe und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der Technik (${}^{27}/_{5}$).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1161) *Man hyvlar av kanterna på en regelbunden tetraeder så, att varje sidoyta minskar lika mycket runt om. Hur stor del av tetraederns volym är kvar, då av varje ursprunglig sidoyta endast medelpunkten återstår?* *X.*

1162) *I en oändlig följd av storheter* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *byta först* a_1 *och* a_2 *plats, därpå byta* a_2 *och* a_1 *plats med* a_3 *och* a_4*, därefter* a_3, a_4 *och* a_2 *med* a_1, a_5 *och* a_6 *o. s. v., så att den n:te operationen innebär platsbyte mellan de n då främsta storheterna och de n därpå följande med bibehållen ordningsföljd inom vardera gruppen. Komma någon gång* a_1 *och* a_2 *att samtidigt återfå första, resp. andra platsen?* *B-r.*

1163) *O är en fast, P en rörlig punkt på en given cirkels periferi. På tangenten i P avsättes* $PT_1 = PT_2 = PO$*. Ortkurvan för* T_1 *och* T_2 *jämte den givna cirkeln avgränsa fyra områden (ett av dem cirkeln), vilkas ytor skola beräknas.* *G. Printz.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1164) Lös ekvationen

$$(ax+b)(bx+c)(cx+d)(dx+a) = (a+bx)(b+cx)(c+dx)(d+ax).$$

Svar: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$.

1165) Lös ekvationssystemet

$$\frac{x(y+z-x)+2}{x^2} = \frac{y(z+x-y)-2}{y^2} = \frac{z(x+y-z)-4}{z^2} = -2.$$

Svar:

x	y	z
1	-1	-2
-1	1	2.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1164—1167 äro insända av *X.*, 1168—1170 av *N. J.*, 1171—1174 av *G. Printz.*

1166) Mätetalen för en triangels sidor, mätta i en viss längdenhet äro rötterna till ekvationen $x^3 - 7x^2 + 15x - 9{,}5 = 0$. Beräkna triangelns yta.

Svar: $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ytenheter.

1167) Termerna t_1, t_2, t_3 ... i en aritmetisk serie med $s_n = \alpha n^2 + \beta n$ ordnas i grupper på följande sätt $| t_1 | t_2, t_3 | t_4, t_5, t_6 | t_7, t_8, t_9, t_{10} | \ldots$. Visa, att n:te gruppens termer ha summan $\alpha n^3 + \beta n$.

1168) Visa, att medelpunkterna A och a i två cirklar C och c, tangeringspunkterna på tangenterna från a till C och på tangenterna från A till c samt skärningspunkterna mellan de yttre och inre gemensamma tangenterna ligga på samma cirkel men aldrig på samma reguljära polygon.

1169) En gemensam sekant till två cirklar C och c i samma eller olika plan skär C i A och B samt c i a och b. Sök relationen mellan längderna S och T av tangenterna till C från a och b samt längderna s och t av tangenterna till c från A och B.
Svar: $S \cdot T = s \cdot t$.

1170) I en cirkel med diametern D äro inskrivna: en fyrhörning med sidorna a, b, c och d, en med sidorna a, c, d och b samt en med sidorna a, d, b och c i ordning tagna. Vinklarna mellan de riktningar av diagonalerna i de tre fyrhörningarna som gå mot ändpunkterna av sidan a äro resp. u, v och w. Beräkna a, b, c och d.

Svar: $$a = D\cos\left(180^\circ - \frac{u+v+w}{2}\right), \quad b = D\cos\frac{u+v-w}{2},$$
$$c = D\cos\frac{v+w-u}{2}, \quad d = D\cos\frac{w+u-v}{2}.$$

1171) I cirkelsektorn OAB drages normalen i P mot kordan AB. Normalen skär sektorns båge i E (mellan A och B) och radien OA i F (mellan O och A). Om $EP = PF$, så är $\cos \wedge AOB = -\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}$.

1172) AA_1 och BB_1 äro två kordor i en cirkel, O är deras skärningspunkt och P en punkt på cirkeln; BP skär AA_1 i L, AP skär BB_1 i M. Om $\overrightarrow{OL} : \overrightarrow{LA_1} = l$ och $\overrightarrow{OM} : \overrightarrow{MB_1} = m$, så är $lm = \sin^2 \wedge APB : \sin^2 \wedge AOB$.

1173) Hur skall man dela en sträcka i två delar för att det ena av de klot, som ha delarna till diametrar skall få samma volym som det område mellan kloten, vilket ligger inom klotens gemensamma omskrivna kon?

Svar: Enligt gyllene snittet.

1174) I en halvcirkel drages en korda AB. I kordans ändpunkter dragas tangenterna till cirkeln; dessa skära varandra i C. Bestäm kordans medelpunktsvinkel, så att den volym, som alstras av triangeln ABC vid rotation kring halvcirkelns diameter delas mitt itu av den klotyta, som halvcirkeln alstrar.

Svar: 90°.

Lösn. till uppg. 1133—1135.

1133) *En triangels sidor äro* a, b, c, *dess yta* T, *radien i den omskrivna cirkeln* R. *Visa, att* $T\sqrt{48} \leqq a^2 + b^2 + c^2 \leqq 9R^2$, *där likhetstecknen gälla för liksidiga trianglar och endast för dessa. Storheterna* $q' = \dfrac{9R^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 1$ *och* $q = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{48T^2} - 1$ *äro därför* $\geqq 0$. *Visa, att* $q\left(1 - \sqrt{\dfrac{q}{1+q}}\right) \leqq 4q' \leqq q\left(1 + \sqrt{\dfrac{q}{1+q}}\right)$, *där vartdera likhetstecknet gäller för vissa likbenta trianglar och (om man bortser från de liksidiga) endast för dessa.* *C.*

Enligt formlerna $16T^2 = 4c^2h_c^2 = 4c^2\left[a^2 - \left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2\right]$ och $R = \dfrac{abc}{4T}$ kan den ekvation, som har rötterna a^2, b^2 och c^2, skrivas $t^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,t^2 + \dfrac{16T^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2}{4} \cdot t - 16R^2T^2 = 0 (1)$. Då denna ekv. har tre reella rötter, måste vänstra ledets derivata ha reella nollställen, vilka sammanfalla endast, då $a^2 = b^2 = c^2$. Villkoret härför: $4(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3[16T^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2] \geqq 0$ är ekvivalent med villkoret $T\sqrt{48} \leqq a^2 + b^2 + c^2$ eller $q \geqq 0$. Samma sak kan uttryckas med att $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 2[(\Sigma a^2)^2 - 3\Sigma a^2b^2] \geqq 0$, där likhetstecknet förutsätter $a^2 = b^2 = c^2$. Om man i (1) inför uttrycken för R^2, T^2 och R^2T^2 i q, q' och $a^2 + b^2 + c^2$ samt sätter $t = v(a^2 + b^2 + c^2)$, övergår denna ekv. i $v^3 - v^2 + \left(\dfrac{1}{3(q+1)} + 1\right)\dfrac{v}{4} - \dfrac{q'+1}{27(q+1)}$ (2), vilken har tre reella rötter liksom (1). Substitutionen $v = u + \dfrac{1}{3}$ leder till $u^3 - \dfrac{q}{12(q+1)} \cdot u - \dfrac{4q' - q}{108(q+1)} = 0$. Diskriminanten är $\geqq 0$, varav $\dfrac{4q^3}{12^3(q+1)^3} - \dfrac{27(4q' - q)^2}{108^2(q+1)^2} \geqq 0$, där likhetstecknet förutsätter likbent eller liksidig triangel. Den sista olikheten ger $-q\sqrt{\frac{q}{q+1}} \leqq 4q' - q \leqq q\sqrt{\frac{q}{q+1}}$, vilket är ekvivalent med påståendets senare del. Då $q \geqq 0$, följer härav att $q' \geqq 0$ (varvid $q' = 0$, endast då $q = 0$), vilket ingår tidigare i påståendet.

X.

Även löst av *B-r.*

1134) *På en rät linje L har man fyra punkter, som i ordning betecknas med A, B, C, D. Visa, att villkoret för att utanför L finnes en punkt, från vilken AB, BC och CD synas under lika vinklar, är $3AB \cdot CD > BC \cdot AD$.*

C.

Om punkten O uppfyller villkoret, är $\frac{BC}{AB} : \frac{CD}{AD} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} : \frac{\triangle OCD}{\triangle OAD} =$ $= \frac{OB \cdot OC \sin v}{OA \cdot OB \sin v} : \frac{OC \cdot OD \sin v}{OA \cdot OD \sin 3v} = \frac{\sin 3v}{\sin v} = 3 - 4\sin^2 v > 0$ $(0 < v < 60°)$ $\because 3 > \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AD}{CD}$. Villkoret är alltså nödvändigt. Antag, att det är uppfyllt. Då finnes en vinkel v mellan 0° och 60°, som satisfierar ekv. $\frac{\sin 3v}{\sin v} = \frac{BC}{AB} : \frac{AD}{CD}$. Segmenten ACO och BDO, som bägge innehålla vinkeln $2v$, uppritas åt samma håll. Bågarna måste råkas i en punkt O utanför L. Antag $\angle BOC = x$ $(0 < x < 2v)$. Ur ekv. $\frac{\sin x}{\sin(2v - x)} : \frac{\sin(2v - x)}{\sin(4v - x)} = \frac{\sin 3v}{\sin v}$ följer $x = v$. Villkoret är sålunda tillräckligt.

X.

Även löst av *B-r, E. Smn, David Hjelle,*
Lars Krogset, S. L., Bengt Andersson.

1135) *Två cirklar, den ena omskriven om, den andra inskriven i samma triangel, äro givna. Triangeln kan då (enl. uppgift 1074) förskjutas så, att medan spetsarna förflytta sig utefter den yttre cirkelns periferi, sidorna fortfara att tangera den inre cirkeln. Sök orten för medelpunkten till en vidskriven cirkel.*

H. Tengnér.

Den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln har centrum O och radien R. Den inskrivna cirkelns centrum är I och den vid BC vidskrivna cirkelns centrum I_a. Bissektrisen AII_a skär O i P. Om cirklarna I och I_a tangera BC i T och S, är $BS = TC$. Linjen OP, som är mittpunktsnormal till BC, ligger alltså mitt emellan de med densamma parallella TI och SI_a, varför $IP = PI_a$ eller $II_a = 2IP$. Satsen gäller även, om $AB = AC$, fastän beviset då måste modifieras något. Den sökta orten är alltså en cirkel med medelpunkten M på förlängningen av OI åt O till, varvid $MO = OI$ och radien $2R$.

S. L.

Även löst av *B-r.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Mars-april 1941.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x+3)}{x-3}.$$

2. Från en ångare, som med konstant hastighet går i nordostlig riktning, siktar man kl 8 en fyr i en riktning, som från norr avviker 20° mot öster. Kl 9 ser man fyren rakt i norr. Hur dags kan man vänta sig se fyren rakt i väster?
3. En person donerar vid början av ett år en fond på 100 000 kr till ett läroverk. Under de tio närmaste åren skall vid varje års slut ett belopp av 7 000 kr utbetalas till visst ändamål, men efter den nämnda tidens förlopp skall fondens årliga avkastning användas till stipendier. Hur stor summa kan då årligen utdelas, om fonden hela tiden är placerad mot $3\,{}^1/_2$ % ränta?
4. Triangeln *ABC* är inskriven i en cirkel. Vinkeln *A* är 120°, sidorna *AB* och *AC* 5 cm respektive 3 cm. Hur stor är ytan av det cirkelsegment, som har *BC* till korda och som ligger helt utanför triangeln?
5. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av den inskrivna cirkelns tangeringspunkt i delarna 3 cm och 10 cm. Beräkna triangelns spetsiga vinklar.
6. En diameter i en cirkel delar en korda i förhållandet 3 : 4 och delas själv av kordan i delar, som äro 2 cm och 3 cm. Beräkna vinkeln mellan diametern och kordan.
7. I en likbent triangel *ABC*, där vinkeln *C* vid triangelns spets är $38°{,}94$, inskrives triangeln $A_1B_1C_1$, så att C_1 ligger i mittpunkten av basen *AB*, C_1A_1 är vinkelrät mot *BC* och C_1B_1 är vinkelrät mot *AC*. Bestäm förhållandet mellan radien i den kring triangeln $A_1B_1C_1$ omskrivna cirkeln och radien i den i triangeln *ABC* inskrivna cirkeln.
8. I triangeln *ABC* bilda sidorna *BC*, *AC* och *AB* i nämnd ordning en geometrisk serie, antingen stigande eller fallande. Bissektrisen till vinkeln *C* delar motstående sida i förhållandet 2 : 3. Beräkna triangelns vinklar i de båda fallen.

Resultat: 1. $x_1 = 0$; $x_2 = 1\frac{1}{3}$. 2. kl 10.45. 3. Om första utbetalningen göres vid donationsårets slut (avsedd tolkning), blir svaret 2063 kr, göres den först påföljande år (som är det första av de »närmaste åren»), blir svaret 2236 kr. 4. 41,28 cm². 5. $67^\circ{,}38$ och $22^\circ{,}62$. 6. 45°. 7. 2.000 : 1. Om de in- och omskrivna cirklarnas radier äro r och R, så är $CC_1 = 2R$ och $\sin 19^\circ{,}47 = \frac{r}{2R - r}$. 8. Vid stigande serie (kvot $= \frac{3}{2}$) erhålles $a : b : c = 4 : 6 : 9$ och vinklarna $A = 20^\circ{,}74$; $B = 32^\circ{,}09$; $C = 127^\circ{,}17$. Vid fallande serie (kvot $= \frac{2}{3}$ erhålles $a : b : c = 9 : 6 : 4$ och vinklarna $A = 127^\circ{,}17$; $B = 32^\circ{,}09$ och $C = 20^\circ{,}74$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En triangels hörn ligga i punkterna $A\ (-1\frac{3}{4};\ -2)$, $B\ (1;\ 3\frac{1}{2})$ och $C\ (4;\ -3)$. Höjden från C och dennas förlängning skära koordinataxlarna i punkterna D och E. Bevisa, att triangeln ADE är likbent.
2. Mellan varje par termer i en konvergent oändlig geometrisk serie inskjutas tvenne nya termer, så att en ny geometrisk serie bildas, bestående av både de ursprungliga och de nya termerna. Hur stor är kvoten i den ursprungliga serien, om den nya seriens summa är dubbelt så stor som den ursprungligas?
3. Av en pyramid, vars höjd är 12 cm och basyta 48 cm², skall genom två med basytan parallella plan utskäras en skiva med tjockleken 3 cm och volymen 31 cm³. Beräkna planens avstånd från pyramidens topp.
4. Angiv ekvationen för den gemensamma tangenten till de båda kurvorna $y = x^3$ och $y = x^3 + 4$. Bestäm därefter koordinaterna för de punkter, där tangenten skär kurvorna.
5. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 7, \\ xy - yz - zx = \frac{1}{2}, \\ (x + y)^2 = 12 + z^2. \end{cases}$$
6. Ekvationen $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = a \sin x$, där a är en konstant, satisfieras av $x = 60^\circ$. Bestäm samtliga vinklar, som satisfiera ekvationen.
7. Två kongruenta kvadrater äro placerade så, att de fullständigt täcka varandra. Den ena vrides i kvadraternas plan en vinkel av 30° kring diagonalernas skärningspunkt. Hur många procent av vardera kvadratens yta utgör ytan av den figur, som efter vridningen blir gemensam för kvadraterna?

8. Genom en godtyckligt vald punkt P på sidan AB i rektangeln $ABCD$ drages normalen mot DP. Denna skär antingen sidan BC eller sidan CD. Om skärningspunkten kallas R, avskäres i förra fallet en triangel BPR, i senare fallet en fyrhörning $BPRC$. Vilket villkor måste rektangelns sidor uppfylla, för att den nämnda avskurna figuren, oberoende av punkten P:s läge på AB, skall bli en triangel? Var på AB skall P vara belägen, för att den avskurna triangelns yta skall bli så stor som möjligt?

Resultat: **2.** $\sqrt{5} - 2 = 0{,}2361$. **3.** 4 och 7 cm. **4.** Den gemensamma tangenten är $y - 3x = 2$; denna tangerar $y = x^3$ och $y = x^3 + 4$ i resp. $(-1; -1)$ och $(1; 5)$ och skär dem i resp. $(2; 8)$ och $(-2; -4)$. Lösningen förenklas, om man observerar och bevisar, att kurvorna ligga symmetriskt i förhållande till punkten $(0; 2)$, genom vilken den gemensamma tangenten måste gå. **5.** Av ekv. (1) och (2) erhålles $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz = 8$, dvs $x + y - z = \pm\sqrt{8} = m$, som tillsammans med ekv. (3) ger $z = \frac{2}{m}$; $\because x + y = z + m = \frac{10}{m}$. Enl. ekv. (2) blir då $xy = \frac{1}{2} + z(x + y) = 3$. Man har då: $m = \pm\sqrt{8}$, $z = \frac{2}{m}$, $x + y = \frac{10}{m}$, $xy = 3$, varav följande sammanhörande x-, y-, resp. z-rötter erhållas: $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** Man får $\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$, varav $\sin(2x - x) + \sin 4x = 0$ o. s. v. Rötterna bli: $n \cdot 72^\circ$; $60^\circ + n \cdot 120^\circ$. **7.** $84{,}53\ \%$ $\left(= 100 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.** Villkor $AB \leqq 2 \cdot AD$. (Beräkna max. för BR, som skall vara $\leqq$ AD.) Triangelns yta är max., då $AP = \frac{AB}{3}$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Från punkten $P\ (7; \frac{3}{5})$ äro tangenterna dragna till ellipsen $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tangeringspunkterna äro A och B; O är ellipsens medelpunkt. Visa, att fyrhörningen $PAOB$ är en parallellogram.
2. En triangel bildas av asymptoterna till kurvan

$$y = \frac{3(x^2 + 1)}{2x}$$

och tangenten till kurvan i den punkt, som har abskissan $\frac{5}{6}$. Beräkna den största vinkeln i denna triangel.

3. Hypotenusan i en rätvinklig triangel betecknas med a, kateterna med b och c. Uttrycket
$$\frac{a(b+c)}{bc}$$
antar olika värden, då den rätvinkliga triangelns form ändras. För vilken triangel antar uttrycket det minsta värdet?
4. Från vertex O i en parabel dragas två mot varandra vinkelräta kordor, OA och OB. Dessa kordors förlängningar skära parabelns styrlinje i C och D. Visa, att förhållandet mellan ytorna av trianglarna AOB och COD är konstant.
5. En rät linje går genom ena ändpunkten av en hyperbels transversalaxel och bildar 45° vinkel med denna. Hyperbelns asymptoter avskära av linjen ett stycke, som är dubbelt så stort som den av hyperbeln avskurna kordan. Beräkna hyperbelns excentricitet.
6. Två mot varandra vinkelräta tangenter till en parabel skära varandra i P. A är styrlinjens skärningspunkt med parabelns axel, F är parabelns brännpunkt. Visa, att tangenterna äro inre och yttre bissektriser till vinkeln FPA.
7. På x-axeln i ett givet koordinatsystem är en sträcka AB med längden a belägen. Sammanbindningslinjerna mellan punkten $(a;\,a)$ och A respektive B skär y-axeln i A_1 respektive B_1. Linjerna AB_1 och BA_1 skära varandra i P. Sök orten för P, då AB rör sig utefter x-axeln.

Resultat: **1.** Tangenternas vinkelkoeff. erhållas ur ekv. $\frac{3}{5} = 7k \pm \pm \sqrt{25k^2+9}$, dvs $k^2 - \frac{7}{20}k - \frac{9}{25} = 0$. Rötternas produkt, som är $-\frac{9}{25}$, visar att PA och PB äro parallella med var sin av två konjugatdiametrar; således är fig. $PAOB$ en pgrm. **2.** $89^\circ{,}735$ ($\operatorname{tg}\alpha = 216$). **3.** För den likbenta, rätvinkliga triangeln. Är en vinkel v, blir uttrycket $\frac{1}{\sin v} + \frac{1}{\cos v}$; min. avgöres enklast medelst första derivatans tecken. **4.** Om parabelns ekv. är $y^2 = 4ax$ och $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$, så gäller $\frac{y_1^2}{4a} \cdot \frac{y_2^2}{4a} = x_1 x_2$; men $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ $(OA \perp OB)$, varav $x_1 x_2 = 16a^2$. Det sökta förhållandet $= \frac{\Delta AOB}{\Delta COD} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{x_1}{a} \cdot \frac{x_2}{a} = \frac{16a^2}{a^2} = 16$. **5.** Linjen skär asymptoterna i

A och B; vertex är V. Enär AB och hyperbelkordan har gemensam mittpunkt, är $AV = 3 \cdot BV$. Man kan därför sätta A:s och B:s koord. $(a + y; y)$ resp. $\left(a - \frac{y}{3}; -\frac{y}{3}\right)$. Av $a + y = 3\left(a - \frac{y}{3}\right)$ fås $y = a$, varav $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ och $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **6.** Två mot varandra vinkelräta tangenter råkas på styrlinjen. Från en av tangeringspunkterna, T, fälles en normal TN mot styrlinjen. Då är $FT = NT$, $\angle PTN = \angle PTF$ och PT gemensam, varför $\triangle PTN \cong \triangle PTF$, varav $\angle NPT = \angle FPT$ o. s. v. **7.** Uppgiften kan generaliseras. Punkten $(a; a)$ ersättes av en godtycklig punkt Q $(m; n)$. Koord. för punkterna A, B, A_1 och B_1 äro resp. $(a; 0)$, $(a_1; 0)$, $(0; b)$ och $(0; b_1)$ samt för $P(x; y)$. Enligt interceptformen är $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$, $\frac{m}{a_1} + \frac{n}{b_1} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1$, $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$. Genom subtraktion av de två första, resp. två sista av dessa ekv. erhålles $m\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) = -n\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right)$ och $x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) = y\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right)$, vilka vid division ge $y = -\frac{n}{m}x$, dvs en linje genom origo, O. Alltså beskriver P en sådan linje OP, att vinklarna mellan OP och OQ halveras av koordinataxlarna. I specialfallet $m = n$ blir orten linjen $y = -x$.

Uppgifter i fysik.

Obs. 1. Lösningarna till uppgifterna nr 1—5 samt 7 och 8 böra åtföljas av enkla figurer.

Obs. 2. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Ett åkdon har fastnat på en dålig väg. För att åter få det loss spänner man upp ett starkt rep mellan åkdonet och ett träd, fattar repet vid mittpunkten M och drager åt sidan, vinkelrätt mot sammanbindningslinjen mellan repets båda fästpunkter A och B. Då repet är spänt, är dess fria längd $AMB = 12$ m. Den kraft, som angriper i M, är 40 kgf, och avståndet mellan repets mittpunkt och mittpunkten på sammanbindningslinjen är 4,5 dm. Med hur stor kraft påverkas åkdonet i repets riktning?
2. En pojke, som väger 55 kg, sitter mitt på den horisontella brädan till en gunga. Brädan, vars längd är 5 dm och vikt 2 kg, är upphängd i två vertikala rep, fastgjorda i var sin ända av brädan. Hur mycket arbete erfordras för att vrida brädan med pojken ett halvt varv omkring gungans vertikala symmetriaxel, så att repen lägga sig i kors? De två repen, som

praktiskt taget äro otöjbara, ha vartdera en längd av 2 m mellan fästpunkterna. Repens vikt försummas.

3. Vid en bestämning av specifika värmet för en viss koksaltlösning användes följande metod. Två enliters termosflaskor *A* och *B* av samma sort placerades i en gemensam låda och skyddades noga mot värmeutbyte med omgivningen. I vardera flaskan infördes en elektrisk uppvärmningsspole; de båda spolarna kopplades i serie. En första försöksserie utfördes med rent vatten i de båda flaskorna. Det ena lödstället av ett termoelement nedsänktes i vattnet i flaskan *A* och det andra lödstället i vattnet i flaskan *B*. Termoelementet var anslutet till en galvanometer, och på denna kunde skillnaden mellan vätskemängdernas temperaturer iakttagas; genom omrörning sörjdes för att inom samma vätskemassa temperaturen var densamma. Vattenmängderna avpassades så, att galvanometern förblev strömlös, om uppvärmningsströmmen slöts för några minuter. Detta inträffade, om flaskan *A* innehöll 700 g vatten och flaskan *B* 697 g. Vid den följande försöksserien utbyttes vatttenmängden i flaskan *B* mot koksaltlösningen, medan innehållet i flaskan *A* var oförändrat. I detta fall blev uppvärmningen densamma i de båda flaskorna, om koksaltlösningen vägde 703 g. Beräkna saltlösningens specifika värme.
4. En glaspelare har kvadratiskt tvärsnitt *ABCD*; sidan *AB* är 4 cm. Ett smalt strålknippe infaller vinkelrätt mot kanten *A* i riktningen *AC*. Strålarna på ömse sidor om kanten brytas i skilda sidoytor, och strålknippet uppdelas i två delknippen, som efter utträdet ur prismat äro parallella. Beräkna avståndet mellan de parallella delknippena.
5. Objektivet hos en kamera består av två från varandra skilda positiva linssystem *A* och *B*, vilka här må betraktas såsom tunna. Avståndet mellan linssystemen är 1,0 cm. Då kameran är inställd för fotografering av ett mycket avlägset föremål, uppgår avståndet mellan plåten och linssystemet *B*, som är närmast denna, till 12,0 cm. Om linssystemet *A* bortskruvas och kameran därefter inställes skarpt på ett mycket avlägset föremål, befinnes nämnda avstånd vara 23,5 cm. Huru stort bör avståndet mellan plåten och linssystemet *B* vara, om båda systemen begagnas och föremålet står 0,5 meter framför linssystemet *A*?
6. I en elektrisk tvättgryta uppvärmas 100 liter vatten från 20° C till 60° C på 45 minuter. Vad är apparatens effektförbrukning i kilowatt, om 85 % av den tillförda energien tillgodogöres för vattnets uppvärmning?

7. Ett ackumulatorbatteri skall laddas från ett likströmsnät med 120 V spänning. Man ansluter fördenskull ett motstånd på 40 Ω med sina ändar D och F till nätet. Batteriet jämte en ampèremeter inkopplas mellan ändpunkten D och en glidkontakt E, som löper längs DF; motståndet i denna grenledning, inklusive batteriets inre motstånd, uppgår till 0,6 Ω. Glidkontakten inställes så, att strömstyrkan genom batteriet blir 5,0 A. Huru många procent av den från nätet uttagna energien omsättes i kemisk energi i batteriet, då den del av motståndet DF, som ligger mellan D och E, utgör 25 Ω?
8. Två raka mässingsrör AA' och BB' äro anbragta i horisontellt läge på ett isolerande underlag. Rörens axlar äro parallella och befinna sig på 20 cm avstånd från varandra. Vid de närbelägna ändpunkterna A och B äro rören anslutna till en galvanometerledning, vars totala motstånd är 10,2 ohm. Ett tredje rör CC' av något mer än 20 cm längd, som med god kontakt ligger an mot AA' och BB', bringas att med en hastighet av 15 cm/sek glida fram på de båda ovannämnda rören och skär sålunda kraftlinjerna i det jordmagnetiska fältet. Försöket utföres på ett ställe, där detta fält bildar vinkeln 72° med horisontalplanet och där dess styrka uttryckt i en lämplig enhet är 0,51. Galvanometern gör ett utslag på 24,0 skaldelar; man vet, att den gör en skaldels utslag för $6{,}0 \cdot 10^{-9}$ ampère och att utslaget är proportionellt med strömstyrkan. Beräkna storleken av den elektromotoriska kraft, som induceras i en ledare av 1 cm längd, vilken med hastigheten 1 cm/sek förflyttas vinkelrätt mot kraftlinjerna i ett fält av enhetsstyrka. Motståndet i mässingsrören försummas.

Resultat: 1. 267 kgf. 2. 3,62 kgm. 3. Spec. värmet är 0,991. Vid behandlingen bör man beakta, att såväl flaskornas vattenvärde som spolarnas motstånd kunna vara olika. 4. 2,63 cm. 5. 16,1 cm. 6. 7,26 kW. 7. 17,1 %. 8. $1{,}01 \cdot 10^{-8}$ volt.

Realexamen V. T. 1941.

Provräkning.

1. Tre personer, A, B och C, köpte gemensamt ett varuparti för 204 kr och delade det så, att B fick betala hälften så mycket som A och C 6 kr mindre än B. Hur mycket fick var och en betala?
2. En bil körde halva avståndet mellan två städer på 1 tim 30 min med en jämn hastighet av 60 km/tim. Den andra hälften av

vägen körde den likaledes med jämn hastighet, men farten var på denna sträcka endast 36 km/tim. Med hur många minuter skulle körtiden mellan de båda städerna ha minskats, om bilen hela vägen hållit en jämn hastighet av 48 km/tim?

3. Lös ekvationen

$$\frac{14}{35-10x}-\frac{3+x}{7x-2x^2}-\frac{3}{4x}=0.$$

4. En person köpte den 24 mars 5 st 4 % obligationer, vardera å nominellt 1 000 kr, till en kurs av 104 %. Ränteterminerna voro 15 juni och 15 december. I mäklararvode betalade han 0,1 % av kursvärdet. Han lämnade som betalning 50 000 finska mark och dessutom kontant 960,20 kr. Vad var kursen på finska mark vid tillfället i fråga?

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 9-\dfrac{12x-0{,}5y}{7}=\dfrac{\dfrac{x}{3}+1}{0{,}5}, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y(y+1)-13. \end{cases}$$

6. Falsterbokanalen beräknas få en längd av 1,6 km och ett djup av 7,5 m; dess bredd skall upptill vara 100 m och nedtill 40 m. Den skall gå genom jordlager, som praktiskt taget uteslutande bestå av sand. Utöver den sand, som måste bortföras för själva kanalen, måste enligt beräkning 2 millioner m^3 sand bortföras, huvudsakligen utanför stränderna för infartens skull. Hur många dagar skulle det taga att gräva bort all den sand, som måste bortföras, om man använde 6 muddringsmaskiner, som var och en kunde gräva bort 3 000 m^3 sand per dag?

7. I en cirkel med 8 dm radie är AB en diameter. Från A drages en rät linje, som bildar 30° vinkel med AB och träffar omkretsen i C. Normalen mot AB från C träffar AB i D. Beräkna ytan av den figur, som begränsas av de räta linjerna CD och DB samt bågen BC. $\pi=3{,}14$.

8. En cylindrisk cistern med 19,8 m^3 rymd skall gjutas av betong. Den inre höjden skall vara 2,8 m, väggarnas och bottnens tjocklek 10 cm. Hur många säckar cement åtgå till gjutningen, om man beräknar, att $\frac{1}{4}$ av gjutmassan är cement och en säck cement rymmer 30 dm^3? $\pi=3\frac{1}{7}$.

Resultat: 1. A, B och C betalade resp. 105 kr, 52,50 kr och 46,50 kr. **2.** 15 min. **3.** $x=2{,}5$. **4.** 100 finska mark = 8,60 kr. **5.** $x=3$; $y=2$. **6.** 158 dagar. **7.** $\frac{32\pi}{3}-8\sqrt{3}=19{,}63$ dm^2. 8. 30 säckar.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En pyknometer väger fylld med vatten 45,24 g. I pyknometern nedföres 20,10 g kopparnubb, varvid en del vatten rinner ut. Pyknometern jämte koppar och kvarvarande vatten väger 63,09 g. Huru stor är specifika vikten för koppar?
2. Tvärs över en 80 cm bred bordsskiva ligger en 2 m lång järnstång med kvadratiskt tvärsnitt. Den sticker ut 5 dm på ena sidan om bordet och 7 dm på den andra sidan. Stången väger 25 kg. En person fattar tag i den längst utskjutande ändan. Huru stor kraft måste han använda, om han vill lyfta denna ända ett litet stycke rakt upp, och huru stor kraft behöver han för att trycka den ett litet stycke rakt nedåt?
3. På en släde, som väger 60 kg, står en låda, som väger 90 kg. Man vill skjuta släden sakta framåt med en horisontell kraft, som anbringas på lådan. Friktionskoefficienten mellan släden och marken är 0,12. Huru stor måste friktionskoefficienten mellan lådan och släden minst vara, för att inte lådan skall börja glida i stället för släden? Såväl marken som slädflaken äro horisontella.
4. Huru mycket skulle det kosta att på elektrisk väg smälta en billast nollgradig snö, som väger 1200 kg, och uppvärma smältvattnet till + 2° C? Strömpriset är 10 öre per kWh; av den uttagna elektriska energien kan till följd av diverse förluster endast 80 % utnyttjas för det avsedda ändamålet. Smältvärmet för snö är 80. 1 wattsekund = 0,24 cal.
5. En buss väger fullastad 8 ton och fordrar en drivkraft som i genomsnitt uppgår till 4 % av bussens tyngd. Bussen drives med gengas, som framställes ur träkol, varvid 1 hl träkol beräknas lämna 75 m^3 gas med ett förbränningsvärme av 1100 kcal per m^3. Huru stor är bussens kolförbrukning per mil, om verkningsgraden är 18 %? 1 kcal = 427 kgm.
6. Motståndet i en spole uppgår till 1,05 ohm. Man vill nedbringa motståndet till jämnt 1 ohm genom att parallellt med spolen inkoppla en ledningstråd mellan spolens ändpunkter. Hur lång bör denna vara, om tråden har ett motstånd av 5,0 ohm per meter?
7. En ackumulator, en voltmeter med motståndet 3000 ohm och ett motstånd äro kopplade i serie med varandra och bilda tillsammans en sluten krets. Parallellt med motståndet är kopplad en strömbrytare. Då denna är öppen, visar voltmetern 4,2 volt, då den är sluten 6,0 volt. Huru stort är motståndet? Ingen hänsyn behöver tagas till ackumulatorns inre motstånd.

8. Vid ett försök med en elektromagnet visade det sig, att magnetlindningen uppvärmdes rätt avsevärt, om strömmen hölls sluten en längre tid. Då man ville veta, huru stark denna uppvärmning var, bröt man först strömmen, lät magneten avsvalna till rumstemperaturen, 15° C, och sände därefter åter en ström av ungefär samma styrka som förut genom lindningen. Under de första sekunderna, innan lindningen nämnvärt uppvärmts, var strömstyrkan 4,8 ampère och spänningen mellan lindningens ändar 33 volt. Sedan strömmen varit sluten tillräckligt länge, hade strömstyrkan sjunkit till 4,4 ampère och spänningen stigit till 36 volt. Man vet, att lindningens motstånd för varje grads temperaturförhöjning ökas med 1/235 av motståndet vid 0° C. Beräkna till vilket gradtal lindningen uppvärmts under försöket.

Resultat: **1.** 8,93. **2.** $8\frac{1}{3}$ kgf och $10\frac{5}{7}$ kgf resp. **3.** 0,2. **4.** 14,24 kr. **5.** 50,5 l per mil. **6.** 4,2 m. **7.** 1290 ohm ($1285\frac{5}{7}$). **8.** 63° (62°,5).

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Hur stor är skjuvpåkänningen i huvudet på en 1″-bult, då dragpåkänningen i den gängade delens kärna är 800 kgf/cm²? Huvudets höjd är 0,71 gånger bultdiametern. Kärnans diameter är 21,3 mm.
2. Ändtappen till en bäraxel är utsatt för en jämnt fördelad belastning av 900 kgf. Tappens längd göres 1,5 gånger diametern. Beräkna diametern och längden, om tillåtna böjningspåkänningen är 300 kgf/cm². Beräkna yttrycket i kgf/cm² mellan tappen och lagerskålen.
3. Ett vattenfall har en bruttofallhöjd av 14,5 m. Fallförlusterna och friktionsförlusterna i rörledningarna uppgå vid en vattenföring av 250 m³ per sekund till 4,5 % av bruttofallhöjden. Kraftstationen har 4 likadana turbingeneratorer med en turbinverkningsgrad av 88,3 % och en generatorverkningsgrad av 95 %. Hur många kW lämnar varje turbingenerator?
4. I en kran hänger lasten i fyra linor i en blockanordning. Lintrummans diameter är 500 mm och dess varvtal är 120 v/min. Hur stor är lyfthastigheten?
5. En handvinsch, som drives med två vevar över en enkel kuggväxel, har en kättingtrumma med 220 mm diameter. Kuggantalen äro 15 och 60. Vevradien är 30 cm och periferikraften i varje vev 18 kgf vid en vridhastighet av 35 varv per minut. Beräkna lyfthastigheten. Hur grov kätting erfordras? Vin-

schens verkningsgrad är 82 %. Tillåten dragpåkänning i kättingen är 530 kgf/cm².

6. En bilmotor utvecklar vid en körhastighet av 60 km per timme 18,2 hk. Bensinförbrukningen är 1,5 liter per mil. Vid gengasdrift med träkol förbrukas vid samma motoreffekt 2,25 kg per mil och vid drift med ved 4,5 kg per mil. Beräkna motorns verkningsgrad vid användande av de olika drivmedlen. Förbränningsvärmet är för bensin 10400 kcal/kg, för träkol 6300 kcal/kg och för ved 3220 kcal/kg. Bensinens spec. vikt är 0,73.
7. Enligt gällande normalbestämmelser för järnkonstruktioner till husbyggnader får nedböjningen till följd av vertikal belastning icke överstiga 1/400 av spännvidden. Hur mycket får en vid båda ändar fritt upplagd järnbalk INP 24 av 5 m spännvidd belastas, om lasten är jämnt fördelad? Hur stor blir största böjpåkänningen? Elasticitetsmodulen är 2150000 kgf/cm². (Balkens egenvikt försummas.)
8. De kvadratiska stöttorna, som uppbära taket i ett skyddsrum, äro utsatta för avknäckning. Vid en inspektion fann man i en stötta en genomgående torkspricka utefter hela längden vinkelrätt mot en sidoyta. Hur inverkar denna spricka i ogynnsammaste fall på stöttans bärförmåga?
9. Ett träbjälklag med spännvidden 4,5 m skall dimensioneras för en högsta belastning av 100 kg/m², egenvikten medräknad. Välj lämpligt bjälkavstånd och bestäm sedan lämplig bjälkdimension, om högsta tillåtna böjningspåkänningen är 80 kgf/cm².

För betyget godkänd fordras nöjaktig behandling av minst 3 exempel.

Resultat: **1**. 198 kgf/cm². **2**. Diam. 48 mm, längd 72 mm, yttryck 26 kgf/cm². 3. 7 120 kW. 4. 0,785 m/sek. 5. 0,1 m/sek; 6,2 mm kätting. **6**. Med bensin 0,168; med träkol 0,135; med ved 0,132. **7**. 7 020 kgf, 1 240 kgf/cm². 8. Bärförmågan sänkes till en fjärdedel, om sprickan ligger mitt i stöttan. **9**. Exempelvis 0,5 m avstånd och 3″ × 9″ bjälkar.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1941: 1—2.

Ur innehållet: G. Wernberg, Stjärnfördelning och absorption inom ett område av Cepheus; K. G. Malmquist, Stjärnornas massor; Y. Öhman, Den förmörkade månens temperatur; Å. Wallenqvist, Erosoppositionen och solparallaxen; Y. Öhman, Fluorescenspolarisationen i kometspektra; B. Edlén, Om solkoronans spektrum och identifieringen av koronalinjerna; K. G. Hagstroem, Integralmaskinen i Oslouniversitetets astrofysiska institut.

Svensk kemisk tidskrift, 1941: 2—4.

Ur innehållet: L. G. Sillén, X-ray Studies on BiOCl, BiOBr and BiOJ; S. Ställberg and E. Stenhagen, Monolayers of Compounds with Branched Hydrocarbon Chains; K. Myrbäck, Über die Bildung von »Isomaltose» aus Glukose durch Reversion; O. Samuelsson, Reaktioner mellan acidoider och i vatten svårlösliga ämnen; G. Nilsson, Några försök att studera järnets passivitet i starkt alkaliska lösningar med hjälp av organiska metallreagenser; B. Lundén, Die Kompressibilität ein-ein-wertiger Elektrolytlösungen; L. Enebo, m. fl., Jäst ur vassle. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Flygning, 1941: 4—10.

Ur innehållet: Flygmekanikerns ABC (flera artiklar); Luftfartsmedicinens grunder; Flygplan som orsak till bildning eller upplösning av moln; Flygande trupptransporter; Den elektriska utrustningen i flygplan och på flygmotorer (flera artiklar); Luftbromsar för flygplan; Flera mindre uppsatser om »flygnytt».

Teknik för alla, 1941: 9—21.

Ur innehållet: Gengas för alla (en serie artiklar); Hemlig skrift; Koloxidfaran; Nio dagar med Edison; Ultratryck; Strålningsteknikens senaste landvinningar; Den elektriska bilen; Ställverket, bangårdens hjärna; Det osynliga ljuset; Elektriska ackumulatorer; Neon; Tantal; Värme och kyla, olika tiders temperaturbegrepp. Under rubriken »Händigt folk»: Mikrofotografering med vanlig kamera; Vind-elverk; Apparat för kopiering av positiv film; Sågning av glas; Varmluftsmotorer; Hemgjord ångmaskin; Induktionsapparat.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1941: 1—2.

Ur innehållet: E. Strömgren, Nordiske Privatobservatorier; K. Lundmark, Lundaobservatoriets bearbetning av den nya Boss-katalogen; E. S., De lysstærkeste Stjerner; J. Ohlsson, Isaac Newton och hans »Naturvetenskapens matematiska principer». Iakttagelser af foranderlige Stjerner. B. Strömgren, Den negative Brint-Ion og dens Betydning i Stjerneatmosfærernes Teori; J. P. Møller, Kometerne; E. Strömgren, Stjernedistancer paa Himlen; J. P. Møller, Refleksionsfri Optik; E. Strömgren, Nordiske Privatastronomer.

Naturen, Bergen 1941: 3—5.

Ur innehållet: S. Einbu, Foranderlige stjerner; J. Eggvin, Den store utskiftning av vannmassene langs norske kysten i 1940; H. Haraldsen, Kunstige tekstilfibre.

Ett bevis för Wilsons sats.

Av **SVEN ANDERSSON.**

Avsikten med följande uppsats är att med hjälp av identiteten (1) och Fermats sats ge ett nytt bevis för Wilsons sats.

Den ifrågavarande identiteten, i vilken k är ett helt tal

$$k! = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \cdot (k+1-\nu)^{k} \tag{1}$$

erhålles lätt vid studiet av aritmetiska serier av högre ordning. Den kan emellertid bevisas även på följande vis. Om man av båda leden i identiteten

$$e^{x}(e^{x}-1)^{k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} e^{(k+1-\nu)x} \tag{2}$$

bildar k:te derivatan och därefter sätter $x=0$, så inser man omedelbart, att värdet av högra ledet i (2) blir lika med högra ledet i (1). För att beräkna värdet av vänstra ledet i (2), som betecknas med $g(x)$, utgår man från

$$f(x) = (e^{x}-1)^{k+1},$$

varav

$$f'(x) = (k+1) \cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k} = (k+1) \cdot g(x);$$

$$\because\ g^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1} \cdot f^{(k+1)}(0).$$

Utvecklas

$$f(x) = \left(\frac{x}{1} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots\ldots\right)^{k+1}$$

i Mac Laurin-serie, ser man, att koefficienten för x^{k+1} blir 1. Men å andra sidan är denna koefficient $\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$, varav

$$f^{(k+1)}(0) = (k+1)!$$

$$\because\ g^{(k)}(0) = k!$$

Därmed är (1) bevisad.

Wilsons sats utsäger, att om p är ett primtal, $(p-1)!$ vid division med p ger resten -1. För att bevisa detta tillämpas (1) för $k=p-1$.

$$(1\,\mathrm{a})\quad (p-1)! = p^{p-1} - \binom{p-1}{1}(p-1)^{p-1} + \ldots - \binom{p-1}{p-2}2^{p-1} + 1^{p-1}.$$

Enligt Fermats sats gäller

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

för $x = 1, 2, \ldots, p-1$. Alltså erhåller man

$$(1\,\mathrm{b})\qquad (p-1)! \equiv -\binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{2} - \ldots - \binom{p-1}{p-2} + 1 \pmod{p}$$

eller efter direkt omformning av högra ledet

$$(1\,\mathrm{c})\qquad (p-1)! \equiv -1 + (1-1)^{p-1} \pmod{p}.$$

Som synes är högra ledet lika med -1 och därmed är Wilsons sats bevisad.

Et nytt sentrifugalapparat.

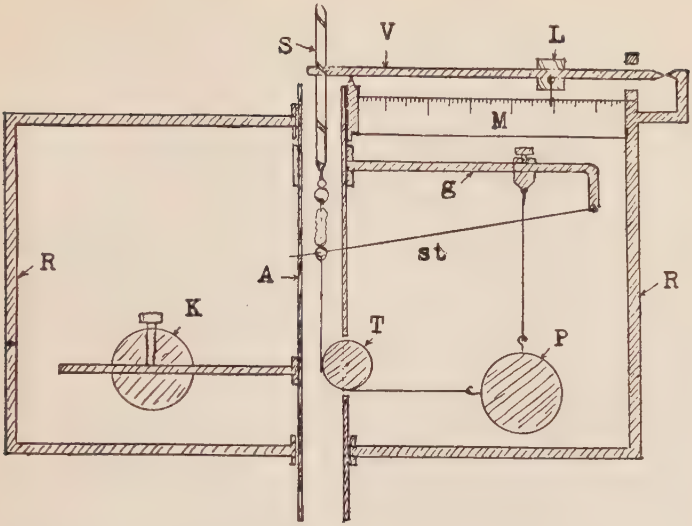
Av THS. SKJULSTAD.

Etter en samtale med noen fysikklærere har læremiddelfirmaet Noratel i Oslo konstruert et apparat som tillater en eksperimentell utledning av formelen for sentrifugalkraften. Skissen viser prinsippet (målestokk 3 : 10).

Med en elektrisk driftsmaskin, som også er beregnet til en rekke andre forsøk, blir røret A med loddet P og kompensasjonsloddet K satt i rotasjon om røraksen. P er forbundet med en vekt V på toppen av den faststående rammen R. Forbindelsen skjer over trinsen T med en tynn tråd som blir hindret i å tvinne seg ved en svivel og en stang st.

På galgen g er det tre veldefinerte stillinger som gir r = 6, 9 og 12 cm som svarer til at stigen S står med 1., 2. eller 3. trin på vektarmen. Loddet P som veier 200 g kan en skifte ut med et som veier 100 g. Loddet L kan balansere sentrifugalkrefter på noe over 200 g. På målestaven M svarer 1 mm til 2 g. Vinkelhastigheten kan en holde temmelig konstant under forsøket, men en har muligheter for å variere den innen vide grenser.

Apparatet byr da den mulighet at en kan utlede formelen $C = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} = r\,m\,\omega^2$ kvantitativt ved at en kan variere en av størrelsene r, m og ω mens de andre holder seg konstante.



En viser at sentrifugalkraften er:

1. Proporsjonal med r når m og ω^2 konstant.
2. —»— » m » r » ω^2 —»—
3. —»— » ω^2 » r » m —»—

Om en finner det noe kunstig nettopp å bruke massen og vinkelhastigheten, kan en jo velge vekten P og frekvensen $f = \frac{1}{T}$ og bestemme en proporsjonalitetsfaktor $k = \frac{C}{rPf^2}$. Denne blir da meget nær verdien av $\frac{4\pi^2}{g}$.

Tar en den teoretiske utvikling av formelen først, kan en verifisere den svært overbevisende. Avvikene mellom $C_{\text{obs.}}$ og $C_{\text{beregn.}}$ vil bare være 2 à 3 prosent. Nettopp her, hvor det matematiske resonnement er uvant og faller vanskelig for elevene, kan det være på sin plass å vise at loven gjelder i et konkret tilfelle, når den er utviklet på forhånd for et abstrakt massepunkt. Å *etterprøve* logisk-abstrakte slutninger ved erfaring og eksperiment spiller en så stor rolle i naturvitenskapen at fysikkundervisningen også må gi denne metoden en bred plass. I alle tilfelle vil det nye sentrifugalapparatet være et godt hjelpemiddel i et viktig og vanskelig avsnitt av fysikken.[1]

Ths. Skjulstad.

---

[1] Ovanstående är med författarens och redaktionens tillåtelse hämtat ur »Den høgre skolen», årg. 1940, s. 455.

Den nyaste *c*-bestämningen.

Av **TORSTEN JÖNSSON.**

Under de sista hundra åren har ett stort antal framstående experimentalfysiker ägnat sig åt den fascinerande uppgiften att bestämma ljusets hastighet, varvid såväl direkta som indirekta metoder använts. Förf. har i Kosmos, band *18*, 1940 givit en kortfattad redogörelse för de precisionsbestämningar av *c*, som publicerats under åren 1900—1940. I denna uppsats behandlas också de 1937 publicerade preliminära resultaten av amerikanen Wilmer C. Andersons mätningar. Anderson har på grund av tidsförhållandena nödgats forcera fram sina arbeten och bringa dem till avslutning betydligt tidigare än som beräknats, och hans slutresultat föreligger därför redan nu. Då hans nya apparatur uppvisar åtskilliga nyheter — de subjektiva faktorerna ha eliminerats i betydligt större utsträckning än vad tidigare forskare kunnat göra — torde en kortfattad redogörelse för den vara berättigad.

En direkt hastighetsbestämning består ju alltid av en avståndsmätning och en tidmätning. Gäller det bestämning av ljushastigheten, måste tidmätningen göras så, att man åstadkommer en följd av signaler, vilket man kan göra antingen genom att »klippa sönder» en ljusstråle i diskreta impulser eller låta intensiteten variera på ett regelbundet sätt. Tidigare användes härför tandhjul eller roterande speglar, varigenom dock klippfrekvensen blev relativt låg, vilket medförde, att vägen, som ljussignalerna skulle passera, måste göras lång. Vid de nyaste *c*-bestämningarna har ljusstrålen modulerats på elektrisk väg med användning av Kerreffekten, varigenom frekvensen kunnat göras mycket hög och ljusvägen så kort, att mätningarna bekvämt kunnat utföras inomhus. Moduleringen sker i princip så, att ljusstrålen får passera igenom ett system bestående av i ordning en nicol, en Kerrcell (en vätskekondensator, fylld med i regel nitrobensol), en nicol. Nicolerna skola vara korsade och deras svängningsplan bilda 45° vinkel med cellens fältlinjer. I stället för nicoler kunna polaroider[1] användas, såsom skett vid Andersons nyaste mätningar. Man kan visa, att den ur ett sådant system utträdande ljusströmmen är $I = \frac{I_0}{2} \sin^2 (\pi B l E^2)$, där I_0 är den ljusström, som träffar den första nicolen, B den s. k. Kerrkonstanten, l längden av det elektriska fältet i cellen och E fältstyrkan. Fig. 1 visar systemets karakteristik.

---

[1] Jfr Rendahl, Elementa *21*, 103, 1938.

Lägger man på Kerrcellen en lämplig likspänning och en över denna lagrad radiofrekvent växelspänning med lämplig amplitud, så kommer den ur systemet utträdande strålens intensitet att uppvisa radiofrekventa, approx. sinusformade variationer (fig. 2).

Principen för den ANDERSONska metoden framgår av fig. 3. En ljusstråle passerar genom ett Kerr-relä, där den moduleras, träffar därefter en halvförsilvrad glasplatta, där strålen delas i två. Den ena strålen reflekteras mot en planspegel och därifrån mot en fotocell; den andra strålen går igenom plattan och går den mycket längre vägen $S_1S_2S_3$ och tillbaka till plattan, varifrån den delvis reflekteras mot fotocellen. Intensiteten, som träffar fotocellen, blir maximum eller minimum, beroende på om de bägge strålarna vid ankomsten till fotocellen äro i fas eller om den ena är ett udda antal halva våglängder efter den andra. Fotocellen är inkopplad i en avstämd krets, och fotospänningen förstärkes och registreras medelst ett lämpligt mätinstrument. Flyttas den förskjutbara planspegeln, tills mätaren visar minimum, så gäller tydligen, att »ljussignalernas» hastighet är

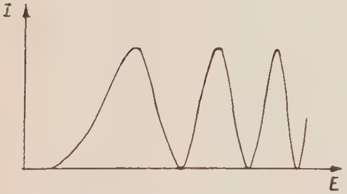


Fig. 1. Grafisk representation av funktionen $I=\frac{I_0}{2}\sin^2(\pi BlE^2)$. (Kerr-reläets karakteristik.)

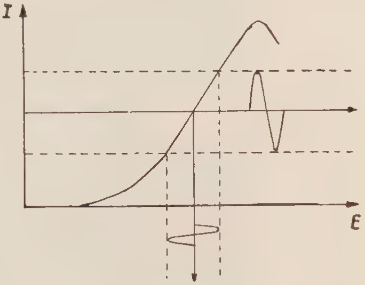


Fig. 2. Kerr-reläets ljusströmskurva blir approx. sinusformad, då reläet arbetar på karakteristikens raka del.

$$c_s = \frac{2\nu s}{k},$$

där ν är moduleringsfrekvensen, s vägskillnaden för de bägge strålarna och k ett udda tal.

Den använda ljuskällan är en vattenkyld kvicksilverhögtryckslampa om 1 000 watt och 65 000 lumen. Lampan drives med 120-

per. växelspänning, varigenom strålens intensitet även får en lågfrekvent komponent, vilket är lämpligt ur »mottagareteknisk» synpunkt.

Kerrcellen är helt av Pyrexglas och försedd med kylanordning ävenledes av Pyrexglas (fig. 4). Kylning är nödvändig, enär cellen uppvärmes betydligt. Elektroderna äro av nickel. Cellen drives med en likspänning om 5 000—10 000 volt och en växelspänning om c:a 1 000 volt, tagen från en högfrekvensförstärkare med 90 watt utgångseffekt och en frekvens av 19,2 miljoner hertz. Denna utgöres av ett system av förstärkare- och fördubblingssteg, vilket drives av en kristallstyrd normalfrekvensgenerator om 50 000 hertz.

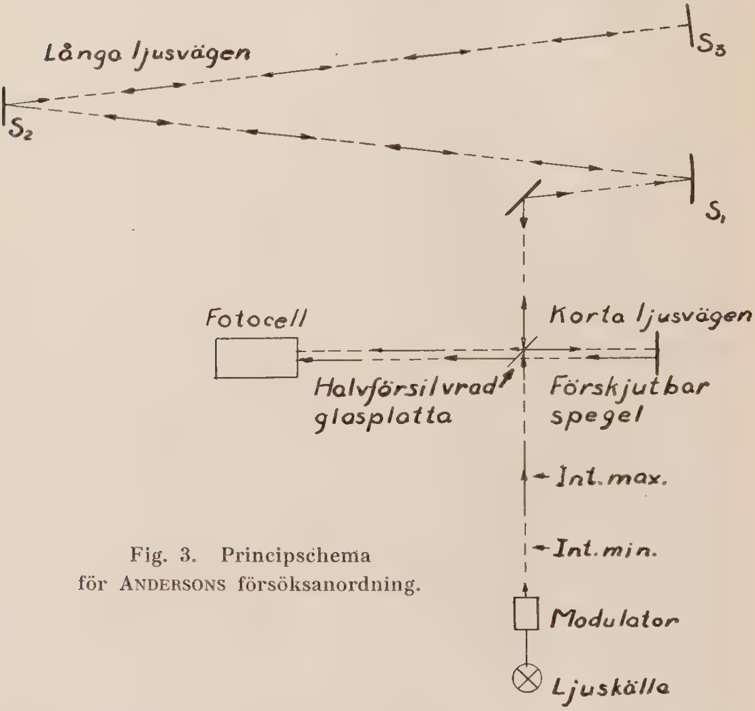

Långa ljusvägen
S₃
S₂
S₁
Fotocell
Korta ljusvägen
Halvförsilvrad glasplatta
Förskjutbar spegel
Int. max.
Int. min.
Modulator
Ljuskälla

Fig. 3. Principschema för ANDERSONS försöksanordning.

Den i det förenklade schemat i fig. 3 angivna fotocellen utgöres i verkligheten av en ljuskänslig 11-stegs elektronmultiplikator. Med 100 volt pr steg har denna en känslighet av c:a 2 ampere pr lumen, medan känsligheten hos en vanlig vakuumfotocell endast är c:a 30 mikroampere pr lumen. Multiplikatorn är inkopplad i en interferensmottagare, som ger en tonfrekvent utgångsspänning, vilken därefter förstärkes i en känslig radiomottagare. Efter denna följer slutligen en stabilisatoranordning, vilken även innehåller mätinstrumentet, på vilket alltså fotospänningen kan avläsas. Genom användningen av elektronmultiplikator i stället för fotocell uppnår man den väsentliga fördelen, att fotospänningen förstärkes ofantligt mycket mer än läckstrålningen från modulatorn, vilken man trots aldrig så god skärmning inte kan helt komma ifrån och vilken annars skulle förorsaka stora besvärligheter.

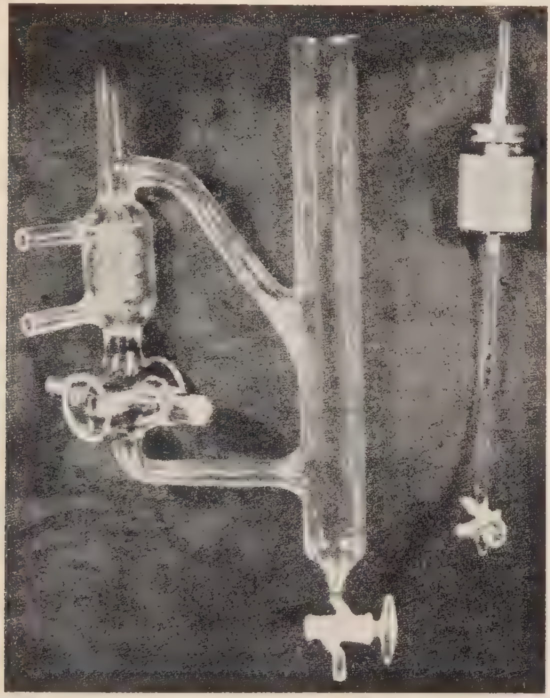


Fig. 4. Kerrcellen med kylanordning. Nitrobensolen bringas att cirkulera genom cellen och kylaren medelst en motordriven glaspropeller, som synes urtagen till höger på bilden.

Den rörliga spegeln är monterad på en slid, som löper i gejder och som förflyttas av en skruv, som drives av en induktionsmotor. På samma slid är en filmkamera monterad med objektivet vänt mot mätaren. Denna är svärtad liksom visaren, men under den senare är på mätartavlan fastsatt en smal, polerad nickeltråd, som är vinkelrät mot visaren. Belyses tråden, ger den en bild på filmen med undantag för det ställe, där visaren korsar tråden. Då spegeln och kameran förflyttas, kommer korsningsstället mellan visaren och tråden att ge en vit kurva på den i övrigt svärtade filmen. Tråden är försedd med cm-delning medelst fina repor. Dessa repor ge upphov till horisontella vita linjer på filmen, varigenom förminskningen kan mätas. Anordningen styres helt och hållet av reläer, så att spegeln går fram och tillbaka över stället, som ger minimum av fotospänning, under hur lång tid man behagar, varigenom ett obegränsat antal registreringar automatiskt kunna tagas efter varandra. Kameran upptar också automatiskt en bild av ett litet ur och en datumremsa, så att klockslag och datum även fås med på filmen.

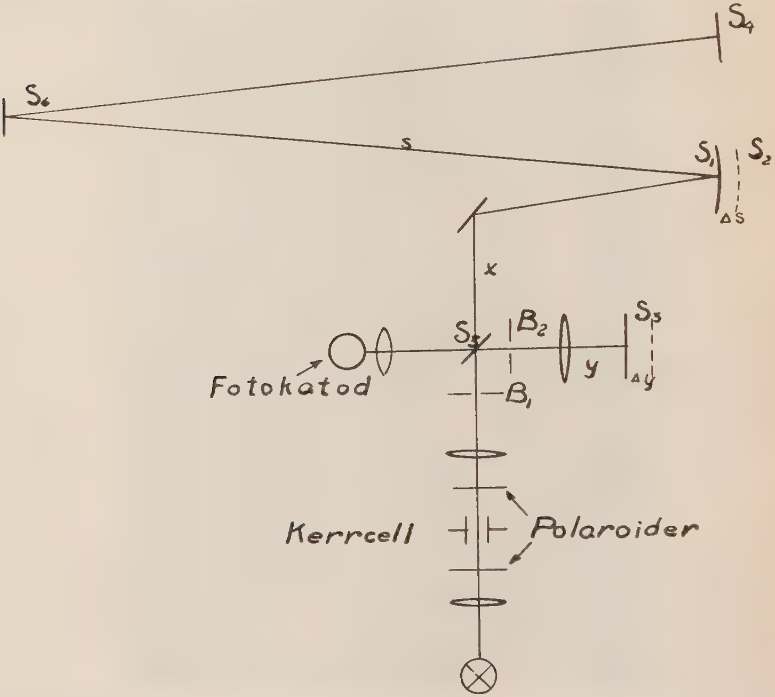


Fig. 5. Schematisk bild av det optiska arrangemanget.

Det optiska arrangemanget ser ut på följande sätt. Efter att ha passerat Kerr-systemet fokusseras strålen på en cirkulär bländare B_1, försedd med hårkors (fig. 5), och träffar därefter den halvförsilvrade glasplattan S_5. Den reflekterade delen passerar genom en irisbländare B_2 och en lins. Den senare är placerad på ett avstånd lika med brännvidden från B_1, varigenom ljuset, som lämnar linsen, blir parallellt. Ljuset, som reflekteras från den rörliga spegeln S_3, återvänder samma väg genom linsen, och en del går igenom plattan S_5 för att slutligen falla på den ljuskänsliga cellen. Bländaren B_2 tjänar till att göra intensiteten hos den stråle, som går den korta vägen, lika med intensiteten hos den som går den längre sträckan $S_5S_1S_4$ och tillbaka. Överensstämmelse är inte nödvändig, men minimipunkten blir skarpare, om intensiteterna äro lika. S_4 är en plan spegel, S_1 och S_2 äro konkava med brännvidderna resp. 5 m och 2,5 m och öppningarna resp. 9″ och 8″. Alla spegelytor äro noggranna på en ljusvåglängd när.

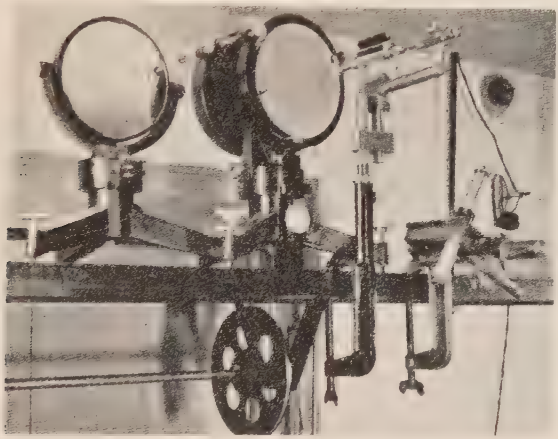


Fig. 6. Planspegeln S_4 (till vänster) och konkavspeglarna S_1 och S_2 (till höger).

Speglarna S_1 och S_2 äro fästade vid samma vertikala axel med baksidorna mot varandra (fig. 6), så att den ena eller den andra kan vridas i fokusserande läge. Spegeln S_1 är så anordnad, att den ger en bild av B_1 och hårkorset på ytan av spegeln S_4. Det reflekterade ljuset ger en bild av hårkorset av samma storlek som detta strax framför fotocellens yta. Strålen, som gått den korta vägen, ger en bild av samma storlek på samma ställe. Dessa bilder bringas att exakt sammanfalla, varigenom de bägge strålarna bli koaxiala. De sammanfallande bilderna avbildas medelst en lins med kort brännvidd praktiskt taget punktformigt på fotokatoden.

Spegeln S_2 är anordnad så, att ljuset reflekteras tillbaka över sträckan S_2S_5 utan passage av den längre sträckan S_1S_4.

För att det nu skall bli minimum av fotospänning med användning av spegeln S_1, måste följande villkor vara uppfyllt:

$$2s + 2x - 2y = (2k + 1) \cdot \frac{c_s}{2\nu}.$$

Användes spegeln S_2, fås minimum vid något nytt läge av den förskjutbara spegeln S_3, och man får

$$2x + 2\varDelta s - 2y - 2\varDelta y = \frac{c_s}{2\nu}.$$

Genom subtraktion fås

$$2s - 2\varDelta s + 2\varDelta y = \frac{k \cdot c_s}{\nu} \cdot (k = 1, 2, 3. \ldots).$$

Man har sålunda endast att mäta sträckan s samt differenserna $\varDelta s$ och $\varDelta y$. Den senare differensen erhålles ur de fotografiska registraten, vilka uppmätas med komparator. Avståndet s mätes med hjälp av ett uppspänt invar-måttband, kalibrerat av National Bureau of Standards, som baslinje (speglarna S_4 och S_1S_2 voro placerade omedelbart intill varandra) och med hjälp av en speciell ändmåttsapparatur (synlig på fig. 6). Samma anordning användes för mätning av $\varDelta s$. Sträckan s var c:a 86 m, och relativfelet i mätningarna uppges till 0,01 ‰, som dock omöjligt kan vara maximalfel. Differenserna $\varDelta s$ och $\varDelta y$ voro resp. c:a 2,5 cm och c:a 6 cm samt $k = 11$. Felet i frekvensmätningen anges till högst 1 på 8 000 000.

Anderson anger som slutresultat av 2 895 mätningar, att ljushastigheten i vakuum är

$$c = 299\,776 \pm 14 \text{ km/sek.}$$

Här är att observera, att det angivna felet inte är maximalfel utan utgör de enskilda värdenas medelavvikelse från slutvärdet. Det kan vara skäl att återge Andersons tabell över de enskilda försöksserierna.

Som synes är spridningen på värdena trots den mycket förnämliga apparaturen ganska stor. Anderson tillskriver denna spridning den omständigheten, att elektronerna, som utlösas från det ljuskänsliga skiktet, på grund av elektronmultiplikatorns konstruktion få olika gångtid, ifall de bägge strålarna inte äro fullt koaxiala, och han anser, att denna felkälla, såvida den inte genom omkonstruktion kan elimineras, sätter en gräns för den noggrannhet, som kan uppnås med hans metod.

Datum	Ant. mätn.	c km/sek (medelv.)	Medelavvikelse	
			Från dagl. medelv.	Från slutvärdet
Maj 21, 1939	20	299 774	7	2
Nov. 8	17	775	9	1
13	35	759	10	17
15	79	772	9	4
16	140	780	8	4
27	103	781	13	5
Jan. 10, 1940	39	774	5	2
23	46	774	3	2
Mars 4	30	757	3	19
7	56	745	9	31
8	257	754	3	22
11	147	749	9	27
Apr. 4	348	*808*	9	32
5	122	774	10	2
8	125	769	7	7
9	197	771	7	5
Juni 15	322	801	19	25
16	94	775	1,4	1
21	148	768	18	8
Juli 1	293	789	12	13
7	147	*741*	3	35
8	130	758	9	18
Slutresultat	2895	299 776	± 9	± 14

Andersons resultat överensstämmer synnerligen väl med det av förf. i ovannämnda Kosmosuppsats som bästa sannolika medelvärde av de sista årtiondenas c-bestämningar angivna värdet $c = 299\,775 \pm 15$ km/sek.

Anderson framhåller, att samtliga tidigare forskare vid omräkningen från signalhastighet till vakuumhastighet satt signalhastigheten lika med fashastigheten i ifrågavarande medium (luft, glas etc), varigenom deras värden på c skulle vara några km/sek för låga (se närmare härom i förf.:s Kosmosuppsats). Detta gäller även om Andersons eget värde från 1937, som rätteligen skall vara 299 771 km/sek (i stället för 299 764 km/sek). Emellertid torde det vara tvivelaktigt, om man med tillgång endast till det tryckta materialet kan fälla en så kategorisk dom. Det är förf.:s avsikt, att när tillfälle därtill ges, närmare undersöka denna sak. — Den av tysken A. Hüttel utarbetade metoden (publicerad 1940), som också arbetar med Kerrcell och fotocell men i övrigt är väsentligt olika Andersons, diskuteras inte av Anderson, varför han troligen saknar kännedom om den, vilket illustrerar de begränsade möjligheterna för vetenskapligt samarbete under nuvarande förhallanden.

Några författare (De Bray, Edmondson, Pease, Pearson, Birge) ha gjort gällande, att ljushastigheten inte skulle vara konstant utan utgöra en eller annan funktion av tiden. Såsom S. von Friesen visat, kan emellertid någon sådan slutsats inte dragas av det hittills föreliggande experimentella materialet,[1] och denna uppfattning bekräftas av såväl Andersons som Hüttels resultat.

Några nya *c*-bestämningar äro f. n. inte i gång, men vid fysiska institutionen i Leipzig äro förberedelsearbeten slutförda för nya mätningar, som skola påbörjas efter kriget.

Andersons originalarbeten återfinnas i The Review of Scientific Instruments *8*, 239—247, 1937 och Journal of the Optical Society of America *31*, 187—197, 1941.

Cykeldynamon i fysikundervisningens tjänst.

Av SVEN FORSMAN.

För cykelbelysning har nu i över 20 år använts elektriska generatorer eller s. k. cykeldynamos av olika modeller. Dessa kunna vara till stor nytta i fysikundervisningen. Det är inte alla skolor, som ha någon lämplig växelströmsgenerator. En eller ett par cykeldynamos av olika typer kunna täcka denna brist. De ha även den fördelen, att de ofta kunna anskaffas till en mycket rimlig kostnad. Cykelgeneratorer, som äro defekta i fråga om hållaren eller andra yttre tillbehör, kunna ju vara fullt användbara ur undervisningssynpunkt.

Cykelgeneratorer finnas av många olika fabrikat och modeller. Gemensamt för dem alla är att de lämna växelström. Denna strömart är ju fullt användbar till belysningsändamål, om periodtalet är tillräckligt högt. Redan vid en hastighet hos cykeln av 10 km pr timme ger en 4-polig generator c:a 100 perioder pr sek. Fördelen med växelströmsgeneratorn är bl. a. enklare konstruktion och större hållbarhet. De tidigare modellerna lämnade vid normal hastighet 4 volts spänning vid 0,3 ampères strömstyrka, alltså 1,2 watt. Generatorer av senare tillverkning lämna i allmänhet 6 volt och 0,5 amp., alltså 3 watt. Det förekommer ännu högre effekt, t. ex. 10 volt vid 0,4 amp., 4 watt. Vid samtliga typer användes »enkelledaresystemet», dvs generatorns ena pol är jordad, återledning av strömmen från strålkastaren sker genom cykeln.

---

[1] Kosmos *14*, 108, 1936.

I samtliga modeller erhålles induktionsströmmen genom att trådspolar och permanenta magneter röras i förhållande till varandra. Härvid kan man särskilja två olika typer, nämligen sådana med roterande magnetpoler och fasta spolar och sådana, som ha fasta magneter och roterande spolar; i fortsättningen användes för dessa beteckningen första och andra typen. I fig. 1 synes en äldre, 6-polig generator av den första typen. Sex magnetiserade stålstavar äro fastnitade vid en cirkulär järnplatta, som är fastsatt vid generatorns axel. Sex fasta, seriekopplade spolar med järnkärna bildar statorn, som är fastskruvad i bottnen av skyddskåpan. I statorns mitt är ett större hål för den genomgående axeln, som är försedd med kullager i båda ändarna.

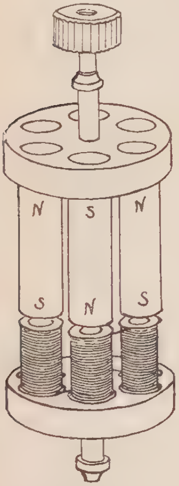


Fig. 1.

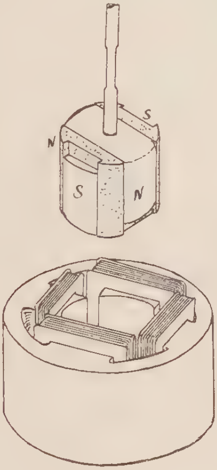


Fig. 2.

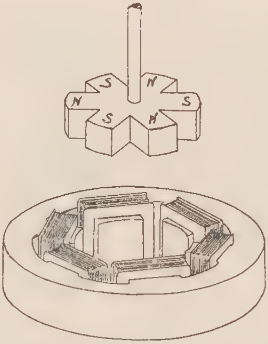


Fig. 3.

I fig. 2 synes en 4-polig generator med stator av plåtlameller. Rotorn utgöres av en enda stavmagnet (ej synlig å fig.) i axelns riktning. Magneten är försedd med två U-formiga polskor, monterade i 90° vinkel och med skänklarna vända mot varandra. Det hela är monterat i en cylinder av aluminium. I fig. 3 synes en 6-polig konstruktion, som knappast behöver någon närmare förklaring.

Generatorn i fig. 4 består av en fast hästskomagnet och ett Siemens ankare. Den tillhör alltså den andra typen, som har roterande spole. Dennas ena trådände är fastlödd vid axeln ovanför ankaret. Nedanför detta är axeln skarvad med ett stycke ebonit. Spolens andra trådände är fastlödd nedanför detta ställe. Strömmen föres då till det nedre kullagret, som är isolerat från övriga fasta metalldelar, och genom en kontaktskruv föres sedan strömmen vidare ut. För att förbättra kontakten finnes vid varje lager en liten fjäder, som släpar mot axeln. En svaghet hos denna konstruktion är ebonitskarven hos axeln; det är svårt att få denna mekaniskt hållfast. Därför har man numera gått ifrån denna och använder i stället hel axel och en plan, konisk eller cylindrisk släpring, som är isolerad från axeln. Det vanligaste är en plan ring. Släpkolet sitter då ofta i bottenplattan parallellt med axeln. Konstruktionen i fig. 5 har använts på tidigare modeller av Bosch. Magneterna äro fyra stålstavar, som äro monterade i en platta av smidesjärn. Ankaret har en enda spole, vars axel sammanfaller med rotationsaxeln. Två U-formade polskor äro fastsatta vid spolkärnans ändar; ankaret påminner alltså om rotorn i fig. 3. I fig. 6 synes den senaste Bosch-modellen. Den har vanligt, 4-poligt ankare och plan släpring eller rättare släpplatta. Axeln är lagrad endast ovanför ankaret. Släpkolet är monterat i axelns förlängning. Magneten är en kort, aluminium-nickellegerad stålstav med U-formiga polskor, vända åt samma håll. Aseas generator har ankare enligt fig. 6 och magnet enligt fig. 5.

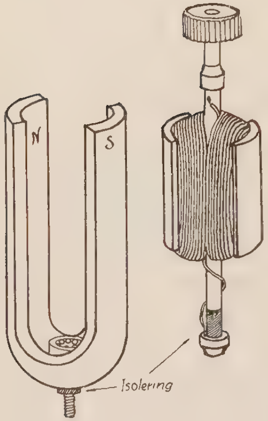


Fig. 4.

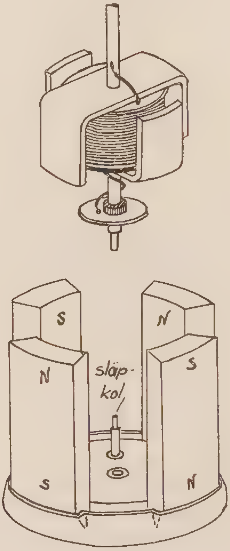


Fig. 5.

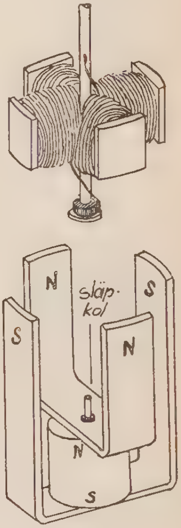


Fig. 6.

Eftersom cykelgeneratorerna lämna växelström, kunna de utan någon ändring användas som synkronmotorer. Härtill bör man dock ej taga felfria generatorer, då de lätt bli bakmagnetiserade och därför förlora magnetism. Lämpliga äro 4-poliga eller ännu bättre 6-poliga generatorer, då deras hastighet ej blir så hög; vid 50-periodig växelström blir hastigheten 25 resp. $16\,^{2}/_{3}$ varv pr sek. T. ex. genom en snabb strykning med handen på trissan bibringas axeln en lämplig rotationshastighet, varefter en växelström med 6 à 8 volts spänning kopplas på. Strömstyrkan blir då omkring 0,5 amp. Cykeldynamon går sedan som synkronmotor, alltså med konstant varvtal.

Förf. fäste vid ett tillfälle på en 6-polig dynamos axel en cirkulär, svart skiva med en vit pappersremsa anbringad som en radie. Skivan belystes vid gång med en glimlampa, som var kopplad till samma växelströmsnät som dynamon. Remsan syntes då stillastående i 6 olika lägen, jämnt fördelade över varvet, som en 6-uddig stjärna. Här är alltså en enkel anordning för att visa en stroboskopisk effekt. För övrigt uppstod även en svängning, den 6-uddiga stjärnan svängde fram och tillbaka med en amplitud av c:a 15° och svängningstalet 2 à 3 pr sek. För svagare ström växte amplituden. Ankaret går ibland något före och ibland något efter det synkrona varvtalet, därav svängningen. Om ankaret bromsas, vrides stjärnan mot rotationsriktningen och stannar, sedan ankaret fått en konstant förskjutning efter det läge, som ankaret skulle haft, om det ej varit belastat.

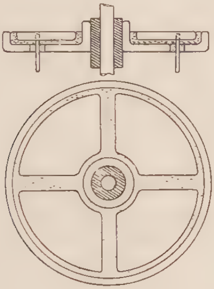


Fig. 7.

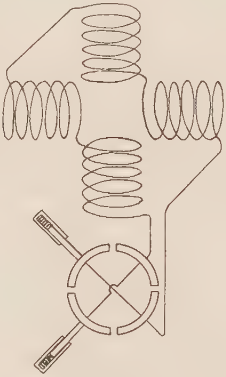


Fig. 8.

Vill man bygga om en cykeldynamo till likströmsmotor, måste en kommutator insättas. Lämpliga för dylik ombyggnad äro typerna i fig. 4, 5 och 6. Kommutatorn skall ha lika många lameller som ankaret har poler. Den kan göras cylindrisk eller plan, det senare kan vara lämpligt vid ankare med sådan släpplatta, som synes i fig. 5. Följande beskrivning gäller närmast en dynamo av den typ, som framgår av nämnda figur, ev. med ankaret från fig. 6.

Släpplattan pressas loss. Den har ofta en uppvikt kant. Inne i den försänkning, som därigenom uppstått, kunna kommutatorns cirkelkvadrantformade lameller gjutas fast i shellack. Lamellerna tillverkas av mässing eller koppar, ett stift fästes genom nitning och lödning i lamellens baksida. Fyra hål borras i släpplattan, passande för de fyra stiften. Det hela monteras sedan enligt fig. 7, så att plattans skålformiga sida med lamellerna blir vänd från ankaret. Varje par diametrala kvadranters stift kopplas samman. Ankarlindningens ena trådände kopplas till det ena paret, den andra trådänden till det andra paret stift. Även om ankaret har fyra spolar, skall det ej lindas om. De fyra spolarna äro kopplade i serie (så att polerna bli omväxlande) och ytterändarna anslutas på angivet sätt. Kopplingen framgår för övrigt av fig. 8. Bottenplattan har redan ett släpkol. En kolhållare med kol anskaffas i någon cykelaffär. Ett hål borras i bottenplattan på samma avstånd från centrum, som det föregående kolet har, och i en punkt, som har 90° vinkelavstånd från det andra kolet. Kolhållaren pressas in i hålet, den behöver ej vara isolerad från godset. Om avståndet mellan närliggande lameller är mindre än kontaktkolens diameter, blir strömkällan kortsluten för ett kort ögonblick varje gång strömriktningen i ankaret kastar om. Verkan av denna kortslutning kan minskas genom ett seriekopplat motstånd. Då det ej finns någon vridbar borstbrygga, kan i stället kommutatorn vridas i förhållande till ankaret, tills motorn går bra.

En Åtwoods fallmaskin avsedd för tidtagning med stoppur.

Av AXEL NORDHULT.

För att belysa det följande vill jag rekommendera tre enkla kvalitativa försök, utförda av två personer A och B.

Försök 1. A stöter en penna i bordet. B, som vänder ryggen till, försöker att samtidigt, då han hör stöten, stöta sin penna i bordet. Han blir något efter. Kvantitativa undersökningar visa, att tidsskillnaden mellan de två stötarna är omkring 0,2 sek. Förhållandevis få personer kunna uppnå en tidsskillnad understigande 0,15 sek.

Försök 2. Från några decimeters höjd för A pennan med ungefär konstant hastighet mot bordet. B ser nu på och försöker träffa bordet samtidigt. Han träffar ibland bordet före A och ibland efter. Undersökningar visa, att största tidsskillnaden vid ett noggrant utförande av detta försök ej överstiger 0,03 à 0,04 sek. I detta försök förekommer ej det i föregående försök förefintliga överraskningsmomentet.

Försök 3. En och samma person med en penna i vardera handen söker att samtidigt träffa bordet. Tidsskillnaden mellan stötarna överstiger här ej 0,01 à 0,02 sek. Liksom i försök 2 träffar vid upprepade försök än den ena, än den andra pennan bordet först, d. v. s. felen äro än positiva än negativa. Jämför pianospelning.

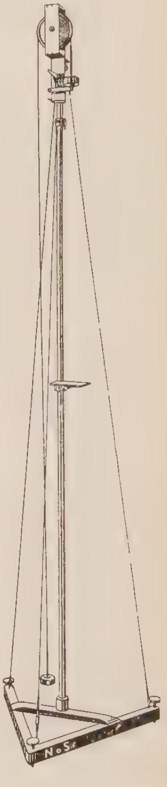
Sedan billiga stoppur med tidsangivelse på 0,01 sek. numera saluföras, synes det lämpligt, att vid tidmätning, då ej allt för stor noggrannhet eftersträvas och de gynnsamma fysiologiska betingelserna i försöken 2 och 3 förefinnas, utnyttja dylika stoppur och bestämma tiden »för hand».

Dessa synpunkter ha föranlett författaren att låta tillverka en Atwoods fallmaskin på sådant sätt, att den lämpar sig för bestämning av falltiden med stoppur, som helst bör vara graderat i 0,01 eller 0,02 sek. Även ur med gradering på 0,1 sek. kunna dock användas, om falltiden bestämmes som medelvärdet av ett antal observationer.

Hjulet med anordningar för rörelsens utlösande m. m. synes på bilden.

Rörelsen utlöses av observatören genom att trycka på en knapp och samtidigt igångsätta klockan. De fysiologiska betingelserna äro här helt desamma som i ovanstående försök 3 och *största* felet som begås härvid är omkring 0,02 sek. När vikten efter den långsamt accelererande rörelsen träffar anslagsbordet, stoppas uret. Då rörelsen hela tiden iakttages av observatören, äro betingelserna nu och i ovanstående försök 2 desamma. Det största fel som begås här torde ej överstiga 0,04 sek. Vid större fel *hör* observatören tidsskillnaden och är då berättigad att kassera observationen.

Då mätfelen såväl vid rörelsens början som slut äro små och sannolikheten i båda fallen är lika stor, att felen skola vara positiva som negativa, kan noggrannheten i tidsmätningen ökas avsevärt genom medelvärdesbildning av ett antal observationer.



De systematiska felkällor, som här böra beaktas, äro friktionen och felangivelse av de i rörelsen deltagande massorna, särskilt hjulets massa.

Friktionen kompenseras genom små »friktionsvikter» på 0,1, 0,2, 0,2 0,5, 0,5 0,5 ... gram. Före observationen av falltiden med en viss massa påläggas friktionsvikter, så att en mycket långsam rörelse fortsätter utan att accelerera. Som snöre väljes lämpligast en tunn, mjuk och tvinnad silkestråd (kordongsilke).

Om de kvantitativa resultaten skola verka övertygande, måste hänsyn tagas till hjulets massa, som reducerad till hjulets periferi är 100 g vid de hittills tillverkade fallmaskinerna. Detta reducerade värde å massan erhålles tillförlitligast genom uppmätning av hjulets dimensioner och beräkning enligt formeln $M_{red} = I : r^2$, där I är hjulets tröghetsmoment (hjulet av mässing) och r är hjulradien räknad från centrum till snöret. Hjulets reducerade massa måste uppgivas för eleverna.

Massan varieras genom påläggande av särskilda vikter, vilka liksom grundvikten väger 200 g. »Övervikterna», som föranleda accelerationen hos rörelsen, utgöras av 6 stycken vikter på 5 g vardera. Vid variation av den verkande kraften hålles den totala massan konstant genom att på det brukliga sättet fördela de sex vikterna på ömse sidor om hjulet. Kombinationen 4—2 ger kraften 10 gf, 5—1 ger 20 gf och 6—0 ger 30 gf.

Med den här angivna mätmetoden kan kraftekvationen verifieras ganska noggrant. En dylik undersökning utföres i tre mätserier, av vilka den första visar att rörelsen är likformigt accelererad, den andra fastställer sambandet mellan acceleration och kraft, då massan är konstant, och den tredje anger sambandet mellan acceleration och massa vid konstant kraft.

För att belysa såväl den noggrannhetsgrad, som ernås, som sättet att behandla observationsmaterialet, återges här de tre mätserier, som erhållits med en av de tillverkade maskinerna.

Följande beteckningar och enheter användas i tabellerna. $s =$ $=$ fallsträcka i meter, $t =$ tid i sekunder, $a =$ acceleration i m/sek^2, $K =$ kraft i gf, $m =$ massan i gram, c, c_1, c_2 och c_3 äro proportionalitetskonstanter.

Mätserie 1. $K = 5$ gf, $m = 510$ g.

s	t	$\frac{2s}{t^2}$
0,50	3,23	0,0959
1,00	4,55	0,0966
1,50	5,54	0,0977

Resultat: $\frac{2s}{t^2} =$ konstant d. v. s. rörelsen är likformigt accelererad, varför a kan beräknas ur formeln $2s = at^2$.

Mätserie 2. $s = 1{,}00$ m, $m = 930$ g.

K	t	a	$a : K$
10	4,40	0,1033	0,0103
20	3,08	0,2108	0,0105
30	2,52	0,3150	0,0105

Resultat: $a = c_1 \cdot K$ d. v. s. accelerationen är direkt proportionell mot kraften då massan är konstant.

Mätserie 3. $s = 1$ m, $K = 10$ gf.

m	t	a	$m \cdot a$
510	3,21	0,1941	99,0
910	4,30	0,1082	98,4
1310	5,21	0,0737	96,5

Resultat: $a = c_2 : m$ d. v. s. accelerationen är omvänt proportionell mot massan då kraften är konstant.

Resultaten av mätserierna 2 och 3 sammanställas till likheten $a = c_3 \cdot \frac{K}{m}$ eller $K = c \cdot m \cdot a$. Kraftekvationen har alltså verifierats. Proportionalitetsfaktorn c kan beräknas ur var och en av de nio observationerna. Inverterade värdet av c d. v. s. accelerationen vid fritt fall blir vid denna beräkning enl. formeln $g = \frac{ma}{K}$ 9,78, 9,85, 9,96, 9,61, 9,80, 9,77, 9,90, 9,84 och 9,65. Medelvärdet härav är 9,80. Variationerna i g motsvara ett största fel i tidsbestämningen på 0,03 sek. Att det erhållna medelvärdet å g så väl överensstämmer med det verkliga värdet innebär, att de systematiska felen nedbringats till mycket små värden.

En dylik verifiering av kraftekvationen medhinnes av elever vid laboration under en dubbeltimme.

Den här omnämnda fallapparaten och stoppuret saluföras av Norstedt och Söner.

Synliga strålknippen.

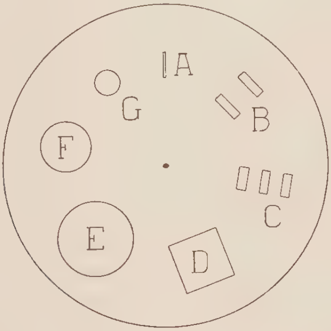
Av ALFRED NILSSON.

När ljusstrålar skola göras synliga, kan man som bekant i stället för kritdamm eller tobaksrök använda salmiakrök. Denna framställer man enklast genom att vid lektionens början upphetta en degel med ungefär 1 g salmiak, som då avryker, varvid man eventuellt fläktar litet med en pappskiva över degeln. Efter ett par minuter har röken fördelat sig jämnt i rummet och håller sig sedan svävande hela lektionen, varefter den lätt kan vädras ut. Den besvärar i regel ytterst litet, varför man ej behöver någon särskild »röklåda». Här nedan beskrivas ett par anordningar, som äro lämpliga vid försöken.

Degeln med salmiak placeras bekvämast i en triangel, som erhålles genom att böja den ena ändan av en 2,5 mm järntråd. Trådens andra ända formas till en spiral, som trädes på en bunsenbrännare.

Som ljuskälla användes en båglampa med 5—10 A strömstyrka. Den inneslutes i en plåtlåda, som bör vara ljustät särskilt framtill. Vissa båglamphuvar kunna användas, sedan de försetts med en dubbel främre vägg. Den yttre plåten i denna har en öppning med 30 mm diameter. Den inre plåten befinner sig 4 cm bakom den förra; dess kanter nå ända ut till lådans väggar, och öppningens diameter är högst 20 mm. Härigenom hindras det starka diffusa ljuset att komma ut. Det positiva kolets spets placeras 3—6 cm bakom den inre öppningen och 3 dm över bordskivan. I regel ställes lådan något åt sidan, ty strålgången syns bäst snett framifrån.

Framför den yttre öppningen placeras en revolverbländare av 0,75 mm järnplåt, i fig. återgiven i $^1/_3$ skala. Denna visar måtten tillräckligt noggrant med undantag för spaltbredderna, av vilka A är 0,7 mm och B och C 3 mm. Det är kanske enklast att beställa bländaren, men efter någon övning går det dock ganska bra att själv göra hålen, av vilka särskilt A kräver omsorg. Bländarens axel skall befinna sig under eller över den främre plåtens öppning. Bländaren är lämplig för åtskilliga elementära försök såväl med som utan användning av salmiakrök.



Rätliniga ljusstrålar visas medelst C.

Kärnskuggan demonstreras med E vänd mot klassen, varvid en kula får kasta sin skugga på en halvgenomskinlig skärm.

Halvskuggor erhåller man därefter genom att placera en liten mattglasskiva på t. ex. två dubbar i lådans främre vägg omedelbart bakom bländaren och vrida fram G, F och E, varvid kulans halvskugga blir allt bredare.

Avståndslagen vid belysning demonstreras med 2—3 A ström och smala båglampskol, 1 dm bakom D, som vändes mot klassen. Dessutom användes en halvgenomskinlig skärm.

En optisk skiva kan placeras ett stycke från G. Eventuellt samlas ljuset med en lins.

Divergenta strålars reflexion syns, om en plan spegel hålles i ungefär 45° lutning några dm framför B eller C.

Totalreflexion. Ett rätvinkligt prisma placeras i ett medelst en konvex lins samlat strålknippe, varvid ljuset reflekteras rakt upp.

Den konkava spegeln och den konvexa linsen böra ha ungefär 3 dm brännvidd och rätt stor diameter. Allt eftersom spegeln eller linsen avlägsnas från lådan, övergår man från bländaren E till F och G. I vissa fall passar B eller C bättre. — När spegelns brännvidd skall visas, göras strålarna parallella medelst linsen. Om man lutar spegeln bakåt och använder bländaren C, ser man, att de tre strålarna ej skära varandra i samma punkt. — Minimiavståndet 4 f mellan *ljuspunkten* och strålarnas *samlingspunkt* på andra sidan linsen visas bekvämt. — När man skall demonstrera den förstorade projektionsbilden, kan man rita en bild på en mattglasskiva, som ställes ungefär 1 dm framför E. Glasskivan kan utbytas mot ett lämpligt vykort e. d., som belyses snett framifrån genom E.

Lupp och glasögon: Man ställer den konvexa linsen lagom långt från båglampan, placerar en annan svag konvex eller svagt konkav lins framför densamma och visar, att samlingspunkten kommer närmare respektive längre bort från linsen.

Många andra försök kunna göras med den beskrivna anordningen. Den kan t. ex. kombineras med en stor kolv eller en glaslåda med svagt fluorescerande vatten.

Man kan även passa på tillfället att utföra följande överslagsräkning. Vid en samlingspunkt kan man urskilja åtminstone ett salmiakkorn per mm^3, även om luften innehåller endast 1 mg salmiak per m^3. Ett dylikt korn väger alltså endast 10^{-12} g men består av 10^{10} molekyler. »Ett salmiakkorn, som väger en biljondels gram, består av tio miljarder molekyler.» — Kornen ha 10^{-3} mm diameter d. v. s. samma storleksordning som ljusets våglängder. Därför avböjes så stor ljusmängd, att strålgången syns bäst snett framifrån. — Försöken med salmiakrök kunna dessutom åberopas, när tätheten hos dimma, moln, kometsvansar, Saturni ringar, nebulosor o. d. behandlas.

En ny metod för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten.

Av B. WAHLSTRÖM.

De två gängse metoderna för bestämning av denna konstant vid laborationer[1] — papppröret med fallande blyhagel och en påse med dylika, som man låter falla mot golvet — kunna ofta ge mycket goda resultat, men felkällorna äro så stora och av så svårbedömd art, att man ofta får fullständigt meningslösa värden. Under de två sista åren har jag systematiskt sökt efter en ny metod, varvid jag ställt upp följande krav på anordningen: 1) Det mekaniska arbetet skall vara lätt att bestämma. 2) Apparaturen skall vara enkel och billig samt taga liten plats. 3) Försöket skall anordnas som ett enkelt kalorimeterförsök, helst med vätska. 4) Temperaturstegringen skall kunna avläsas successivt under hela försökets gång, snabbt och bekvämt. 5) Flera försök böra medhinnas av varje laborationsgrupp under en laboration. 6) Den erhållna kurvan över temperaturstegringen skall vara så jämn, att den kan ritas med en mall eller en »ri» (en tunn, böjlig trä- eller celluloidribba, som är ett utmärkt hjälpmedel vid kurvritning; kan erhållas t. ex. hos Lindståhls bokhandel, Stockholm).

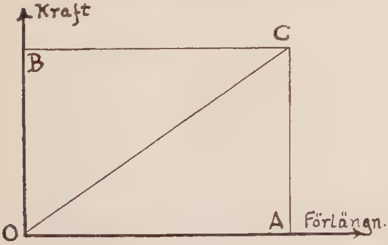


Fig. 1.

Det arbete, som omsättes i värme i kalorimetern vid den nya metoden, utföres av en spänd och utlöst spiralfjäder. Sträckes en sådan, är den under sträckningen använda kraften i varje ögonblick proportionell mot förlängningen av fjädern. Drages således en spiralfjäder ut, så att den förlänges l cm, och är den kraft, som erfordras för att hålla den i slutläget p kgf, så är det vid sträckningen utförda arbetet tydligen $= \frac{1}{2} pl$ kgcm.

---

[1] Se bl. a. denna tidskrift E. Foghammar, *9*, 912; R. Lundblad, *19*, 29; L. Larsson, *19*, 256.

För t. ex. lärjungarna i realskolans högsta klass torde det vara ganska klart, att då »begynnelsekraften» är 0 och »slutkraften» $=$ $= p$ kgf, så är arbetet $= \frac{0 + p}{2} \cdot l$ kgcm.

För gymnasiets (ring II^4) lärjungar kan en grafisk framställning även användas (fig. 1). Om kraften under hela förlängningen (l cm) varit p kgf, hade arbetet representerats av rektangelytan OBCA $= pl$ kgcm. Då nu kraften växer (från 0) prop. mot förlängningen (således längs diagonalen) blir arbetet $=$ ytan av triangeln OCA $= \frac{1}{2}\, pl$ kgcm.

Vill någon spara försöket, tills de matematiska kunskaperna blivit större, är en behandling med »derivatans omvändning» trevlig. Den vid en fjäderförlängning av x cm erforderliga slutkraften må vara $k = cx$ kgf. Förlänges fjädern ytterligare Δx, och är det därvid utförda arbetet $= \Delta A$, inses omedelbart, att $cx \cdot \Delta x < \Delta A <$ $< c(x + \Delta x) \cdot \Delta x$, varav efter division med Δx och limesövergång $\frac{dA}{dx} = cx$ och $A = \frac{1}{2}\, cx^2 + K$, där $K = 0$, varför $A = \frac{1}{2}\, kx$.

Apparaten (fig. 2) har utformats på följande sätt. Kalorimetern AB är ett 20 cm långt, tunnväggigt stålrör (godstjocklek 0,5 mm; finnes i standardutförande) med isvetsad tunn järnbotten. Inre diameter 11,5 mm. I bottnen är ett litet fyrkant-hål upptaget.

En spiralfjäders nedre ända är gängad på en dubbel järnskruv (C), vars klenare del går ut genom bottenhålet och är fastsatt vid kalorimetern med en utvändig mutter. En invändig packning tätar hålet. Fjäderns övre ända är gängad på några gängor (F) på »kolven» DEFG, vars längre del FG (något kortare än fjäderns fria längd) således kan löpa inuti fjädern, då denna sträckes lodrätt uppåt medelst en rak sträng (DH), fästad vid skruvskallen DE, som utformats till ett par brickor av c:a 10 mm diameter. Hela kolven är urborrad till mycket tunt gods. Strängen DH är fästad vid en fiberkula (K) och löper genom ett hål i fiberproppen P. Man fattar i kulan K och spänner fjädern till ett »stopp» (SS), strax nedanför det påsvetsade sidoröret R, i vilket en i 0,1-grader graderad termometer är införd. En bit gummislang eller kork håller termometern i mittläge i R. Termometerns övre del fästes lämpligen i ett stativ.

Kalorimeterrörets nedre del är omsluten av en värmeisolerande, fjädrande isolithylsa (L). Med skruvarna M fasthålles kalorimetern lodrätt i basplattan (av gjutjärn), som fastskruvas i arbetsbordet eller fästes vid detta med en tving.

Kalorimetern fylles genom sidoröret R med kvicksilver, så att detta står en bit upp i sidoröret, till nivån N; c:a 200 g (15 cm^3) erfordras.

Nu spännes fjädern till stoppet S och släppes »handlöst». På det exemplar jag använt spändes fjädern med kraften 3,0 kgf, varvid fjäderns förlängning var 6,2 cm. Arbetet är således — $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6{,}2$ kgcm.

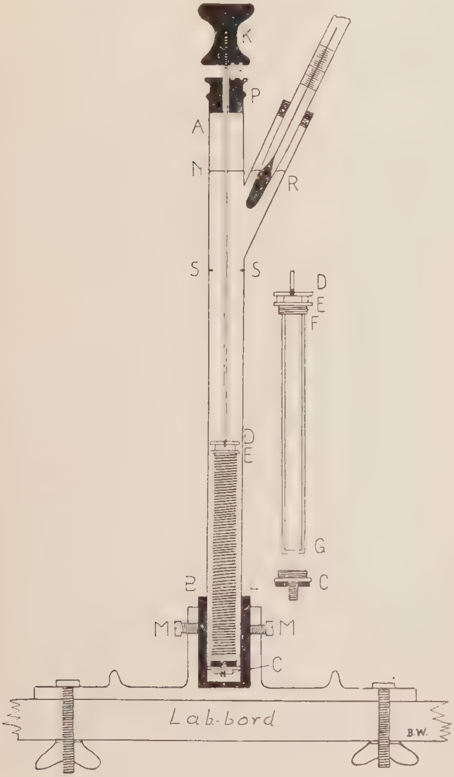


Fig. 2.

Då fjädern släppes, slår den ned igen, varvid den genom arbetet erhållna lägesenergien (9,3 kgcm) omsättes i rörelseenergi och i vätskan i värme. Då den tätlindade fjädern drages upp, strömmar en del kvicksilver in mellan fjädervarven och fyller den del, som förut upptogs av kolven FG. Då fjädern släppes, pressar kolven ut kvicksilver genom de alltmer tätnande fjädervarven, varigenom stöten, vid lämpligt dimensionerad kolv m. m., dämpas successivt och kvicksilvret »porlar» uppåt i röret. På grund av kolvens dimensionering och tack vare skivorna D och E samt kvicksilvermängden ovanför S hindras kvicksilvret att »stänka», men en synnerligen grundlig omröring kommer dock till stånd. Kvicksilvrets och kalorimeterns alla delar, vilka äro mycket tunnväggiga, antaga så gott som ögonblickligen den högre temperaturen.

Försöket utföres lämpligen på följande sätt av två laboranter. »Arbetaren» spänner fjädern med en lugn dragning till stoppet S och låter sedan fingrarna under dragning uppåt glida längs kulan, tills greppet om denna lossnar och fjädern »handlöst» utlöses. Efter någon träning tar varje »slag» 1,2—1,5 sek. »Observatören» följer temperaturens stigning och avläser lämpligen med en i ett stativ fästad, parallaxfritt inställd lupp. (Lämpligt är att förse denna med en vignett av svart papper, så att endast ett cm-stort centralt »titthål» återstår.) Kalorimeterns begynnelsetemperatur bör vara några grader lägre än rumstemperaturen, som avläses på 0°,1 med samma termometer omedelbart före försökets början. Temperaturstegringen, 0°,4—0°,25 på 20 slag, skattas i 0,01-grader.

För kylning av kalorimetern under rumstemperatur har jag använt två metoder. Bekvämast är kanske att låta en stråle från en kolsyrebomb under några ögonblick omspola kalorimetern, men det går också mycket bra att linda en tygremsa omkring densamma, vilken sedan fuktas med litet eter. Skulle avkylningen bli för stark, regleras detta lätt med några »smekningar» med handen. Innan observationerna igångsättas, bör »arbetaren» slå ett par tiotal slag med kolven, så att hela ekipaget antar samma temperatur.

Vid beräkning av kalorimeterns vattenvärde ha följ. värden på spec. värmet använts: för järn-stål medelvärdet 0,112 och för kvicksilver 0,0333.

I realskolans högsta klass har jag tänkt mig följande metodik. Sedan avkylning ägt rum, sätter »arbetaren» igång och observatören börjar t. ex. 1°,52 under rumstemp. och räknar 0, 1, 2, 3, ... samt bestämmer antalet slag (*n*), tills temp. stigit till t. ex. 1°,54 över rumstemp. (således praktiskt taget lika mycket under som över denna). Arbetet är då $=\frac{1}{2}n\cdot 3\cdot 6{,}2$ kgcm, och värmemängden erhålles lätt av kalorimeterns vattenvärde och temp.stegringen 3°,02.

I ring II^4 har jag tänkt mig följa den metod, som bl. a. LEW LARSSON framhållit såsom lämplig, då han använde metoden med den fallande påsen med blyhagel. Man observerar — som ovan antytts — temp.stegringen efter t. ex. vart 20:e slag och ritar en kurva på mm-papper. I rumstemperaturpunkten på denna kurva drages tangenten, som då anger stigningen vid ett idealt försök, således utan värmeutbyte med omgivningen. I stället för tangenten drager man lämpligen en korda genom två från rumstemperaturpunkten (ett par cm) ekvidistanta punkter på kurvan. Kurvan bör om möjligt ritas med en mall eller en »ri» så att en skarp linje erhålles. Den ligger vackert genom så gott som alla de inprickade punkterna.

Båda metoderna ge ungefär lika goda resultat. Den förra gav vid en serie på 34 bestämningar lägst 407 och högst 450, den senare vid en serie på 54 bestämningar lägst 405 och högst 446. Medelvärdet i båda fallen 426 med en vacker spridning av värdena kring detsamma. Då man bör kunna medhinna 6—7 bestämningar med varje grupp under en dubbeltimme, kan man således räkna med c:a 50 värden per laboration, vilket bör ge ett gott medeltal. De nämnda serierna utfördes under mycket olika förhållande beträffande rumstemperatur, apparatplacering m. m.

Anordningen är givetvis behäftad med felkällor. Det skulle taga för mycket utrymme att här ingående diskutera dessa. Det största osäkerhetsmomentet ligger sannolikt i arbetsbestämningen, även om fjäderns »slaglängd» och »slutspänning» äro noggrant bestämda. Det mesta hänger på om man lyckas släppa fjädern handlöst i det högsta läget. Jag har då medvetet slarvat med noggrannheten vid spänningen och därvid kommit till de högsta värdena på konstanten i de nämnda serierna (ett mindre arbete än det teoretiska har utförts av fjädern, om denna i utlösningsögonblicket ej varit fullt spänd), men även medvetet arbetat alltför energiskt, så att jag ryckt fjädern upp mot stoppen och spänt även *strängen* vid utlösningen (ett större arbete än det teoretiska har överförts i värme), varvid de låga värdena erhållits. På 200 slag torde felen i båda riktningarna i stort eliminera varandra, om ej medvetna felaktigheter begås. — Från värmeutbyte med omgivningen genom ledning via kulan och handen kan helt bortses. Likaså från den uppvärmning, som äger rum genom att kvicksilver strömmar (faller) in på kolvens plats, då fjädern sträckes. En undersökning har visat, att temp.stegringen på grund av detta »extra-arbete» faller inom felgränserna. — Felaktigheter kunna vidare föreligga i fjädern, så att kraften icke är proportionell mot förlängningen i varje moment. En undersökning har utvisat en synnerligen god kvalitet hos fjädern, beställd hos Svenska spiralfabriken, Stockholm. Även efter åtskilliga 10 000-tal slag, visar den ej heller några tecken till uttröttning. Andra mindre felkällor tagas ej upp här. Givetvis kan apparatens dimensioner ökas, varigenom felkällorna relativt minskas. Jag har arbetat med dubbelt så hög apparat och alltså med en fjäder av dubbla längden. Resultaten bli ej bättre, men apparaten blir obekväm att arbeta med och fordrar större mängder kvicksilver.

Kanske bör jag i detta sammanhang nämna, att metoden ej är god, om man försöker med andra vätskor än kvicksilver. Jag har prövat ett stort antal olika modifikationer, då andra vätskor använts, men med mindre goda resultat.

Att vid laborationer använda kvicksilver är enligt mångas mening ej så trevligt. Men läraren kan ju, om han så vill, på förhand fylla kalorimetrarna med en vägd kvicksilvermängd. Jag vill eljest rekommendera användningen av små emaljerade järnbägare vid laborationer med kvicksilver. De äro både absolut och relativt lika billiga som glasbägare, framför allt i längden. Försedda med en lämplig kork äro de verkligt riskfria. Finnas i varje järnaffär. (Kockums fabrikat.)

Apparaten kommer att tillverkas av mig och Norra realläroverkets skicklige mekaniker H. Berggren, varvid min »avans» endast blir räknad så, att den täcker experiment- och materialkostnader samt frakt och emballage. Priset kommer givetvis att under sådana förhållanden bli beroende av upplagans storlek. Jag tror dock, att det kan hålla sig vid omkring 15 kr, om ett par hundra apparater beställas. Jag vore därför tacksam för meddelande snarast från intresserade lärare i fysik, om de reflektera på en uppsättning. Apparaten har redan beställts av ett antal läroverk i Stockholm. De emaljerade järnbägarna liksom även en eller annan »ri» kan levereras av mig samtidigt, om så önskas.

Finlands matematik- och fysiklärarförbund.

Då vi erfarit att man på fackmannahåll i Sverige är intresserad av att höra någonting om Finlands matematik- och fysiklärarförbund, meddelas här några uppgifter om förbundets uppkomst, dess verksamhet och strävanden.

Pedagogiska föreningen i Finland har gamla anor. Den grundades redan år 1863. Men det är naturligt, att på en sådan förenings program de allmänt pedagogiska spörsmålen skola vara de dominerande. Om också de enskilda läroämnenas särintressen ha kunnat inom denna förening i någon mån beaktas, uppstod dock småningom allt starkare behov av sammanslutningar för tillvaratagande av de enskilda läroämnenas och ämnesgruppernas speciella intressen. Det uppkom här och var, främst i de större städerna, lokala diskussionsklubbar av icke officiell natur, vilka utgjorde sammanslutningar av facklärare inom samma eller närbesläktade vetenskapsområden. Sålunda bildades på flera orter t. ex. modersmålslärarnas, matematik- och fysiklärarnas, historielärarnas o. s. v. förening. Ett annat utslag av intresse för och omvårdnad om undervisningen i de enskilda lärofacken voro de, vanligen på skolstyrelsens initiativ anordnade kurser eller »dagar» för landets lärare i de enskilda läroämnena.

För Finlands fysiklärare anordnades första gången kurser i experimentalfysik i Helsingfors 1922. Kurserna omfattade en tid av 4—5 dagar, och där framfördes dels experiment som direkt hörde till skolkurserna, dels experiment och föredrag av mera vetenskapligt betonad natur. Som experimentatorer och föredragare voro engagerade såväl läroverks- som universitetslärare. Dessa kurser, som senare med ett par års mellantid återupprepades, visade sig vara synnerligen fruktbringande. De gåvo helt säkert åt mången lärare nya impulser till gagn för hans undervisning eller vetenskapliga intressen, och de gåvo upphov till nya föreningar ur vilka slutligen Finlands matematik- och fysiklärarförbund växte fram.

Hösten 1927 grundades Helsingfors matematik- och fysiklärares klubb (kerho), och denna visade sig fylla ett verkligt behov i det dess verksamhet blev synnerligen livaktig. Ehuru den ej var någon officiell förening, blev den dock en sammanhållande kraft för hela landets matematik- och fysiklärarkår.

Det praktiska anordnandet av de ovannämnda fysik- och matematiklärarkurserna anförtroddes år 1932 åt Helsingforsföreningen, efter det skolstyrelsen utverkat nödigt anslag för deras föranstaltande. Programmet vid dessa fysik- och matematiklärardagar blev rätt så omfattande, och där förekom i större utsträckning än förut föredrag och diskussioner. Genom tillmötesgående från vederbörande myndigheter erhölls anslag så att mötesförhandlingarna, både föredrag och diskussionsprotokoll, kunde tryckas. Det blev en publikation om 171 sidor.

Det var vid dessa »dagar» tanken väcktes och förslag gjordes om bildandet av ett hela landet omfattande matematik- och fysiklärarförbund. Det dröjde dock ännu några år förrän denna tanke förverkligades. Våren 1935 togs frågan upp på allvar inom Helsingfors matematik- och fysiklärares klubb. För att utröna i vilken mån intresse för saken fanns bland landets matematik- och fysiklärare, utsändes till medlemmarna av denna kår ett cirkulär, undertecknat av några kända Helsingforslärare. I detta cirkulär säges bl. a.: »Vid sitt senaste möte beslöt Helsingfors matematik- och fysiklärares klubb att föreslå grundandet av ett hela landet omfattande, såväl finsk- som svenskspråkiga lärares i matematik och naturlära förbund, till vilket skulle höra lärdomsskolornas och seminariernas lärare. Förbundets ändamål vore att befrämja undervisningen i nämnda ämnen och bevaka lärarnas i dessa ämnen intressen. För detta ändamål skulle anordnas års- och andra möten, och i anslutning därtill föreläsningar, diskussioner och exkursioner. Vi be Eder överväga förslaget, diskutera det med Edra tjänstekamrater och meddela oss Eder mening i frågan och huruvida Ni är villig ansluta Eder som medlem i ett sådant förbund. Om meningarna gå i riktning av förslagets understödjande, är vår avsikt att hålla konstituerande möte i Helsingfors i början av instundande juni.»

Det visade sig att intresset för förslaget var stort, och konstituerande möte hölls 3 juni 1935, inom ramen för samtidigt anordnade matematik- och fysiklärardagar 2—3 juni. Anslutningen till förbundet blev, såsom man av förhandsuppgifter kunde förmoda, stor. Dess medlemsantal uppgår för närvarande till 272. Sedan de vid konstituerande mötet antagna stadgarna blivit vederbörligen fastställda och förbundet inregistrerat, hade Finlands matematik- och fysiklärare en central organisation, vars ändamål är att arbeta för sina medlemmars förkovran och utveckling i pedagogiskt och vetenskapligt avseende samt att tillvarataga även deras sociala och ekonomiska intressen.

Sedan detta förbund stiftats, har det stått som arrangör av matematik- och fysiklärardagar dels i samband med årsmöten, som hållits i juni månad, dels å andra tider. Förutom i Helsingfors ha sådana dagar anordnats bl. a. i Tammerfors i juni 1936 och i Viborg 22—26 augusti 1939. Dessa sistnämnda dagar blevo för deltagarna särskilt minnesrika. Föredrag höllos bl. a. av högskoleprofessorerna K. Väisälä, E. J. Nyström, Rolf Nevanlinna och Jarl Wasastjerna, av skolrådet Niilo Kallio samt av flera läroverkslärare. Men frånsett dessa många värdefulla föredrag var det dock något annat på programmet, som åtminstone nu efteråt för deltagarna står djupt inristat i minnet. Det var exkursioner till Vuoksendalens stora industriella inrättningar och besök å Viborgs slott och andra historiska platser, där instruktiva föredrag gåvo besökarna en fängslande bild av de öden som dessa utposter i öster undergått i hårda tider fordom. — Och sju månader senare, efter hårda strider voro dessa nejder ej mera våra. — Det är väl därför Viborgsdagarna hos mötesdeltagarna kvarlämnat så oförglömliga minnen.

Bland de mera påtagliga resultaten av förbundets verksamhet bör nämnas grundandet av facktidskriften »Matemaatisten aineiden aikakauskirja» (Tidskrift för de matematiska ämnena). Beslut härom fattades på matematik- och fysiklärarförbundets årsmöte i Tammerfors 1936, och i januari 1937 utkom första häftet av tidskriften. Vad denna tidskrift strävar till framgår kanske bäst av några citat ur uttalanden rubricerade »Vid vandringens början» av redaktionen och tidskriftens rådgivande medlemmar i första häftet, januari 1937. Där skriver bl. a. *redaktionen*: ... Det är naturligt, att tidskrifter som behandla allmänt pedagogiska spörsmål, redan på grund av utrymmesbrist ej kunna i nämnvärd mån publicera uppsatser som hänföra sig till något speciellt, i detta fall matematikens och naturlärans områden. Men å andra sidan behöva de unga vetenskapsidkarna en tidskrift i vars spalter de kunna publicera sina forskningsresultat eller framföra sina åsikter i till facket hörande frågor. Då en sådan tidskrift härintills ej förefunnits i vårt land, vill denna tidskrift avhjälpa denna brist. ... Vi önska fördjupa lärarnas intresse för sitt arbete och erbjuda dem läsning, som kan giva dem nya impulser och öppna nya perspektiv. ... Prof. Hj. V. Brotherus: Våra läroverkslärare äro ofta tyngda av en stor, jag ville säga för stor arbetsbörda, och mången kommer att arbeta isolerad utan nämnvärd kontakt med arbetskamrater från samma yrkesavsnitt. Även ett från början levande intresse för ämnet mattas av, och arbetet förlorar sin tjusning och övergår till ett mer eller mindre mekaniskt, år ut och år in förhörande av samma läxa. Ett klart och glädjande bevis för att lärarna verkligen känt ett behov av att komma i fruktbringande kontakt och tankeutbyte med varandra utgör det livliga deltagandet i senaste års lärardagar och det intresse varmed de tillgodogjorde sig även de mera betungande delarna av programmet.» ... Skolrådet Niilo Kallio: Tidskriftens uppgift enligt min mening är att den skall utgöra ett föreningsband mellan matematik-, fysik- och kemilärarna och bland dem vidmakthålla och förkovra intresset för en allsidig utveckling av undervisningen i de ämnen de representera samt för forskningsarbetet inom de matematiska vetenskaperna. För att detta mål skall uppnås bör i tidskriften ingå uppsatser berörande undervisning och undervisningsmetoder i matematik, fysik och kemi samt dessa ämnen berörande vetenskapliga uppsatser och meddelanden ävensom bokrecensioner. ... Lektor Reinhold Westlin: Vår rastlösa tid har på alla områden åstadkommit allt längre driven specialisering. ... Och de krav som ställas på den kår till vilken vår nya tidskrift vänder sig äro ej små. Formellt äro några, visserligen nog så krävande examina, övningar och prov tillfyllest. Men för den lärare, som vill göra det bästa möjliga av sitt arbete, gäller i kanske högre grad än inom andra områden, att man aldrig bör slå sig till ro och känna sig nöjd med sig själv, sina kunskaper och sin undervisning. Faran att stagnera i utveckling, att förlora kontakten med sin vetenskap, att stelna i givna former förefinnes alltid. Det är att hoppas, att denna tidskrift skall bidraga till att hålla intresset för både undervisning och vetenskap vaket. ... Prof. K. Väisälä: Det förefaller som om det hos oss ofta skulle inträffa, att de som utbildat sig till matematik- och fysiklärare, betänkligt snabbt skulle börja konvergera mot ett sådant stadium att de av de vetenskaper de representera behärska blott de avsnitt de vid sin undervisning direkt meddela eleverna. ... Enligt min mening är den nya tidskriftens främsta uppgift att söka upprätthålla matematik- och fysiklärarnas intresse för dessa vetenskaper och om möjligt giva impulser till självständigt, vetenskapligt arbete. ...

Att döma av det intresse varmed tidskriften omfattats av den kår till vilken den vänder sig, torde de förhoppningar, som i ovan citerade uttalanden funnit uttryck, åtminstone i någon mån ha förverkligats.

Det var ej många år förbundet och dess tidskrift fick arbeta utan störningar. Det ligger i sakens natur att förbundets verksamhet till största delen var inställd läsåret 1939—40. Stagnationen i tidskriftens utkommande blev dock ej så långvarig. Det sista häftet före vinterkriget utkom i nov. 1939, och i aug. 1940 utgavs ett dubbelnummer, 1—2, det första efter kriget. Å detta häftes första sida lästes under rubriken *pro patria* namnen på 17 av förbundets medlemmar som stupat i kamp för friheten. Då arbetet hösten 1940 åter kommit i gång, har förbundets verksamhet därefter fortgått någorlunda normalt. Några matematik- och fysiklärardagar ha dock ännu ej anordnats sedan de minnesrika dagarna i Viborg sommaren 1939.[1]

Helsingfors i maj 1941.

Reinhold Westlin.

Bokanmälningar.

Bengt Strömgren, *Universets Udforskning.* H. Hirschsprungs Forlag, København 1940, 200 s., kr. 7: 50.

Populär naturvetenskaplig litteratur kan med hänsyn till uppläggningen av det behandlade ämnet indelas i två skilda kategorier. Den första omfattar sådana böcker, där författaren nöjer sig med att i lättillgänglig form framlägga de slutgiltiga resultaten från ett större eller mindre forskningsområde utan att närmare redogöra för de metoder, genom vilka dessa resultat vunnits. Den andra kategorien åter inrymmer böcker, där läsaren får följa forskningens väg genom årtionden, kanske århundraden, och där författaren söker klarlägga hela den tankegång, som leder fram till den definitiva lösningen av olika vetenskapliga problem. Det senare slaget av litteratur ställer givetvis större krav på läsarens uppmärksamhet, och helt visst möter författaren åtskilliga vanskligheter vid en sådan framställning. Professor Bengt Strömgrens bok är ett utmärkt exempel på hur dylika svårigheter kunna övervinnas, när vetenskaplig vederhäftighet och mästerlig framställningsförmåga gå hand i hand.

---

[1] På grund av försenad postgång kunde lektor Westlins artikel ej införas i Elementas junihäfte, för vilket den var avsedd. I brev meddelar lektor W. att förbundsmöte hölls i början av juni 1941. Förbundets ordf. är lektor Bruno Malmio, Ulrikaborgsg. 3 A, Helsingfors, v. ordf. lektor Reinhold Westlin, Mecheling. 28 A, Helsingfors och sekr. Dr U. Kuuskoski, Helsingfors, den senare även red. för förbundets tidskrift. *Red.*

Boken, som ingår i serien »Hirschsprungs populærvidenskabelige haandboger», avser att giva en populärvetenskaplig framställning av astronomien med huvudvikten lagd på dess mest aktuella grenar, astrofysiken och stellarastronomien. Mera i förbigående ägnas tre kapitel i början åt den sfäriska astronomien, himmelsmekaniken och planetsystemet. I all sin korthet utgör emellertid denna översikt en synnerligen givande läsning, därigenom att författaren städse tar sikte på det ur principiell synpunkt väsentliga i den historiska utvecklingen.

Efter en presentation av de närmaste fixstjärnorna och en redogörelse för metoderna att bestämma stjärnornas ljusstyrkor och färger samt deras radier, massor och tätheter följer bokens längsta kapitel, om stjärnornas spektra. Här diskuteras de fysiska och kemiska egenskaperna hos stjärnornas atmosfärer, och läsaren får en inblick i de atomprocesser, som äro förbundna med uppkomsten av solens och stjärnornas kontinuerliga spektra och absorptionslinjespektra. I omedelbar anslutning härtill behandlas de spektroskopiska metoderna för bestämning av stjärnornas avstånd och radialhastigheter. I förening med ett kapitel om stjärnornas inre byggnad utgör detta avsnitt bokens tyngst vägande parti, vilket också var att förvänta, då författaren just på detta område genom eget forskningsarbete lämnat mycket viktiga bidrag till lösningen av de utomordentligt svåra problem, som vetenskapen här ställes inför.

I de närmast följande kapitlen behandlas dubbelstjärnor, föränderliga och nya stjärnor samt öppna och klotformiga stjärnhopar, varefter författaren kommer in på frågan om vårt stjärnsystems struktur och rörelseförhållanden. En kort redogörelse lämnas också för de extragalaktiska nebulosorna och den egendomliga rödförskjutningen av linjerna i deras spektra, vilken givit upphov till teorien om ett expanderande universum. Till sist göres ett försök att i korthet skissera stjärnornas och stjärnsystemens sannolika utvecklingshistoria.

Framställningen präglas av logisk klarhet och pregnans. Det har varit författarens önskan att göra bokens innehåll tillgängligt även för läsare utan matematiska förutsättningar, och därför lämnas formelapparaten åsido. Man måste förvåna sig över hur väl författaren trots detta lyckas klargöra även rätt invecklade sammanhang. Särskilt kapitlet om stjärnatmosfärernas fysik är värt det högsta erkännande och skulle kunna tjäna som förebild i fråga om populärvetenskaplig framställningskonst. På vissa andra aktuella områden skulle man kanske gärna ha sett en något större utförlighet i framställningen än som varit möjlig med det begränsade utrymme, som stått till förfogande. Men denna anmärkning väger lätt gentemot de stora förtjänster, som kunna andragas. Över huvud bjuder denna bok en så stimulerande läsning, att den med nöje kan rekommenderas åt alla, som önska tränga in i den moderna astronomiens problem. *Helge Nordström.*

ÅKE WALLENQUIST, *Mörk materie i världsalltet.* Verdandis småskrifter n:r 437, Bonnier, Stockholm 1941, 67 s., kr. 1: 50.

Författaren har här tagit till sin uppgift att i en populär framställning belysa ett problem av central betydelse i den moderna stellarastronomien. Existensen av mörk, ljusabsorberande materie i rummet mellan stjärnorna spelar nämligen en väsentlig roll för vår uppfattning om Vintergatssystemets byggnad och utsträckning. Tanken på förekomsten av sådan materie är inte ny, men frågan kunde till en början endast göras till föremål för spekulativa funderingar. Först de senaste decenniernas astronomiska forskningar ha otvetydigt bevisat tillvaron i världsalltet av mörk materie. I form av moln av kosmiskt stoft eller ytterligt förtunnade gaser utbreder den sig mellan stjärnorna i vårt stjärnsystem, och den påträffas även i de utomgalaktiska nebulosorna.

Boken avser att giva en kortfattad redogörelse för de metoder, som astronomerna använda vid studiet av den mörka materiens förekomst, mäktighet och fysiska natur, samt för de intressantaste och mest påtagliga av de vunna resultaten. Först behandlas de lokala anhopningar av interstellär materie, som för oss framträda som mörka eller lysande diffusa nebulosor. Författaren kommer sedan in på frågan om en allmän absorption av ljuset i världsrymden och lämnar en översikt av de viktigaste av de undersökningar, som gå ut på att påvisa förhandenvaron av en sådan absorption och bestämma dess storlek. Då flera omständigheter antyda, att absorptionen skulle vara begränsad till ett tunt skikt i Vintergatsplanet, diskuteras konsekvenserna för vårt stjärnsystems vidkommande av en sådan fördelning av den mörka materien. Ett följande avsnitt är ägnat åt den selektiva absorptionen. varmed avses en av ljusets färg beroende absorption, som har till följd, att avlägsna stjärnor synas rödare än närbelägna av samma spektraltyp. I anslutning härtill dryftas frågan om den mörka materiens fysikaliska natur, varom värdefulla upplysningar kunna erhållas genom ett närmare studium av den selektiva absorptionen. Sålunda omnämnas de intressanta försök, som gjorts av observator Schalén i Uppsala, att på grundval av vissa antaganden bestämma den sannolika storleken av de partiklar, varav de mörka nebulosorna äro uppbyggda.

Framställningen åtföljes av ett flertal utmärkta illustrationer. Som totalomdöme kan sägas, att denna översikt över resultaten från ett aktuellt forskningsområde utgör ett synnerligen värdefullt tillskott till de tidigare astronomiska skrifterna i den förnämliga Verdandiserien.

Helge Nordström.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 18, 1940, 187 s. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavg. kr. 10, medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Walleriusv. 16, Uppsala.

Den nya årgången av »Kosmos», som nu föreligger, innehåller sex uppsatser, av vilka två behandla ämnen av rent fysikalisk natur, medan i de fyra övriga avhandlas problem inom andra vetenskaper, som framgångsrikt studerats med användning av fysikaliska undersökningsmetoder. De förra utgöras av en uppsats av assistent T. Jönsson över nyare bestämningar av ljusets hastighet samt en uppsats av prof. Waller över moderna teorier för den elektriska ledningen i metaller. Ljushastigheten är ju en av fysikens viktigaste fundamentalkonstanter, och en sammanfattande beskrivning av de vitt skilda metoderna för precisionsbestämning av denna är därför synnerligen värdefull. Assistent Jönssons uppsats ger en klar bild av de svårigheter, man haft att övervinna, och av de ofta geniala sätt, varpå dessa bemästrats. Prof. Wallers arbete utgör fortsättningen av en redogörelse för metallernas egenskaper från teoretisk ståndpunkt, som påbörjades i föregående band av »Kosmos». I den föreliggande uppsatsen skildras väsentligen de intressanta teorierna för metallernas elektriska ledningsförmåga på den nyare kvantumteoriens grundval, vilka utvecklats av Sommerfeld o. a.

Det radioaktiva sönderfallet och dess betydelse för jordklotets fortskridande omvandlingsprocess är ämnet för en synnerligen fascinerande uppsats av prof. H. Pettersson, vari skildras de radioaktiva mätmetoderna och mätningsresultaten vid undersökning av geologiska prov samt de slutsatser, som därav kunnat dragas beträffande jordklotets ålder, inre värmeförhållanden och rytmiska förändringar. En utförligare beskrivning av dessa intressanta frågor återfinnes i det av prof. Pettersson nyligen utgivna arbetet »Jorden och radium», som tidigare anmälts i »Elementa» (sid. 95—96 i denna årgång). En annan geofysisk uppsats beträffande den isostatiska jämvikten i jordskorpan, som har flera beröringspunkter med den förra, har författats av prof. W. Heiskanen. De utomordentligt intressanta försöken att använda radioaktiva isotoper som indikatorer för biologisk forskning, som anställts framförallt av Hevesy, beskrivas i en uppsats av fil. dr Anna Beckman. Man får ett starkt intryck av den snabbhet, varmed en av fysikens nyaste landvinningar kunnat utnyttjas för lösning av gamla problem. Här har man förmodligen att vänta sig en fortsatt utveckling till fromma för såväl den biologiska forskningen som läkarevetenskapen. Ett annat exempel på användning av fysikalisk mätteknik för biologisk forskningsverksamhet ger oss en uppsats av fil. lic. G. C. H. Ehrensvärd över vissa avsnitt av nervfysiologien, framförallt nervledningen, som med användning av fysikaliska hjälpmedel kunnat framgångsrikt studeras.

Nils Ryde.

DAVID KATZ, *Psykologiska laborationer.* Svenska bokförl., Sthlm 1941, 123 s., kr. 3: 50.

Utvecklingen har under det sista århundradet tenderat till att göra psykologien till en allt mer utpräglad naturvetenskap, och till följd härav har experimentet blivit ett av eller kanske rent av det viktigaste av denna vetenskaps hjälpmedel. Detta har så småningom verkat omdanande på den akademiska undervisningen i psykologi. Numera förekomma psykologiska laborationer vid alla våra högskolor, där psykologi och pedagogik studeras. Även vid de högre allmänna läroverken och seminarierna ägnas idag vederbörligt intresse åt den experimentella psykologien.

Vi ha emellertid haft ont om laborationshandledningar på svenska. Brandells lärobok i psykologi bygger dock i stor utsträckning på experiment, och i det föredrag om experimentet i psykologiundervisningen vid läroverken, som undervisningsrådet Sjöstedt höll vid läroverkslärarmötet 1938, och som är tryckt i mötesförhandlingarna, lämnas både apparatbeskrivningar och handledning till apparaternas användning.

Katz' »Psykologiska laborationer», som utarbetats som ett kompendium för deltagarna i laborationskurserna vid Stockholms högskola, är en något mer omfattande handledning i ämnet. Den gör ej anspråk på att vara fullständig men ger ett rätt rikhaltigt urval av belysande och lämpliga experiment, vilka i regel kunna utföras utan dyrbara apparater. Den vänder sig ej blott till de studerande vid högskolorna utan även till eleverna vid högre läroverk, seminarier och folkhögskolor samt till studiecirklar.

Endast ett av kapitlen är av teoretisk art och handlar om den moderna färgpsykologien. Både innehåll och form torde emellertid göra detta kapitel mycket litet givande för flertalet av dem för vilka boken är skriven. Någon teoretisk anstrykning ha naturligtvis även de kapitel, som handla om observationsmaterialets bearbetning m. m. dylikt. Emellertid lämnas här inga deduktioner av de formler, som skola komma till användning. Detta kan kanske anses motiverat med hänsyn till den publik till vilken arbetet vänder sig. Men varför en summering av ett större antal termer skall skrivas på helt olika sätt vid olika tillfällen förstår jag ej. Den senare av de två använda metoderna förefaller mig icke blott onödig utan direkt ologisk.

Författaren är säkerligen icke naturvetenskapsman. Det röjes bland annat av resonemanget om naturvetenskapliga och psykologiska experiment, av det nyss omnämnda sättet att skriva en summering, av att ordet koefficient på ett ställe begagnas i betydelsen kvot, av att »lodrätt» användes i betydelsen »vinkelrätt» (översättningsfel?) eller av det kategoriska påståendet, att det skall vara 68 mm mellan två spetsar för att de, om de samtidigt sättas mot ryggen hos en människa, skola kunna särskiljas som två. Kanske beror det på denna omständighet, att ibland även en del av resonemanget verkar litet främmande på en naturvetare.

Stoffet är rikhaltigt. Det omfattar icke mindre än 87 försök och demonstrationer. Början göres med sinnesförnimmelserna, varvid också hänsyn tages till förnimmelsernas inordning i tid och rum. Därefter följa experiment avseende föreställningarnas och föreställningsförbindelsernas psykologi. Slutligen komma några experiment avhandlande vilje- och känslopsykologien. Några djurpsykologiska experiment anföras i sammanhang med motsvarande problem rörande människans psykologi.

De flesta av experimenten äro både intressanta och givande, och den i regel enkla apparaturen gör att man även med mycket små resurser till sitt förfogande kan våga sig på ett stort antal utav dem. Någon gång äro apparatbeskrivningarna rätt oklara, varför man ibland behöver vara litet inne i saken för att förstå dem.

Boken tycks på det stora hela vara väl ägnad att fylla sin uppgift. Även för den som inte har tid eller tillfälle att arbeta igenom experimenten torde den vara en mycket intressant läsning och en god introduktion till studiet av någon lärobok i psykologi. Särskilt vill jag påpeka, att den bör kunna göra god tjänst som handledning vid enskilda arbeten på gymnasiet. Det är icke svårt att ur bokens rikhaltiga samling av experiment göra ett lämpligt urval av sådana, som en gymnasist kan handskas med på egen hand.

S. Åstrand.

Povl Vinding, *Dansk Teknik gennem 100 Aar, belyst i Levnedsskildringer.* G. E. Gads Forlag, København 1939, 229 s., d. kr. 7: 50.

I form av 12 framstående danska teknikers biografier lämnas ett tvärsnitt genom dansk teknik under ett sekel. Främst i raden står H. C. Ørsted, som räcker till för ganska mycket. Han sysslade inte bara med elektromagnetism och naturfilosofi utan även med att grunda Polyteknisk Læreanstalt, framställa vattenfri aluminiumklorid och polemisera mot Grundtvig, den där likväl icke lät sig rubbas i tron på att solen gick runt om jorden och att hela universum var till uteslutande för människans skull.

Julius Thomsen, termokemisten, som blev professor och rektor vid universitetet och direktör för Polyteknisk Læreanstalt utan att ha avlagt studentexamen, sysslade även med en råd offentliga uppdrag av teknisk art. Härvid kunde han en gång oväntat snabbt lämna magistraten en äskad uppgift om förhållandet mellan bebyggd och obebyggd areal i Köpenhamn. Arbetet, som skulle tagit en rundlig tid för vanliga ämbetsmän, utfördes av Thomsen på en ledig eftermiddag. Han klippte sönder en stadskarta, sorterade bitarna efter bebyggelsen i två högar, och vägde dessa. Bland märkesmännen må här även nämnas ingenjör Ambt, som planerade kloakledningar för Köpenhamn, Malmö och Lund. Han var även ledamot av kommissionen, som sysslade med gasverket i Kristiania och centralstationen i Stockholm, ett vackert exempel på nordiskt samarbete. J. Irminger, banbrytaren inom aerodynamiken, gjorde fundamentala mätningar av vindtrycket och av sugverkan på läsidan, som spelar så stor roll för aeroplanens bärförmåga.

Flera av de skildrade personerna ha varit skickliga och flitiga läroboksförfattare. Boken är väl illustrerad och försedd med talrika litteraturanvisningar.

J. Tandberg.

Mary Elvira Weeks, *Discovery of the Elements,* Journal of Chemical Education, Easton, PA., U.S.A., 1939, 470 s., pris i Sverige 4 dollar.

För den kemilärare som önskar belysa även männen bakom verket och krydda sin framställning med detaljer ur deras liv är föreliggande ståtliga bok en guldgruva. Den amerikanska kvinnliga kemiprofessor som författat densamma har efter imponerande källstudier och med bistånd från olika håll här lyckats framlägga en högst livfull skildring av grundämnenas upptäcktshistoria och därmed sammanhängande händelser samt av de män — och någon gång kvinnor — som härvid spelat framstående roller. Man läser boken som en spännande roman och avnjuter ej minst dess förstklassiga typografiska utstyrsel, i synnerhet som svenska vetenskapsmän ofta stå i främsta ledet. Av de cirka tjugu svenskarna återfinnas många även bland de mer än 300 illustrationerna, där dessutom ett flertal bilder från Stockholm och andra svenska orter väcka intresse. Facsimiler av brev med svensk text — som författarinnan ej alltid mäktat tyda trots svensk hjälp — locka även till begrundan. Boken avslutas med en kronologi som löper fram till år 1939.

Redan det faktum att arbetet på några få år utkommit i fyra alltmer utvidgade upplagor (första uppl. anmäldes i Elementa, *17*, 241, 1934) visar med vilket livligt intresse det mottagits och är rekommendation nog att det bör anskaffas till varje större kemisk institutions bibliotek.

E. Nordefeldt.

JULIUS KRUSE, *Praktische Übungen zur Chemie der Nahrungsmittel.* Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main 1936, 64 s., kr. 2: —.

Häftet innehåller en utförlig och preciserad handledning för eleverna vid ett trettiotal experimentella uppgifter av kvalitativ och kvantitativ art inom näringsmedlens kemi, omfattande äggvita, fett, kolhydrat, mjölk, smör, margarin, ost, kött, korv, mjöl, öl och dricksvatten, varvid de flesta uppgifterna beräknas fordra en dubbeltimme. Ehuru närmast avsedda för flickskolor äro åtskilliga av dem enligt undertecknads erfarenhet även lämpliga vid laborationer i realskolans avslutningsklass, varvid de visat sig användbara även vid enkeltimmar, om materialet iordningställes på förhand. Som boken även visat sig lämpad att sättas i våra gymnasisters händer vid enskilt arbete, varvid textens utförlighet gör att lärarens direkta ledning och övervakande kan i stor utsträckning bortfalla, rekommenderas den till inköp för skolornas kemiska bibliotek.

E. Nordefeldt.

R. SCHARF und H. GOLOMBECK, *Unsere Kleidung.* Verlag Otto Salle, Frankfurt am Main 1940, 68 s., kr. 4: 15.

Om man som ideal för ett enskilt arbete inom gymnasiet uppställer fordran att eleven härvid genom självständigt arbete skall införas i vetenskaplig forskningsform och samtidigt ställas inför en uppgift av värde för samhället — då är föreliggande häfte en utomordentligt lämplig handledning för eleven. Redan att den ene av författarna, dr Scharf, är ledare för avdelningen kemi vid den statliga centralanstalten för undervisning i Berlin och välkänd för sin uppslagsrika verksamhet som lärare garanterar att bokens detaljer äro tillförlitliga och väl utprövade. Den omfattar en rikhaltig och lockande samling noggrant beskrivna experiment samt teoretiska utredningar rörande framställning och analys av olika textilmaterial, speciellt konstsilke, spinning och vävning, framställning av ett dussin organiska färgämnen samt färgning av olika vävnader härmed enligt skilda metoder.

Undertecknad, som — några år innan boken utkom — vid skilda tillfällen låtit gymnasiets elever (även på latinlinjen) utföra enskilda arbeten inom hithörande områden, kan intyga att dessa arbetsuppgifter på det högsta intressera dem och giva vackra resultat, varför boken livligt rekommenderas till de kemilärare som önska en hög standard på sina elevers arbeten.

E. Nordefeldt.

Axel Bengtsson, *Varunamn och termer inom textilbranscherna.* Köpmannainstitutets skriftserie n:r 2. 1940, 64 s., kr. 1:—.

Häftet, som vill tjäna som uppslagsbok för köpmän och affärsmedhjälpare, innehåller en förklarande ordlista över drygt 300 textila varunamn och termer, huvudsakligen omfattande tyger och andra vävnader, klädesplagg m. m. men även kemisk-tekniska uttryck.

Så långt anmälarens kompetens sträcker sig synas de sakliga uppgifterna och förklaringarna vara korrekta. Dock är kresol ej detsamma som karbolsyra, termerna stapelfas och stapelfiber torde ej användas i pluralis, ordet viskos härstammar ej från engelskan utan från latinet, vistra kommer ej från tyskan utan är ett konstgjort ord, bildat genom sammanslagning av delar ur tvenne samarbetande bolags telegramadresser: Sivispacem och Astra. Bortsett från att dessutom ett 20-tal språkliga felaktigheter, speciellt vid de franska termerna, misspryda framställningen, torde häftet för den avsedda läsekretsen vara av nytta och fylla ett behov.

E. Nordefeldt.

O. Ant-Vuorinen och A. Nordström, *Elementarlärobok i kemi för sjuksköterskor.* Natur och Kultur, Stockholm 1941. 143 sid., pris häftad kr. 4:50.

Otvivelaktigt är det ett berättigat önskemål, att sjuksköterskor hava ett visst, icke så obetydligt mått av kemisk utbildning, särskilt nödvändig för de på sjukhuslaboratorierna sysselsatta. Ovannämnda arbete torde innehålla det, som alla sjuksköterskor borde veta; huruvida det räcker som förberedelse för laboratoriearbete, är en sak, som undandrager sig recensentens bedömande. Det stora antalet enkla försök, som äro inlagda i texten, tyder på att utbildningen delvis sker i form av elevernas egna praktiska övningar, givetvis en god sak. Så vitt man kan förstå, synes arbetet vara väl lämpat för sitt ändamål.

G. Starck.

Bonniers Konversationslexikon, band IV, Sthlm 1940, kr. 18:50.

Detta fjärde band omfattar *Doppler—Flamugn* och upptager 1456 spalter. Bland de naturvetenskapliga artiklar, som främst äro av intresse att här granska, må nämnas: *Dopplereffekt, Dubbelbrytning* (med god illustration), *Dämpning, Ebb och flod, Ekolodning, Elektricitet* och hithörande artiklar, *Elektrokemi, Elektronmikroskop, Elektronrör* (utförlig), *Elverk* (bra att låta ordet bli uppslagsord!), *Energi* (»förmåga att utföra arbete»), *Felkalkyl, Fett.* En liten anmärkning må kunna framställas mot den anförda definitionen på *energi,* som snarare får anses höra hemma inom psykologien än inom fysiken. I artikeln *effekt* läses för övrigt: »äldre benämning arbetsförmåga». — Som helhetsomdöme kan sägas, att framställningen är klar, koncis och väl avvägd, baserad på fakta och teorier ur den senaste tidens forskning.

J. Tandberg.

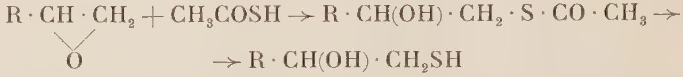
Gradualavhandlingar.[1]

Bertil Sjöberg, *Über Thioglycerine und einige verwandte Schwefelverbindungen.* Lund 1941, 122 s. Disp. i Lund den $^{8}/_{5}$ 1941. Opponenter: docent Birger Adell och fil. mag. Tage Bergkvist.

I avhandlingens preparativa del behandlas ett antal svavelhaltiga propanderivat. Sålunda beskrives till en början framställningen av α-monotioglycerin och dess acetonföreningar samt de båda isomera α, β- och α, γ-ditioglycerinerna. Därefter följer beskrivningen av framställningen och egenskaperna av några andra svavelhaltiga propanderivat: γ-klor-β-oxypropylmerkaptan (tioklorhydrin), oxytrimetylensulfid, γ- och β-oxypropylmerkaptan och dess acetonföreningar samt γ- och β-klorpropylmerkaptan. Vid de utförda synteserna av merkaptanerna ha ett flertal olika syntesmetoder kommit till användning. Förutom genom den kända metoden att omsätta en halogenförening med alkalisulfhydrat har merkaptanerna framställts genom omsättning av halogenförening med kaliumtioacetat, genom addition av tioättiksyra till dubbelbindning och genom addition av svavelväte till etylenoxidring. Helt ny är en metod att addera tioättiksyra till etylenoxidring och sedan avspjälka acetylgruppen genom alkoholys:

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.



$$R\cdot \underset{\diagdown O \diagup}{CH\cdot CH_2} + CH_3COSH \rightarrow R\cdot CH(OH)\cdot CH_2\cdot S\cdot CO\cdot CH_3 \rightarrow R\cdot CH(OH)\cdot CH_2SH$$

Vid den som mellanprodukt erhållna acetylerade merkaptanen iakttogs en spontant inträdande vandring av acetylgruppen från α- till β-ställning. De båda isomererna kunde isoleras och deras fysikaliska egenskaper bestämmas.

Samtliga föreningar ha framställts i möjligaste rent tillstånd och en utförlig bestämning av deras fysikaliska egenskaper har genomförts. Sålunda har för varje substans fastställts kokpunkt, täthet och brytningsindex. I de flesta fall har även mätning av ljusabsorption och dipolmoment utförts. För ett par av merkaptanerna har den termodynamiska dissociationskonstanten bestämts och för de klorhaltiga merkaptanerna även sönderfallshastigheten i alkalisk lösning.

Bestämningen av ljusabsorptionen har utförts med en liten kvartsspektrograf, som tillåtit mätningar i lösningar ned till en våglängd av 1850 Å. Extinktionskurvorna visade karakteristiska band för svavelatomen, och dessa bands läge och höjd voro beroende av konstitutionen. På grund härav har det varit möjligt att genom ljusabsorptionsmätningar i ett par osäkra fall fastställa konstitutionen. Genom de utförda mätningarna har en grund lagts för fortsatt forskning inom detta föga undersökta område.

Dipolmätningarna ha förutom karakteriserande fysikaliska konstanter givit upplysningar om molekylstruktur och vridbarhet inom molekylerna. Relativt stor vridbarhet har påvisats hos molekyler innehållande endast hydroxyl- och sulfhydrylgrupper. Närvaro av halogen visade sig starkt begränsa den fria vridbarheten inom molekylen.

Genom de utförda fysikaliska mätningarna har en utförlig karakteristik lämnats av de svavelföreningar, vars framställning finnes beskriven i denna i huvudsak preparativa avhandling.

Karl-Johan Karlsson, *Zur Thermochemie einiger chlor- und jodhaltiger Benzolderivate.* 112 s. Ph. Lindstedts Univ.-bokhandel, Lund. Disp. i Lund 10 maj 1941. Opponenter: laborator Edmund Schjånberg och amanuens Stig Sunner.

I föreliggande avhandling ha bildningsvärmena för ett 40-tal halogenhaltiga disubstituerade bensolderivat bestämts, varefter förf. med hjälp av detta material undersökt dels i vilken utsträckning additivitet råder för ifrågavarande ämnens bildningsvärme, dels sambandet mellan å ena sidan bildningsvärmet och å den andra substituenternas inbördes läge vid isomera föreningar (orto-, meta- och para-ställning). Den ena av substituenterna har alltid varit klor eller jod.

Genom kombinerade förbrännings- och sublimationsvärmebestämmningar ha bildningsvärmena för de fria molekylerna beräknats. — De klorhaltiga ämnenas förbränningsvärmen ha bestämts genom den av Smith föreslagna och gemensamt med Schjånberg utarbetade kvartsullmetoden. Beträffande de jodhaltiga föreningarna har förf. visat, att ett definierat sluttillstånd (fri fast jod) erhålles vid förbränning i bomb vid 25 kg syrgastryck och att goda värden erhållas.

På grund av undersökningens natur måste de ifrågavarande ämnena föreligga i ett synnerligen rent tillstånd (99,95 %), varför stora krav ställts på den analytiska noggrannheten. Genom att efter förbränningen i bomben uppsamla och titriometriskt bestämma jodmängden har förf. lyckats erhålla tillräckligt noggranna analyser även för jodföreningarna.

De för teoretiskt utnyttjande av förbränningsvärmena nödvändiga sublimationsvärmena ha erhållits medelst en apparatur, vars princip är följande: Ett litet glasrör, 30 mm långt och 8 mm tjockt, är tillslutet i båda ändar. Glasröret har på mitten ett hål, avsett för en med hake försedd kork. En kvartstråd, 7 cm lång och 1/100 mm i diameter, är i båda ändar försedd med små hakar. Kvartstrådens ena hake är fixerat upphängd, den andra fastgöres vid glasröret genom haken i korken. Vi ha sålunda ett torsionssystem med röret i horisontellt läge. På glasröret finnes två små hål, diameter c:a 0,2 mm, anbragta på var sin långsida några mm från vardera ändan. Hålen ligga i samma horisontalplan. Substans placeras i röret, varefter torsionssystemet anbringas i högvakuum ($3 \cdot 10^{-6}$ mm Hg). På grund av det låga lufttrycket komma en del av ämnets molekyler att rusa ut genom de små hålen i glasröret, varför systemet vrides en viss vinkel, som avläses; vidare avläses temperaturen. Systemet är nedsänkt i en termostat, vars temperatur nu ändras, härvid erhålles en ny vridningsvinkel. En serie på 8—10 sammanhörande vridnings- och temperaturvärden upptagas, varefter sublimationsvärmet lätt beräknas medelst Clausius-Clapeyrons formel. För ämnen, vars ångtryck vid rumstemperatur är 10^{-2}—10^{-4} mm Hg, kan medelst denna apparatur sublimationsvärmet bekvämt bestämmas. Principen är angiven av Volmer.

De undersökta ämnena äro: o-m- och p-klortolnol, o-m- och p-klorbensoesyra, o-m- och p-klorfenol, o-m- och p-klorbensaldehyd, o-m- och p-diklorbensol, α- och β-klornaftalin och klorbensol samt motsvarande föreningar, där klor utbytts mot jod.

Vid behandlingen av det experimentella materialet visade det sig, att de undersökta ämnenas atomära bildningsvärmen, som ju äro ett direkt mått på molekylens totala energiinnehåll, med stor noggrannhet kunde infogas i ett additivt schema, ungefär som molekularrefraktionen. Beträffande relationen mellan bildningsvärmet å ena sidan och substituenternas inbördes läge vid isomera föreningar å den andra kunde intressanta samband mellan substituenternas elektriska laddning och den inbördes placeringen i många fall konstateras. Vidare ha värmetoningarna och de maximala arbetena för en del viktigare reaktioner beräknats och diskuterats ur konstitutiva synpunkter.

V. Hugo Sanner, *Die K-Emissions- und Absorptionsspektren der Elemente Kalium bis Kupfer und einiger ihrer Oxyde,* Uppsala 1941, 96 s. Disp. vid Uppsala Universitet 1 mars 1941. Opponenter: docent B. Edlén och fil. mag. Å. Nilsson.

Undersökningen är en allmän översyn av våglängdsvärdena för K-diagramlinjerna och K-absorptionsspektra hos elementen 19 K till 29 Cu, d. v. s. elementen i den tredje fullständiga horisontalraden i det periodiska systemet, med särskild hänsyn tagen till inverkan av elementets kemiska bindning med syre.

Den viktigaste delen av undersökningen har utförts med en konkavkristallspektrograf enligt Johann-metoden. Det har visat sig, att det inte är nödvändigt att använda kristallernas naturliga spaltytor, utan att det går lika bra med skurna och polerade ytor. Detta har varit av stor betydelse för denna undersökning, ty då det undersökta våglängdsområdet är 1375—3500 X. E. och då glansvinkeln vid ifrågavarande metod inte bör vara mindre än 25°, måste kristaller med mindre gitterkonstant än de vanligen brukliga användas. Lämpliga kristaller äro topas, skuren parallellt med 101-planet, och kvarts, skuren parallellt med 0001-planet. Dessa plan äro inte naturliga spaltytor. Ifrågavarande kristallers små gitterkonstanter, 1353 och 1798 X. E. resp., och den relativt stora krökningsradie, 1 m, som använts, har gjort, att dispersionen varit mycket stor, svarande mot 1,5—3 X. E./mm. Härigenom har möjliggjorts iakttagandet av en hel del intressanta detaljer.

Röntgenröret var så konstruerat, att det kunde användas som sekundärrör, då emissionslinjer upptogos, och som primärrör, då absorptionsspektra upptogos. Röret var vidare så konstruerat, att emissionslinjerna från det rena elementet och dess oxid kunde upptagas på samma plåt, så att även mycket små förskjutningar av linjerna på grund av den kemiska bildningen med säkerhet kunde konstateras.

Det visade sig då, att förskjutningar av linjerna kunde iakttagas i långt större utsträckning än man tidigare trott vara fallet. Dessa förskjutningar bli ju mindre och mindre ju högre upp man kommer i atomnummer. Förskjutningar i $K\alpha_{1,2}$-dubletten kunde nu mätas upp till 25 Mn, i $K\beta_1$-linjen till 27 Co och i $K\beta_5$-linjen till 28 Ni. Dessa förskjutningar äro visserligen inte så stora, 0,1 — 0,4 X. E. för $K\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$-linjerna och 0,2 — 1,6 X. E. för $K\beta_5$-linjen, men ändock av stor betydelse att känna, då de bästa precisionsmätningarna av dessa linjer göra anspråk på en c:a 10 gånger så stor noggrannhet. Genom en särskild undersökning kunde också konstateras, att dessa element i ett primärrör ofta oxideras mer eller mindre fullständigt. Då dessa linjer särskilt ofta användas som referenslinjer, är det av vikt att känna till det osäkerhetsmoment, som på detta sätt inträder.

Absorptionsgränsen visade sig genomgående bestå av flera kanter. Sålunda hade elementen 19 K till 23 V tre kanter och elementen 24 Cr till 29 Cu två kanter. Den långvågigaste av dessa kanter bör betecknas som huvudkant. Genom den större noggrannhet, varmed denna kant nu kunde mätas, möjliggjordes en mycket intressant jämförelse mellan kanten och den kortvågiga gränsen för motsvarande $K\beta_5$-linje. Enligt metallernas elektronteori bör nämligen för de flesta av de undersökta elementen dels $K\beta_5$-linjen för det rena elementet mot kortvågssidan begränsas av en kant, medan samma linje för oxiden bör vara mera symmetrisk, dels bör kortvågskanten hos $K\beta_5$-linjen och huvudkanten för K-absorptionen för det rena elementet sammanfalla. Båda dessa saker kunde vackert påvisas.

Den finstruktur, som beledsagar K-absorptionskanten, har också undersökts. Särskilt kunde för många av oxiderna påvisas 1 — 3 vita absorptionslinjer på huvudkantens långvågssida. De rena elementen ge inte upphov till sådana linjer. Var ursprunget till dessa vita linjer är att söka, är ännu inte fullt klarlagt.

Föredrag för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1940—1941.[1]

Göteborg: lektor S. Friberg, Experimentell behandling av vissa delar av elektricitetsläran och optiken; adjunkt J. Lundberg, 1) Det kemiska laboratoriets inredning och skötsel, 2) Demonstrationsexperiment vid kemiundervisningen; lektor A. Wahlund, Numerisk noggrannhet.

---

[1] Uppgifterna ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska byrå.

Lund: lektor A. Leide, 1) Laborationer i fysik på gymnasiet, 2) Projektion som hjälpmedel vid fysikaliska demonstrationer; lektor B. Svensson, 1) Om metodiken vid införandet av logaritmer, 2) Om geometriundervisningen (spec. i realskolan).

Stockolm: lektor E. Nordefeldt, 1) Historiska synpunkter och detaljer som stimulans i kemikursen, 2) Ledandet av elevernas kemiska laborationer; adjunkt B. Wahlström, 1) Realskolans kurs i optik, 2) Om bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten som arbetsövning; adjunkt S. Åstrand, Gymnasiets stereometrikurs.

Uppsala: lektor G. Bolinder, Om undervisningen i matematik på gymnasiet; adjunkt P. Granath, Om läroverkets lokaler för undervisning i fysik i realskolan; lektor B. Hedenstedt, Om läroverkets lokaler för undervisning i fysik i gymnasiet och Om undervisningen i fysik på gymnasiet; adjunkt J. Palmgren, Om läroverkets lokaler för undervisning i kemi.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift, 1941: 5—7.

Ur innehållet: G. Hägg, Holmiums atomvikt; R. Nilsson, Några kapitel ur mikrobiologiens utvecklingshistoria; G. Ehrensvärd och D. Cheesman, Specific phenomena at liquid/liquid interfaces; H. Arnfelt, Om kiseldioxid och närsläktade oxidtyper. Referat av föredrag vid Sveriges Kemiska Industrikontors årsstämma 24. 4. 1941: Möjligheter för organisk-kemisk industri i Sverige, Träkolningsindustrien, Civila tillverkningar vid AB. Bofors, Sulfitsprit som råvara för organisk-kemisk industri, Konsthartser, Gasverken som råvaruproducenter åt den organisk-kemiska industrien.

Sjunde häftet har fått formen av en festskrift tillägnad Bror Holmberg på sextioårsdagen den 30. 7. 1941. Bland tjugutalet uppsatser kunna här endast nämnas några: L. Forsén, Über die Basizität des Chlorkalks; K. Myrbäck, Die Konstitution der durch Reversion aus Glukose gebildeten sog. Isomaltose; O. Stelling och G. Frang, Om alkali-, meta-, pyro- och polyfosfater; O. Svanberg, De kemiska stationernas nuvarande organisation och utveckling; A. Tiselius, Stationary electrolysis of ampholyte solutions; A. Ölander, Om fixering och sköljning av fotografiskt material.

Teknik för alla, 1941: 22—35.

Ur innehållet: Avancerad flygning förr och nu; Kallgjutning; Våra skifferoljeverks möjligheter; Laddning av elektriska ackumulatorer; Skydd mot gengasen; Television; Hjulets historia; Konstruktionsprinciper för moderna elbilar; Hur flygmaskinmotorer startas; Foto-exponeringsmätare; Sveriges första U-båt; Ingenjörskonstens mästerverk; Stereofonisk upptagning; Axeldrift. Under rubriken »Händigt folk»: Hur man försilvrar speglar; Balansvåg; Störningsfri radio; Tredimensionell fotografering; Hur man gör en kompressor; Solljuslampa; Morse-övning; Centrifugalpumpen.

Flygning, 1941: 11—16.

Ur innehållet: Luftmakterna; Tvåtaktsmotorn som flygmotor; Radiosonden och dess användning; Torra och våta termometern som molnhöjdsmätare; Hydrauliska anläggningar på moderna flygplan; Flygplantankar av alumin; Flygradio för privatflygare; Flygplanens behandling för övergång till spritbränsle. Mannen bakom de engelska flygmotorerna.

(Forts. på s. 176.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1175) *Vilken cirkel skär var och en av tre cirklar i rymden i två punkter?* N. J.

1176) *Sök orten för mittpunkten av det mellan koordinataxlarna belägna stycket av en tangent till cirkeln* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. *Studera specialfallen: 1:o* $a=b=0$, *2:o* $a=r$; $b=0$; *3:o* $a=b=r$. *Lwl.*

1177) *I en cirkel drages en korda KL; A och B äro fasta punkter på den ena bågen, P en rörlig punkt på den andra. Linjerna PA och PB avgränsa sträckan XY på KL. Konstruera P så, att XY blir maximum.* X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1178) Bestäm det minsta tolvsiffriga talet, som är en jämn kvadrat.

Svar: 100 000 147 984. Ledning: $\sqrt{10^{11}}$ beräknas t. o. m. heltalsdelens sista siffra, som tages en enhet för hög.

1179) Ekvationen $x^3-3x+1=0$ har rötterna x_1, x_2 och x_3. Vilka rötter har då ekvationen $\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}=0$?

Svar: ± 1.

1180) Ekvationen $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2+x^2+\frac{3x^2+3x}{2x-1}=2$ är given. Beräkna de båda värdena av $z=x+\frac{x+1}{2x-1}$.

Svar: 1 och $-1{,}5$.

1181) För vilka värden på k kan kvadraten på summan av den konvergenta oändliga serien $a+ak+ak^2+\ldots\ldots$ skrivas som en ny oändlig geometrisk serie med första termen $=a^2$?

Svar: $1-\sqrt{2}<k<1$.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1178—1180, 1185—1186 äro insända av *X.*, 1181—1184, 1187—1188 av *T. Edqvist*, 1189 av *E. Smn.*

1182) I en cirkelsektor OAB är radien $= 20$ cm; höjden från medelpunkten O mot kordan AB är 15 cm. Beräkna radien i den cirkel, som kan inskrivas i den figur, som begränsas av bågen AB, radien OB och normalen från A mot OB.

Svar: 7,5 cm.

1183) Tangenterna för en triangels vinklar förhålla sig till varandra som talen $\sqrt{0{,}75}$, 1,5 och $1{,}5+\sqrt{3}$. Beräkna vinklarna.

Svar: 45°, 60° och 75°.

1184) De cirkelytor som begränsa en klotskiva, ha båda radien 15 cm. Klotskivans tjocklek är 30 cm. Genom två meridianplan, som bilda 45° med varandra, utskäres ur klotskivan ett parti i form av en kil, vars egg sammanfaller med klotskivans axel. Beräkna det utskurna partiets totala yta.

Svar: $\frac{1}{4}[1800+\pi(1125+450\sqrt{2})]=1833$ cm².

1185) Diagonalvinkeln i ett regelbundet femsidigt hörn är 60°. Beräkna sidovinkeln.

Svar: 36°.

1186) Av en liksidig kon behålles bascirkelns omkrets och en med denna orubbligt förbunden generatris. Hur stor yta överfar bascirkeln vid rotation kring generatrisen, om konens sida är s?

Svar: πs^2.

1187) En triangel har ett hörn i punkten (3; 0). Två av medianerna falla utefter koordinataxlarna, den tredje utefter linjen $y=x$. Beräkna triangelns yta.

Svar: 13,5 ytenheter.

1188) En liten kula fixerades på ett horisontellt papper och en på papperet ställd parallellepipedisk metallklots fick tangera kulan i tre olika lägen. För varje läge ritades den tangerande metallytans skärningslinje med papperet. De erhållna linjerna må betecknas med L_1, L_2 och L_3. Om man valde L_1 till x-axel och skärningspunkten mellan L_1 och L_2 till origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, befunnos koordinaterna (uttryckta i mm) för en viss punkt på L_2 vara (20; 80) samt för koordinaterna för två punkter på L_3 vara resp. (60; —50) och (—60; 70). Beräkna kulans radie.

Svar: 2,7 mm.

1189) I en likbent spetsvinklig triangel ABC dragas höjderna, vilka skära sidorna i A_1, B_1 och C_1. Bestäm maximivärdet av förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC. Beräkna vinklarna i triangeln ABC, om förhållandet är $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Svar: $\frac{1}{4}$ (för alla spetsvinkliga trianglar); toppvinkeln 45° eller 72°,96.

Lösn. till uppg. 1147—1149.

1147) *Om en triangels hörn speglas i motstående sidor, bilda spegelbilderna en liksidig triangel. Beräkna den ursprungliga triangelns vinklar.* *X.*

Triangeln måste ha två lika vinklar. ABC är en likbent triangel med basen $AC = 2b$ och vinkeln $B = 2v$. A_1 och B_1 äro de genom spegling av A resp. B uppkomna hörnen i en liksidig triangel. Om höjden från B är a och vinkeln AA_1B_1 är u, erhålles $\operatorname{tg} v = \frac{b}{a}$ och $\operatorname{tg} u = \frac{AB_1}{AA_1} = \frac{a^2 + b^2}{4ab}$, vilket ger $\operatorname{tg} u = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 v}{4 \operatorname{tg} v}$. Men $u + v = 60°$, om A och A_1 ligga på var sin sida om BB_1. Alltså är $\operatorname{tg}(u+v) = -\sqrt{3} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v} = \frac{1 + 5 \operatorname{tg}^2 v}{3 \operatorname{tg} v - \operatorname{tg}^3 v}$, varav $\sqrt{3} \operatorname{tg}^3 v + 5 \operatorname{tg}^2 v - 3\sqrt{3} \operatorname{tg} v + 1 = 0$ eller $(\sqrt{3} \operatorname{tg} v - 1)(\operatorname{tg} v + \sqrt{3} - 2)(\operatorname{tg} v + \sqrt{3} + 2) = 0$, som ger $v = 30°$ och $15°$.

Om A och A_1 ligga på *samma* sida om BB_1, är $u + v = 120°$. Ekvationen ger då $\operatorname{tg} v = 2 + \sqrt{3}$ och $v = 75°$. Triangeln är alltså antingen liksidig eller likbent med vinklarna 75°, 75° och 30° eller 15°, 15° och 150°. *E. Smn.*

Även löst av *David Hjelle.*

1148) *Att konstruera en fyrhörning, då sidornas längder äro givna och två närbelägna vinklar skola vara lika stora.* *S. B.*

I fyrhörningen $ABCD$, där $AB = l$, $BC = m$, $CD = n$ och $DA = r$, skall $\wedge C$ vara $= \wedge D$. Vi upprita två cirklar med radierna m och r samt medelpunktsavståndet $A_1B_1 = l$. En gemensam (yttre) tangent skär A_1B_1 i likställighetspunkten P. Genom tangeringspunkterna A_2 och B_2 lägges en hjälpcirkel O, vars diameter $\geq n$. Genom P drages en sekant PC_0D_0, vars inom O belägna del är n. En cirkel med P som centrum och PC_0 som radie skär cirkeln B_1 i C_1; PC_1 skär cirkeln A_1 i den antihomologa punkten D_1. Enl. kända satser är $PC_1 \cdot PD_1 = PB_2 \cdot PA_2 = PC_0 \cdot PD_0$; $\because C_0D_0 = C_1D_1 = n$. Då därjämte $\wedge PC_1B_1 = 180° - \wedge PD_1A_1$, är fyrhörningen $A_1B_1C_1D_1$ den sökta.

Konstruktionen avser konvex lösning. *X.*

Även löst av *E. Smn* och *D. Hjelle.*

1149) *Hur skall ett rektangulärt bord placeras i ett rektangulärt rum, vilket icke är så mycket större än bordet, för att man skall komma lättast fram runt bordet?* *N. J.*

Det gäller att bestämma det läge hos bordet $ABCD$ i rummet, $EFGH$ ($AB > BC$, $EF > FG$) för vilket bordets avstånd till närmaste vägg är störst. Detta läge uppnås, när rummets och bordets centra, O, sammanfalla, om bordet och rummet åskådliggöras genom rektanglar i samma plan. Om i sådant läge bordets kortända vetter mot rummets långända, blir det ju trängre än om kortändan vetter mot rummets kortsida. Bordet vrides från utgångsläget ($\overrightarrow{AB}$ parallell och närmast $\overrightarrow{EF}$) en vinkel $v = \wedge BOC$, så att C intar B:s plats. Om därvid B efter slutad vridning kommer närmare intill EF än C intill FG, utgör utgångsläget den begärda lösningen. I annat fall är det sökta läget det, där avstånden från B till EF, från C till FG, från D till GH och från A till EH alla äro lika. I gränsfallet gälla båda lösningarna. Till varandra symmetriska lägen lösa samtidigt problemet. Detta synes sålunda. Under vridningen röra sig hörnen utefter en cirkel. Då $v < 90°$, minskas hörnets C avstånd till FG för att via ett minimum $\left(\text{vridningen} = \frac{v}{2}\right)$ växa till utgångsläget, medan B:s avstånd till EF även avtager, men icke tidigare än det andra avståndet passerar sitt minimum och på sin höjd hinner upp till sin utgångsstorlek. På grund härav gäller det första påståendet. Vrides däremot bordet över ett resterande vinkelområde, avtager B:s avstånd till EF, medan C:s avstånd till FG ökar. Då kan inom detta område maximum erhållas endast i ett mellanläge, där dessa avstånd äro lika. För att erhålla villkoret för fall 2, vrid $ABCD$ på det där stipulerade sättet, drag $IJ \parallel EF$ genom A, $JK \parallel FG$ genom B, $KL \parallel GH$ genom C, $LI \parallel HE$ genom D. Då är $\frac{a^2-b^2-2ab}{a^2+b^2} = \cos^2\frac{v}{2} - \sin^2\frac{v}{2} - 2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2} =$ $= \cos v - \sin v = \frac{AJ-JB}{AB} = \frac{BK-KC}{BC} = \frac{CL-LD}{CD} = \frac{DI-IA}{DA} =$ $= \frac{IJ-JK+KL-LI}{AB-BC+CD-DA} > \frac{e-f}{a-b}$, om $AB=a$, $BC=b$, $EF=e$, $FG=f$.

N. J.

Anm. Om bordets diagonal är d, erhålles villkoret även så:

$$f - d\sin\frac{3v}{2} > e - d\cos\frac{v}{2},\ \text{varav}$$

$$d\left[\cos\left(90° + \frac{3v}{2}\right) + \cos\frac{v}{2}\right] > e - f\ \text{eller}$$

$$2d\cos\left(45° + \frac{v}{2}\right)\cos(45° + v) > e - f\ \text{eller}$$

$$(a-b)(\cos v - \sin v) > e - f,\ \text{då ju}$$

$$d\cos\frac{v}{2} = a\ \text{ och }\ d\sin\frac{v}{2} = b.$$

Red.

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1941.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Bestäm värdet på z ur ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4y^2 - 9x^2 + 5 = 0, \\ y - x - 2 = 0, \\ z = \dfrac{\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y}\right)(2y + 3x)}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} \end{cases}$$

2. I en geometrisk serie är summan av de fyra första termerna $= 26$ och summan av andra och tredje termerna $= -5$. Sök första termen och kvoten.

3. Vinkeln A i triangeln ABC är $43^\circ{,}30$, vinkeln B $27^\circ{,}39$. På BC väljes en punkt D, så att vinkeln DAC blir 30°. Sök förhållandet mellan ytorna av trianglarna BAD och CAD.

4. Två cirklar, vilkas radier äro 5,2 cm och 2,8 cm, skära varandra, så att tangenterna i en av skärningspunkterna bilda en vinkel av $58^\circ\,15'$. Beräkna avståndet mellan cirklarnas medelpunkter. (Endast ett av de två möjliga fallen behöver behandlas.)

5. I en triangel ABC, där vinkeln A är spetsig, drages höjden CD mot sidan AB. De tre sträckorna BD, AD och CD bilda en geometrisk serie. Radien i den kring triangeln ACD omskrivna cirkeln är $\frac{1}{3}$ av BD. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.

6. Av två koncentriska cirklar har den ena dubbelt så stor radie som den andra. En korda AB i den större cirkeln tangerar den mindre. Två radier i den större cirkeln dela AB i tre lika stora delar. I vilket förhållande dela dessa radier det mindre av de cirkelsegment, som AB avskär av den större cirkeln?

7. I triangeln ABC drages parallellt med BC en linje DE, som skär triangelns övriga sidor i D och E. Ytorna av trianglarna ADE och ABC förhålla sig till varandra som $2:3$. Beräkna förhållandet mellan ytorna av triangeln CDE och fyrhörningen $BCED$.

8. I en triangel ABC är $AB : AC = 5 : 3$. I den kring triangeln omskrivna cirkeln drages en korda parallellt med BC. Hälften av kordan ligger inom triangeln. Vilket är förhållandet mellan de delar av kordan, som ligga utanför triangeln?

Resultat: 1. $-2{,}5$. 2. Första termen och kvoten äro resp. $-\frac{1}{4}$ och -5 eller $\frac{125}{4}$ och $-\frac{1}{5}$. 3. $0{,}9438$. 4. $7{,}086$ cm eller $4{,}422$ cm. 5. Vinklarna A, B och C äro resp. $30°$, $18°{,}43$ och $131°{,}57$. 6. $1 : \frac{2\pi - \sqrt{3}}{\pi - \sqrt{3}} : 1 = 1 : 3{,}229 : 1$. 7. $\sqrt{6} - 2 = 0{,}4495$. 8. $\frac{16 + \sqrt{481}}{9} = 4{,}215$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. I en rät cirkulär kon, där bottenytans radie är 6 cm och höjden 8 cm, är ett klot inskrivet. Detta tangeras av ett plan, som är parallellt med konens bottenyta. Sök förhållandet mellan volymerna av den avskurna toppkonen, klotet och hela konen.
2. I skärningspunkterna mellan den räta linjen $x + y = 3$ och kurvan $x^2 = 4y$ dragas tangenterna till kurvan. Sök skärningspunkten mellan dessa tangenter.
3. Summan av alla termerna i en geometrisk serie med kvoten 2 är 381; summan av de två sista termerna är 288. Vilken är serien?
4. En triangels vinklar äro A, B och C. Visa, att om $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ och $\cot\frac{C}{2}$ bilda en aritmetisk serie, så är $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$.
5. En skuld på 12 000 kr skall amorteras under 20 år på så sätt, att vid slutet av vart och ett av femte, tionde, femtonde och tjugonde åren efter lånets upptagande inbetalas 3 000 kr och vid slutet av vart och ett av de 20 åren dessutom en viss summa. Hur stor blir denna, om räntefoten är 5 %?
6. I triangeln ABC förhåller sig vinkeln B till vinkeln C som $2 : 3$. Från A dragas bissektrisen och medianen till den motstående sidan. Avståndet mellan deras skärningspunkter med sidan BC utgör $\frac{1}{14}$ av denna sidas längd. Bestäm triangelns vinklar.
7. I en regelbunden tresidig pyramid förhåller sig en sidokant till en baskant som $3 : 2$. Bestäm vinkeln mellan en sidokant och basytan samt vinkeln mellan en baskant och en av sidoytorna.
8. Ett mosaikmönster består av regelbundna kongruenta månghörningar. Varje linje i mönstret utgör sida i två månghörningar. Varje hörnpunkt i mönstret utgör hörn i de månghörningar, som där sammanstöta. Undersök, hur många dylika mönster som äro möjliga, och angiv deras beskaffenhet.

Resultat: 1. $1 : 24 : 64$. 2. $x = -2$; $y = -3$. 3. Serien är 3, 6, 12, ... 192. 5. $420{,}1$ kr. 6. Vinklarna A, B och C äro resp. $41°{,}76$;

$62^\circ{,}64$ och $75^\circ{,}60$. **7.** Vinklarna äro resp. $67^\circ{,}36$ och $57^\circ{,}98$. **8.** Liksidiga trianglar, kvadrater och regelbundna sexhörningar. Uppgiften kan lösas genom ett rationellt, enkelt resonemang ang. möjliga vinklar. Lösningen kan också ges följ. form. Sättes månghörningarnas sidantal $= n$ och antalet vinklar i varje hörn $= m$, så gäller tydligen $m\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = 360^\circ$, som ger $n = 2 + \frac{4}{m-2}$; m och n måste vara hela, positiva tal $\geqq 3$; $m - 2$ kan då endast antaga värdena 1, 2 och 4, som motsvara n-värdena 6, 4, 3.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Från vilka punkter på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 6$ synes avståndet mellan ellipsens brännpunkter under en vinkel av 60°?
2. Bestäm första derivatan av funktionen $\frac{\sin^2 3x}{\cos^3 2x}$ samt de värden på x, för vilka derivatan blir $= 0$.
3. Bestäm ekvationen för den parabel, som har sin axel längs x-axeln och tangerar hyperbeln $3x^2 - y^2 = 3$ i ändpunkterna av dess parameter genom högra brännpunkten.
4. En cirkel går genom ändpunkterna av parametrarna till en hyperbel. Den spetsiga vinkeln mellan tangenterna till cirkeln och hyperbeln i en av skärningspunkterna är 60°. Beräkna hyperbelns excentricitet.
5. P är en godtycklig punkt på parabeln $y^2 = 4ax$; F är parabelns brännpunkt; A styrlinjens skärningspunkt med axeln. Förlängningen av linjen PF skär vertextangenten i Q. Sök orten för skärningspunkten mellan linjen PA:s förlängning och den linje genom Q, som är parallell med axeln.
6. Konstruera kurvan $y = \frac{x^2 - 6}{x^3 - 4x}$, och angiv eventuella asymptoter samt maximi- och minimipunkter.
7. Vilket av alla sfäriska segment med konstant total yta ($= \pi k^2$) har den största höjden, och vilket har den största volymen?

Resultat: **1.** Från de fyra punkterna (± 2; ± 1). **2.** Derivatan $= \frac{6 \sin 3x \cdot \cos x}{\cos^4 2x}$ blir $= 0$ för $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$ och $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$. **3.** $y^2 = 12x - 15$. **4.** Om den spetsiga vinkeln mellan tangenterna är α, är excentriciteten $= \sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha}$; för $\alpha = 60^\circ$ är den alltså $= \sqrt[6]{3} = 1{,}201$. **5.** Orten är den liksidiga hyperbeln $(x + a)^2 - y^2 = a^2$. **6.** Asymptoterna äro: $x = 0$; $x = \pm 2$; $y = 0$. Maximipunkter: $\left(2\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ och $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; minimipunkter: $\left(-2\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ och $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. Origo är medelpunkt för kurvan. **7.** I båda fallen ett klot med diametern k. Att klotet har den största höjden erhålles enklast utan derivering. Om höjden är h och klotets och basytans radier resp. R och r, är $r^2 = 2Rh - h^2$ och enl. förutsättningen $r^2 + 2Rh = k^2$, varav $h^2 = k^2 - 2r^2$. Härur framgår, att h har sitt största värde $= k$ för $r = 0$, d. v. s. då höjden är lika med klotets diameter.

Uppgifter i fysik.

Obs. 1. Lösningarna till uppgifterna nr 2, 3, 5, 6 och 7 böra åtföljas av enkla figurer.

Obs. 2. Erforderliga konstanter, vilka ej äro upptagna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En hiss är konstruerad så, att den normalt får en hastighet av 0,70 m/sek och därvid lyfter en last om 300 kg. Maskineriet drives av en likströmsmotor för 220 volt. Beräkna strömstyrkan i motorn under antagande, att 80 % av den tillförda elektriska energien utnyttjas för lyftande av lasten. Då hisskorgen uppväges av en motvikt, behöver ingen hänsyn tagas till densamma.
2. För att åstadkomma en pyramid av plåt utklipper man ur en tunn, jämntjock plåt en figur bestående av en kvadratisk basyta (sidan $= a$) och fyra på sidorna stående liksidiga trianglar. Plåten hopvikes därefter till en pyramid. Hur långt från basytan ligger denna kropps tyngdpunkt?
3. På ett lutande plan, som bildar 30° vinkel med horisontalplanet, ligger en homogen trärulle, som har form av en rät cirkulär cylinder med 14 cm höjd och 6 cm diameter. Rullen väger 300 g. I två punkter på samma generatris, 1 cm från vardera basytan, äro ändarna av ett 24 cm långt snöre fästade. Trärullen drages med konstant hastighet rätt uppför planet av en parallellt med detta verkande kraft, anbragt i snörets mittpunkt, varvid cylinderns axel alltjämt är horisontell. Friktionskoefficienten är 0,2. På vilket avstånd från planet befinna sig under rörelsen trådens fästpunkter och huru stor är spänningen i snöret?
4. En kalorimeter innehåller 200 g vätska samt en uppvärmningsspiral; motståndet hos spiralen är 7,0 ohm. Om man under 1 minut sänder en ström om 2,0 ampère genom spiralen, stiger temperaturen i kalorimetern från 15°,0 till 18°,5 C. Om försöket

repeteras med 250 g av samma vätska i kalorimetern och med en strömstyrka av 2,5 ampère under 1 minut, uppmäter man en temperaturförhöjning i kalorimetern från 14°,5 till 19°,0 C. Beräkna vätskans specifika värme och kalorimeterns vattenvärde. Motståndsspiralens vattenvärde och värmeutbytet med omgivningen lämnas utan avseende.

5. En apparat för bestämning av små vätskemängders brytningsindex består av två likadana glasprismor, vilkas huvudsnitt äro halva liksidiga trianglar. De läggas intill varandra, så att de tillsammans utgöra ett prisma med rektangulärt tvärsnitt, tuskuret genom ett diagonalsnitt. När apparaten skall användas, införes ett tunt vätskeskikt mellan prismorna. En enfärgad ljusstråle får infalla i huvudsnittet vinkelrätt mot den längsta kateten i ena prismat och går så genom detta prisma, vätskeskiktet och det andra prismat samt träffar slutligen experimentatorns öga. Hela prismakombinationen vrides därpå kring en mot huvudsnittet vinkelrät axel, varigenom strålens infallsvinkel ökas. Vid en viss vridningsvinkel försvinner plötsligt strålen för ögat till följd av totalreflexion i vätskeskiktet. Vridningsvinkeln befanns vid en dylik mätning vara 43°,46. Glasets brytningsindex för den använda ljussorten var 1,680. Beräkna vätskans brytningsindex.

6. I en kikare från 1600-talet, vars objektiv och okular varit enkla och tunna linser, har okularlinsen gått förlorad. Man vet dock, att avståndet mellan objektivet och okularet varit 72 cm, när kikaren var inställd på mycket avlägsna föremål. Vid undersökning av objektivet finner man dessutom, att ett föremål på 4 m avstånd från objektivet avbildas skarpt på 1 m avstånd från detsamma. Av vilken typ har kikaren varit, och hur stor var dess förstoring för avlägsna föremål?

7. I avsikt att mäta en likström, vars styrka man vet vara stor, har man i den ledning, som genomflytes av strömmen, inkopplat ett specialkonstruerat oljekylt precisionsmotstånd AB på 0,02 ohm och parallellt därmed ett motstånd på 100 ohm. Till två rörliga kontakter C och D på det senare motståndet anslutes en grenledning, innehållande i serie ett normalelement med elektromotoriska kraften 1,018 volt och en galvanometer. Om normalelementet är vänt på rätt sätt, blir galvanometern strömlös vid ett visst läge för kontakterna. Motståndsdelen mellan C och D utgör då 68,4 ohm. Beräkna strömstyrkan i den ogrenade ledningen. Vid ritningen av kopplingsschemat antages, att A har högre potential än B.

8. Mellan ändpunkterna av en tunn rak metalltråd med 36 ohms motstånd verkar en växelspänning, som ändras med tiden enligt formeln

$$V = 48 \sin 270\, t.$$

Spänningen V är uttryckt i volt, vinkeln i radianer och tiden t i sekunder. Huru stor värmemängd (i cal) frigöres i tråden under varje period?

Resultat: 1. 11,6 A. 2. $a \cdot \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{12} = a \cdot 0{,}149$. 3. $\frac{15(5 - \sqrt{3})}{22} =$ $= 2{,}2$ cm; $10(3 + \sqrt{75}) = 117$ gf. 4. Spec. värmet är 0,496 och vattenvärdet 16,0 gram. 5. 1,362. 6. Galileis kikare (teaterkikare); förstoringen 10 ggr. 7. 74,4 A. 8. 0,179 cal.

(Forts. från s. 166.)

Populär Radio, 1941: 2—8.

Ur innehållet: Riktantenner; Yteffekten; Mottagarrörens uppbyggnad och verkningssätt; Högtalande telefon; Radionytt från U. S. A.; Superregenerativ mottagning; Ultrakortvågsterapi; Negativ återkoppling; Amerikansk rörfabrikation; Forskarbragd och odlargärning i modern radioteknik; Elektrontransformatorn; Gangning av kretsarna vid superheterodyner; Television i U. S. A.; Stereofoniskt ljud.

Ljuskultur, 1941: 1—2.

Ur innehållet: Lågvoltskvicksilverbåglampan; Belysningens inverkan på arbetets kvalitet och kvantitet; Krypton och kryptonlampor; Lysämneslampornas armatur och placering; Arbetsplatsarmatur enligt byggelådeprincipen; Den elektriska tariffbildningens grunder; Om dagsbelysning i folkskolor på Sveriges landsbygd.

Matematisk Tidsskrift, København 1940, A: 3, B: 3—4.

Ur innehållet: P. G. STUHLMANN, Bestemmelse af en Punkt, for hvilken Summen af Avstande til 3 givne Punkter er Minimum; M. THOMSEN, En Trekantsætning og et par Konstruktionsopgaver; H. CHRISTIANSEN, Om de geometriske Egenskaber ved den almindelige Bevægelse af en Figur i Rummet; H. TORNEHAVE, Træk af Regularitetsomraadenes Teori; A. S. BANG, Nogle algebraiske Identiteter; B. JESSEN, To Sætninger om konvexe Punktmængder; Litteraturanmeldelser; Eksamensopgaver.

Fysisk Tidsskrift København 1941: 1—3.

Ur innehållet: N. BOHR, Nye Undersøgelser over Atomkernernes Omdannelser; J. C. JACOBSEN, Om Cyklotronen; R. E. H. RASMUSSEN, Om Lydabsorption i Taage og i andre inhomogene Medier; B. MADSEN, Bølger paa strømmende vand (Demonstration af Dopplers effekt); H. M. HANSEN, Røntgenstraalers Anvendelse i Lægevidenskaben; K. J. BROSTRÖM, Moderne Højvakuumteknik; A. BROBY, Nyt Materiale til Frembringelse af Gnidningselektricitet.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1941: 1—2.

Ur innehållet: V. BJERKNES, Forskjellig om væskebevegelse; V. BRUN, Cirkelens kvadratur; TH. SKOLEM, Om ortogonalt beliggende gitterpunkter på kuleflater; BJ. BJERKE, Nogen andre tilfeller av trigonometrisk illustrasjon; Bokanmeldelser; Eksamensopgaver; Opgaver til løsning og løste opgaver.

De matematisk-naturvidenskabelige fags stilling i de danske skoler.

Av **EINER TORSTING.**

I denne artikel bliver der kun tale om disse fags stilling i »den højere almenskole», således som denne er ordnet ved lov af $^{24}/_{4}$ 1903. Denne skoles opbygning kan skematisk angives således:

1. Folkeskole til 11 års alderen.
2. Mellemskolen (11—15 år) — 4 klasser.
3 a. Realklassen (15—16 år) — 1 kl.
(»Realexamen»)
3 b. Gymnasiet (15—18 år) — 3 klasser.
(»Studenterexamen»)

Gymnasiet er tredelt: a) klassisk-sproglig linie, b) nysproglig linie og c) matematisk-naturvidenskabelig linie.

Der er det særegne ved den danske skole, at mellemskolen (og realklassen) findes knyttet både til den almindelige folkeskole, til den private realskole og til gymnasieskolerne (der enten er statsskoler, kommunale skoler eller private skoler). Dette betyder, at undervisningen i mellemskolen (og realklassen) ydes af lærere med vidt forskellig uddannelse, nemlig dels af folkeskolelærere uden akademisk uddannelse og ofte uden anden faglig uddannelse end seminariernes, og den er for de matematisk-naturvidenskabelige fags vedkommende meget beskeden; i enkelte tilfælde har disse lærere dog gennemgået et udvidet kursus, der fagligt bringer dem på højde med en student af den matematisk-naturvidenskabelige retning. Dels gives undervisningen af akademiske lærere (universitetsuddannede med skoleembedsexamen — »cand. mag.»). Dette giver selvfølgelig undervisningen i de forskellige skoleformer en noget forskellig karakter, hvilket kan være uheldigt for de elever, der overflyttes fra Folkeskolens mellemskole til 1. gymnasieklasse.

Mellemskolens undervisning er ordnet ved kgl. anordning af $^{26}/_{5}$ 1904, realklassens ved kgl. anordning af $^{16}/_{11}$ 1906 og gymnasiets ved kgl. anordning af $^{1}/_{12}$ 1906; denne sidste er dog ændret ved kgl. anordning af $^{9}/_{3}$ 1935.

Normaltimeplanen for fagene fysik, kemi og matematik (med praktisk regning) ser således ud:

	1	2	3	4	R	Is	Im	IIs	IIm	IIIm
Fysik							4		4	4
	2	2	2	2	2	2				
Kemi							2		2	2
Matematik	4	5	6	6	4	2	6	2	6	6

(1, 2, 3, 4 betegner mellemskolen, R realklassen, Is 1. gymnasiekl. sproglig retning, Im 1. gymnasiekl. matematisk-naturvidenskabelig retning o. s. v.).

I realklassen er faget matematik valgfrit for pigerne, og disciplinen geometri er valgfri for alle. Den klassisk-sproglige og den nysproglige linie i gymnasiet er stillet ens i de nævnte fag.

Mellemskolen.

1. *Fysik og kemi.* »Undervisningen skal meddele eleverne et ganske elementært, *på simple forsøg* grundet kendskab til en række af naturens almindelige fænomener: tyngden, luften og dens tryk; væsketryk, Arkimedes' lov med anvendelser, varme, magnetisme og elektricitet; nogle af de vigtigste uorganiske forbindelser af forskellig art, deres kemiske egenskaber og de grundstoffer, hvoraf de er sammensatte; lyd og lys samt det allermest elementære af bevægelseslæren, arbejde og maskiner.» Og om undervisningens form og metode hedder det: »Undervisningen skal bygge på erfaringer fra det daglige liv og på forsøg, som naturligvis på dette stadium må være ret simple; de efterhånden erkendte resultater må fastslås i bestemte sætninger, som må gengives og læres nøjagtigt af eleverne for at undervisningen kan få den tilbørlige fasthed. Matematisk begrundelse kræves ikke. — Det anbefales at lade eleverne i det omfang, som tiden og forholdene tillader, *være medvirkende* ved udførelsen af forsøgene.»

Den stærke understregning af forsøgene og erfaringerne er en reaktion mod den tidligere »tavlefysik», hvor de fysiske instrumenter i skolens samling nærmest var at betragte som musæumsgenstande. Den nye udformning af fysikundervisningen er knyttet til navne som: Kristine Meyer, Th. Sundorph og Kr. Simonsen. Det er iøvrigt nu almindeligt, at eleverne selv gør små forsøg — alle i klassen gør samme forsøg — udfra hvilke de skal besvare en række spørgsmål, der skal vise, at de har kunnet gøre iagttagelser; de indøves i vejning og måling og vænnes til at se.

Faren ved at bygge den fysiske erkendelse på ganske få — ofte kun et enkelt — forsøg er selvfølgelig den, at børnene kommer for hurtigt til resultater, der skal »fastslås i bestemte sætninger»; de kan forledes til at foretage forhastede slutninger. Lad mig i denne forbindelse citere et stykke af en meget brugt lærebog for mellemskolen:

»Når vi hælder lidt æter på hånden, mærker vi, at hånden afkøles, idet æteren fordamper. Dersom vi binder lidt bomuld uden om beholderen på et termometer, hælder æter på bomulden og svinger termometret i luften, synker kviksølvet langt ned under 0°. *Vi ser af disse forsøg, at der bruges varme til fordampning.*»

Hvis læreren ikke giver mere lys over dette, så må det videnskabeligt siges at være et letkøbt resultat. Og vort særlige forhold med mellemskolen i Danmark som et led i folkeskolen viser sig netop på sådanne punkter ofte som en svaghed. Men i den dygtige lærers hånd bliver det en undervisning, hvor børnene lærer at se, at undres og at bruge deres fantasi, samtidig med at en fasthed opnås ved de bestemt formulerede sætninger og regler, der blot ikke for børnene optræder som naturlove, der er erkendte udfra deres egne spinkle forsøg.

Om kemien i mellemskolen gælder, at man normalt ikke lærer de kemiske formler for stofferne (H_2O o. s. v.), men dog arbejder med »ligninger»:

$$\text{Zink} + \text{Svovlsyre} = \text{Brint} + \text{Zinksulfat}$$
$$(\text{i stedet for: } Zn + H_2SO_4 = H_2 + ZnSO_4).$$

2. *Matematik* (og praktisk regning). I den egentlige regneundervisning kræves det, at man 1) bibringer eleverne en *virkelig forståelse,* der vænner dem til ved opgavens løsning at klare sig de givne forudsætninger og at ræsonnere forstandigt ud fra disse og 2) bibringer dem regnefærdighed — m. a. ord, at de med lethed og sikkerhed kan anvende de regler og metoder, som er forstået.

Om selve *matematikundervisningens væsentligste formål* udtales, at det er »at udvikle elevernes evne til ud fra bestemt opgivne forudsætninger at drage sammenhængende logiske slutninger og at give disse et kort og klart udtryk», hvilket er et skønt ideal, men ikke let at praktisere, når man tager elevkvaliteten i den danske mellemskole i betragtning; og dette er man jo nødt til at gøre. Men til dette formål føjes nogle extra krav til undervisningen: 1) skal den bidrage til at fremkalde elevernes selvvirksomhed, 2) skal den vænne eleverne til nøjagtighed og 3) skal den klargøre for dem forskellen mellem almengyldige sætninger og specielle regler.

I de fleste skoler betragtes »regning» og matematik som to fag, der ikke så sjældent har to forskellige lærere i samme klasse; men ved de fleste gymnasieskoler er regning og aritmetik-algebra knyttet tæt sammen. De første, der gjorde forsøget i en lærebog, var Phil og Ring. Der lægges ved selve talopgaverne vægt på, at regnereglerne gennemarbejdes til forståelse og ikke blot anvendes rent mekanisk. I »små doser» overføres disse regneregler til bogstavregningen, d. v. s. matematikken ligesom »listes ind» derved, at den fremgår som en naturlig udvidelse af almindelig talregning. Der bliver således ikke nogen egentlig systematik i aritmetikken (bevis for selvindlysende regler om addendernes orden o. l.). Iøvrigt tilstræbes der overalt i den elementære undervisning anskuelighed; brøksbegrebet anskueliggøres geometrisk o. s. v. Forbindelseslinier trækkes til geometri og fysik.

Om den egentlige geometriundervisning bør det siges, at den gives efter to ganske forskellige linier, og at dette tillades av undervisningsinspektionen. Den ene linie følger ganske den Euklid'ske tankegang med logisk opbygning af et system; men mere og mere er man (især efter fremkomsten af Hjelmslev's »Elementær geometri I», 1916) gået over til en virkelighedsgeometri mere eller mindre konsekvent gennemført. Om denne geometri skriver Hjelmslev i forordet til sin bog: »Den handler ikke om abstraktioner, men om ting, der hører livets praxis til. Den bygger ikke på postulater, men på erfaringsresultater i deres naturlige form.» En lignende pædagogisk betragtning gør sig jo gældende i de svenske »Metodiska anvisningar till undervisningsplanen för rikets allmänna läroverk» p. 136: »Den genom de förberedande övningarne vunna erfarenhetskunskapen bör också användas så, att bevisen uteslutas för enkla satser, som kunna anses genom åskådningen omedelbart givna. Bevisföringen kan inskränkas till sådana satser, i fråga om vilka lärjungen kan känna behov av bevis.» Men for den konsekvente virkelighedsgeometri er det ikke blot således, at beviser *kan* udelades af pædagogiske grunde; der er ganske simpelt ikke noget at bevise i disse tilfælde. Diskussionen om geometriundervisningens retningslinier har hos os været kraftig; men de fleste nyere lærebøger har dog tydeligt lært af Hjelmslev. At der kan være en fare ved at bygge geometriundervisningen op på et erfaringsgrundlag, når man dog som endeligt formål har den logiske tankebygning, er let at se; og selvfølgelig kommer ikke alle eleverne udover den konkrete tegning og de til denne knyttede egenskaber; men dette har dog sikkert større værdi end abstrakte beviser, der læres udenad uden virkelig forståelse.

Realklassen.

1. *Fysik* (*kemi*). Der gennemgås udførligere to eller flere afsnit, som vælges af skolen selv.

2. *Regning.* Der behandles især handelsregning og indøves brug af tabeller.

3. *Aritmetik og algebra.* Som en direkte fortsættelse af mellemskolens pensum læres ligninger og polynomier af 2. grad, logaritmer, rækker og rentesregning.

4. *Geometri* (valgfrit fag med 2 ugentlige timer). Normalt behandles læren om ligedannethed og lidt trigonometri.

Som man vil se, er kravene i denne étårige afdeling kun en afrunding af mellemskolens pensum.

Gymnasiet. A. De sproglige linier.

1. *Fysik og kemi.* »Undervisningen *tilsigter* at give eleverne et *fornødent* grundlag for undervisningen i geografi og naturhistorie (biologi)». Undervisningen skal være experimentelt underbygget, delvis ved elevforsøg. I fysik er måling af varmemængder hovedemnet; desuden »en kort omtale af energiens forskellige former». I kemien skal eleverne have et »elementært kendskab til de vigtigste grundstoffer og forbindelser». Det er på forhånd givet, at denne undervisning i ét år med 2 ugentlige timer (heri indbefattet tiden til elevøvelser) ikke kan være meget vidtgående. Den er først indført ved en ændring af den kgl. anordning i 1935; indtil da havde man på de sproglige linier ikke fysik og kemi.

2. *Matematik.* Formålet er at give eleverne kendskab til visse vigtige anvendelser af matematikken. Af de teoretiske afsnit skal kun medtages så meget, at dette formål kan opfyldes. Kravene omfatter således især: grafisk afbildning (funktionsbegrebet), logaritmeregning, rentesregning og noget trigonometri.

Indtil ændringen i 1935 havde faget matematik $2 + 2 + 2$ timer i de tre gymnasieklasser, medens det nu har $2 + 2 + 0$. Men det må vistnok siges at være en fordel m. h. t. udbyttet af undervisningen, at man i stedet for et meget teoretisk stof, således som det var tidligere, er gået over til at knytte behandlingen direkte til anvendelserne.

Gymnasiet. B. Den matematisk-naturvidenskabelige linie.

1. *Fysik (med Astronomi) og kemi.* »Undervisningens formål er at give eleverne et sådant kendskab til naturen og dens love, at de kan *forstå og følge* naturvidenskabens betydning *såvel* i nutidens praxis *som* for nutidens åndsliv, og samtidig gennem kombination af experiment og ræsonnement indøve dem i den naturvidenskabelige arbejdsmetode. Nye betydeligere opdagelser på naturvidenskabens område bør drages ind under det stof, der er genstand for undervisning.»

Fysikundervisningen drives experimentelt, og til elevernes praktiske øvelser skal anvendes en tid, der svarer til mindst 2 timer ugentlig i ét år. Over disse øvelser fører eleverne rapporter, der fremlægges ved studenterexamen.

Om samarbejdet mellem fysik og matematik kan der være grund til at sige følgende: fra fysikerens side advares der stærkt imod en matematisk behandling af fysiske problemer, sålænge eleverne ikke har levet sig ind i en matematisk tænkning, idet en formel da ikke er gennemsigtig, men kan læres udenad. Et forsøgsresultat, diskussion af dette og derefter et fysiskt ræsonnement anses for bedre at være i stand til at knytte iagttagelse og tænkning sammen. I de højere klasser tilstræbes derimod et organiseret samarbejde mellem fysik og matematik — især i kinematik og sfærisk astronomi.

Kravene i disse fag er ret store og har i følge sagens natur en tendens til at voxe, når nyere opdagelser skal drages ind under undervisningsstoffet. Men der gøres af mange fysiklærere et meget stort arbejde for at tilrettelægge stoffet for eleverne også med hensyn til smukke experimentelle metoder til belysning af de vanskelige problemer.

2. *Matematik.* »Formålet for undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til de reelle tal og disses anvendelse til beskrivelse af funktioner, samt kendskab til simple figurer såvel i planen som i rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske formelapparat og opnå sikkerhed og færdighed i numeriske beregninger.»

Om undervisningen kræves det, at den i »så høj grad som muligt tilstræber en sammenhæng mellem de forskellige dele af stoffet»; derved menes funktionsbegrebet naturligt at måtte træde i forgrunden.

I den oprindelige anordning fra 1906 var stoffet traditionsmæssigt delt i: aritmetik og algebra, plangeometri, trigonometri, stereometri, analytisk plangeometri og infinitesimalregning (denne sidste disciplin var da ny i skolen og valgfri, men blev hurtigt almindelig). Lærebøgerne var opdelt efter de samme linier. Året efter udgav T. Bonnesen en lærebog i matematik efter helt nye linier; påvirket af de Klein'ske synspunkter var funktionsbegrebet og den grafiske fremstilling gjort til det ledende princip gennem stoffet. Men principperne for behandlingen af funktionsbegrebet og infinitesimalregninger var af rent anskuelig karakter; i nogen grad måtte man føle en vis inkonsekvens i behandlingen af stoffet, når det »klassiske» stof blev behandlet udfra abstrakte logiske principper, medens det nyere (infinitesimalregningen) blev behandlet uden tilsvarende grundighed. I 1926—27 udgav H. J. Pihl og Sig. Kristensen en ny lærebog i matematik for det matematiske gymnasium, hvor de moderne principper fra analysen var gennemført (Forf. havde lært af den ved Danmarks tekniske højskole anvendte lærebog i matematisk analyse af H. Bohr og J. Mollerup); denne bog er senere kommet i omarbejdet udgave under medvirken af Rubinstein. Den er i høj grad blevet normgivende for kravene til undervisningen i matematik i det danske matematiske gymnasium; og den har også præget den ændring, der er sket ved anordningen fra 1935.

Grundstammen er således behandlingen af reelle tal, talfølger og grænseværdier med anvendelser på funktionsteorien (omfattende også logaritmefunktionen og exponentialfunktioner): læren om kontinuerte og differentiable funktioner, middelværdisætninger, maximum og minimum, det bestemte og ubestemte integral. Hertil kommer så det sædvanlige pensum i planets og rummets geometri, analytisk plangeometri og forskellige aritmetiske og algebraiske problemer. Endvidere omfatter stoffet nogen vektorregning og kinematik af hensyn til fysikundervisningen.

Det må forhåbentlig heraf fremgå, at den teoretiske behandling af stoffet stiller store krav både til lærere og elever (måske for store krav, da elevkvaliteten ikke helt modsvarer, hvad man kunde ønske). Faren ved denne meget krævende teoretiske behandling er dels, at visse sværere problemer ligger udover elevernes horisont, så udbyttet ikke helt svarer til anstrengelserne, og dels, at der bliver for lidt tid til indenfor undervisningstiden at gennemarbejde det nødvendige opgavemateriale, så en passende færdighed i løsningen af opgaver kan nås. Jeg kunde derfor godt tænke mig, at en reaktion mod den bevægelse, der iøvrigt har været så frugtbar for matematikundervisningen, vil komme.

Examiner.

Efter udgangen af 4. mellemskoleklasse afholdes »mellemskoleexamen»; ved skriftlig examen gives et sæt opgaver i »regning» og et sæt i »matematik» med 3 timer til hvert sæt; ved mundtlig examen examineres både i fysik (kemi) og matematik og regning.

Til »realexamen» gives 4 timer til skriftlig besvarelse af et sæt opgaver i »regning og matematik», medens der ved mundtlig examen examineres i fysik og matematik.

Efter udgangen af 2. gymnasieklasse på de sproglige linier afholdes mundtlig examen i fysik (kemi) som bidisciplin til geografi samt i matematik; bedømmelsen fra denne examen overføres til »studenterexamen» året efter.

Ved studenterexamen på den matematisk-naturvidenskabelige linie gives to sæt opgaver (i reglen ialt 6 opgaver) til skriftlig besvarelse i 4 timer pr. sæt. Der afholdes mundtlig examen i fysik (her gives et spørgsmål i den teoretiske del og et spørsmål angående et af eleven i skoletiden udført experiment), i kemi og i matematik (hvor der forelægges examinanden to spørsmål, der bedømmes under ét).

Ved mellemskoleexamen kan to fag udgå efter skolens valg; ved realexamen examineres i alle fag; ved studenterexamen kan op imod halvdelen af fagene udgå efter undervisningsinspektørens bestemmelse. Dog kan skriftlige fag ikke udgå ved nogen examen. Alle skriftlige opgaver gives af særlige opgavekommissioner.

Lærerforeninger.

Ved siden af den fælles forening for alle lærere ved danske gymnasieskoler (»Gymnasieskolernes Lærerforening») findes mindre faglige foreninger for de fleste fag i skolen. For de fag, som her har været omtalt findes to foreninger, der dog har et meget nært samarbejde:

»Foreningen af fysik- og kemilærere ved gymnasier og seminarier» og »Foreningen af matematiklærere ved gymnasieskoler og seminarier».

Hver af disse foreninger har mellem 100 och 150 medlemmer, hvoraf nogle selvfølgelig findes i begge foreninger. Da der i Danmark er 62 gymnasieskoler, hvoraf kun ganske enkelte har omkring 500 elever og en del kun det halve antal, vil man forstå, at medlemstallet i disse foreninger er meget stort; adskillige professorer i disse fag ved universitet og teknisk højskole er interesserede medlemmer i disse foreninger.

Da de danske gymnasieskoler i midten af oktober holder en uges »efterårsferie» afholdes der gerne i de forskellige foreninger møder for medlemmerne; således afholdtes i dagene 20.—22. oktober 1941 møder i de to foreninger. Af emner, der ved disse møder behandledes, skal her nævnes følgende: ingeniør G. Weber: Moderne belysningskilder; professor Strömgren: Det internationale astronomiske samarbejde; adjunkt Mønsted: Problemer i den daglige fysiske undervisning; professor David Fog: Plangeometri contra sfærisk geometri; adjunkt Rubinstein: Flytninger og andre transformationer i skolegeometrien.

En ny apparat för verifiering av formeln för centrifugalkraften.

Av **B. WAHLSTRÖM.**

THS. SKJULSTADS uppsats om »Et nytt sentrifugalapparat» i Elementas septemberhäfte 1941 har föranlett mig att här redogöra för en dylik apparat, som jag konstruerade och byggde för c:a tre år tillbaka och som sedan dess användes vid Norra realläroverket. Den synes mig enklare i princip än Skjulstads och erbjuder rikare variationsmöjligheter beträffande de i formeln ingående storheterna. Grundprincipen är ej ny. Den finnes bl. a. i Beckman - Wetterblad, Fysik för realskolan, del III.

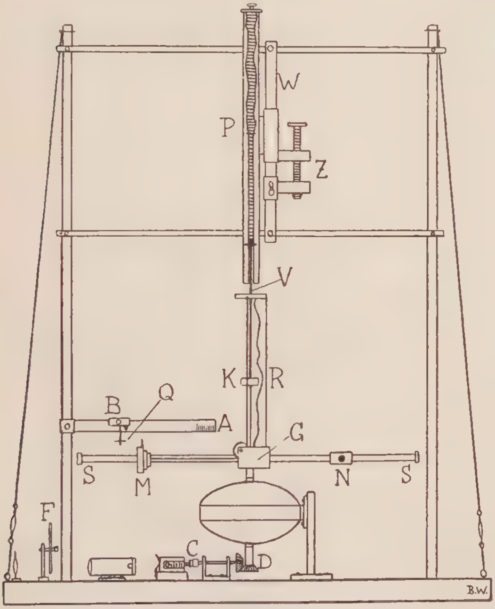


Fig. 1. (Skala: ung. 1:14.)

Den genomborrade vikten M slungas vid motorns rotation ut längs ena delen av silverstålstången SS. På den andra stångdelen finnes en flyttbar motvikt N. De två tunna linorna (L) (fig. 2) (spin-linor av silke; tåla 12 kgf), som löpa parallellt med stångens axel, spänna därvid, via »bryttrissorna» T, dynamometern P, som direkt anger centrifugalkraften i gf, då jämvikt inträtt mellan denna kraft och dynamometerspänningen (centripetalkraften). »Piggen» på vikten M är placerad mitt över dennas tyngdpunkt. Rotationsradien avläses på skalan A genom att »löparen» B flyttas inåt, tills piggen just slår undan den lättrörliga lilla pinnen Q, mot vars ändpunkt löparens index pekar. Varvtalet bestämmes genom en slagtäljare, som ansättes mot ändpunkten C (fig. 1) av axeln CD, vilken genom det koniska kuggdrevet D (lika många kuggar hos båda drevhjulen) ges samma varvtal som motorn.

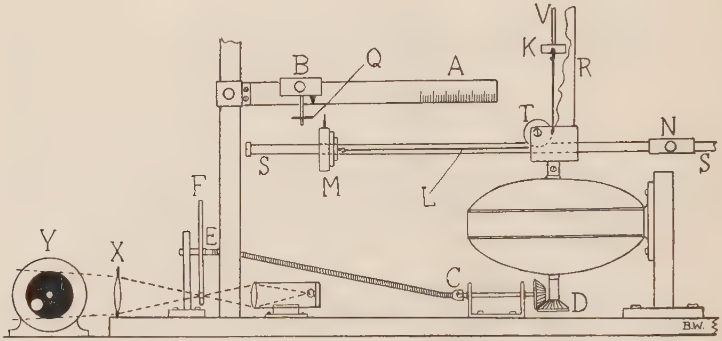


Fig. 2.

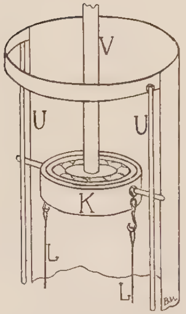


Fig. 3. Övre ändan av röret R med kullagret K.

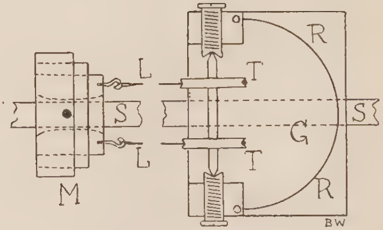


Fig. 4. Stycket G och vikten M, sedda uppifrån.

Två linor (L) ha använts för undvikande av snedspänningar in mot stången SS. Linorna äro fästade i två krokar på lagerhuset till det lilla kullagret K (12 mm diameter; 4 mm axel). Lagerhuset är (fig. 3) även försett med två pinnar, vilka löpa i »rännorna» mellan kanterna av det halvcylindriska mässingsröret R och två stänger U; R och U äro vertikalt monterade på stycket G. Anordningen är gjord för att hindra linorna att sno sig om varandra vid rotationen och medför även, att stången V, fäst i dynamometern, icke följer med vid rotationen, varför dynamometern fritt rör sig i vertikal led. Linorna »stå» självfallet i lodplanet genom motoraxeln. Dynamometern kan höjas och sänkas lodrätt medelst muffarna på stativstången W (fig. 1), detta för att rotationsradien skall kunna bekvämt varieras. Genom skruvanordningen Z kan dynamometerns ställning finjusteras.

I fig. 2 är till axeländan C (med en bajonettfattning) kopplad en böjlig stålaxel (CE), vilken driver en liten stroboskopskiva (F), försedd med 12 hål, genom vilka vid skivans rotation ljus från den lilla lampan (via en lins) glimtvis träffar linsen X, från vilken ett ljusknippe kastas mot en matt, halvgenomskinlig pärla (9 mm diam.), monterad på en svart skiva, som bringas i rotation med den lilla »hjälpmotorn» Y. Roterar pärlan (hjälpmotorn) n varv/sek, stroboskopskivan (huvudmotorn) $\frac{n}{12}$ varv/sek, synes pärlan stillastående. (Skivan är vänd mot klassen; halvmörkt rum.) Fördubblas motorns varvtal, synas 2 stillastående pärlor (diametralt motsatta), tre-dubblas varvtalet, synas 3 pärlor (liksidig triangel) o. s. v., om hjälpmotorns varvtal hålles oförändrat.

Försökets utförande.

I. Hjälpmotorn ges ett lämpligt varvtal (ej uppmätt), med vilket den får rotera under de två (ev. tre) första försöksserierna nedan.

II. 1. *Massa* (m) *och varvtal* (n) *konstanta, rotationsradien* (r) *varieras.* Apparaten sättes igång (m t. ex. = 50 g) och hastigheten ökas, så att t. ex. 2 pärlor synas stillastående. Radie och dynamometer avläsas. Radien varieras därpå genom att dynamometern höjes eller sänkes. Avläsningar göras på nytt. (En liten efterjustering av varvtalet är måhända erforderlig, då motorns varvtal kan ändras något genom belastningsändringen.)

2. *Radie och varvtal konstanta, massan varieras.* Apparaten sättes igång; m t. ex. = 75 g. Hastigheten ökas, så att t. ex. 2 pärlor synas. Radie och dynamometer avläsas. Apparaten stannas och m ändras till 50 g, varefter hastigheten ökas, tills ånyo 2 pärlor synas (samma varvtal som förut). Därefter sänkes dynamometern, tills radien blivit den förut avlästa, samt avläses. Försöket upprepas med $m = 25$ g.

3. *Radie och massa konstanta, varvtalet varieras.* Stroboskopanordningen frånkopplas och slagtäljaren ansättes. Apparaten igångsättes (m t. ex. = 50 g), radie och dynamometer avläsas och varvtalet bestämmes. Dynamometern höjes och varvtalet ökas så, att radien blir ung. densamma som förut,

varefter finjustering sker med dynamometerns höjning eller sänkning. Ny avläsning av dynamometern och ny varvtalsberäkning. — Här kan man i stället bibehålla stroboskopanordningen inkopplad och (vid oförändrad radie) ställa in på 2, 3, 4, ... pärlor. Förhållandet mellan varvtalen är då 2 : 3 : 4 : ...

En försöks-serie i ring IV innevarande termin:

1.			2.			3.		
r(cm)	K(gf)	$K : r$	m(g)	K(gf)	$K : m$	n(varv/sek)	K(gf)	$K : n^2$
9,4	400	42,6	75	820	11,0	3,76	570	40,2
13,9	600	43,2	50	530	10,6	5,03	1030	40,7
21,0	900	43,0	25	270	10,8	5,94	1420	40,3

4. Formeln $K = c_1 \cdot rmn^2$ är nu verifierad. Den kan t. ex. skrivas $K = \frac{4\pi^2}{c_2} rmn^2$, som ger $c_2 = \frac{4\pi^2 mrn^2}{K}$, vilken konstant $c_2 = g$ skall bestämmas. Stroboskopanordningen frånkopplas. Apparaten sättes igång, tills jämvikt nåtts, allt under det att slagtäljaren är insatt; slagtäljaren monteras lämpligen i en hållare, så att den trycker mot axeländan C med konstant kraft. Dynamometer, radie och varvtal avläsas.

I nedanstående uppställning anges — för att visa apparatens ungefärliga »arbetsområden» — de värden mellan vilka r, n och K varierades vid användning av olika massor vid den sista serie av bestämningar av g, som jag utförde. De i tabellen angivna »ytterlighetsvärdena» äro *icke* samhöriga.

Antal best.	m(g)	r(cm)	n(varv/sek)	K(gf)	g(cm/sek²)
8	75	15,2—27,7	3,72—5,92	500—2250	964—1000
6	50	13,6—25,0	4,04—7,60	530—2200	956—1005
6	25	12,0—26,0	4,27—8,67	330—1990	957—1006

Samtliga 20 värden gåvo i medeltal $g = 983$, med avvikelse från $g = 981$ på maximalt c:a ± 2,5 %. Av värdena föllo 10 st. mellan 970 och 990.

Man finner således $K = \frac{1}{983} \cdot 4\pi^2 rmn^2 = \frac{1}{983} m \frac{(2\pi rn)^2}{r} = \frac{1}{983} \frac{mv^2}{r}$, där v är periferihastigheten. På en dubbeltimme (klasslaboration) medhinner man efter någon träning i apparatens handhavande 3—4 bestämningar till varje försöksmoment.

Några data m. m. må anföras. Radien kan varieras från 6—29 cm och avläses i mm. Vikterna äro, som framgår av ovanstående, tre: 25, 50 och 75 g. Den minsta vikten är gängad utvändigt, så att en »ring» på 25 g kan gängas på. Utanpå denna kan ytterligare en ring på 25 g gängas. Därigenom vinnes dels möjlighet till snabb viktändring, dels blir glidytan mot stången SS densamma för alla vikterna. Hålet i 25-g-vikten är svagt koniskt åt båda hållen (fig. 4). — Dynamometern kan avläsas upp till 3000 gf (1 mm = 10 gf). — Mätområdena äro således ganska stora, men apparaten har därmed blivit rätt skrymmande. Vid tillverkning är halv storlek fullt tillräcklig utan att resultaten behöva bli sämre.

Den använda huvudmotorn är en mindre shuntad 220-volts likströmsmotor, där magnet- och ankarlindningarna frikopplats. På magneterna är lagd en konstant spänning på 220 volt. Ankarlindningarna äro shuntade till ett större skjutmotstånd, varjämte ett mindre dylikt (för finjustering) är kopplat i serie med dessa lindningar. Hjälpmotorn är ett litet dammsugaraggregat, som lämpligen anslutes till kopplingstavlan. Båda motorerna hålla mycket konstant varvtal vid oförändrad spänning. Före laborationens början böra de dock »köras» en stund, så att de bli värmda, varigenom gången blir jämnare, särskilt om de stått oanvända någon tid.

Proportionerna i figurerna äro ej alltid de rätta. Vissa detaljer ha för tydlighetens skull ritats ej oväsentligt förstorade.

Norra realläroverkets mekaniker H. Berggren, som förfärdigat en hel del av apparatdelarna och givit mig månget gott uppslag, är villig att tillverka apparaten på beställning. Motorer böra därvid ställas till förfogande. Bäst är givetvis, om en särskild motor kan få användas uteslutande för huvudapparaten, så att denna står klar för användning.

Apparat för undersökning av fasta kroppars elasticitetsförhållanden.

Av **GÖSTA FUNKE.**

Förändringen i fasta kroppars form och övriga egenskaper under inverkan av yttre krafter behandlas mycket knapphändigt i skolornas läroböcker. Något experiment inom detta område, helst i form av en laboration, borde dock göras. Det rör sig ju om grunden för en hel vetenskap, hållfasthetsläran. I Moll-Rudbergs lärobok finnes en anordning skisserad, som kan användas för kvalitativt påvisande av längdförändringen genom dragning.[1] Det är inte heller någon dyrbar eller komplicerad apparat som behövs för att göra kvantitativa experiment med en noggrannhet, som gör det möjligt att i detalj följa alla de intressanta skeden, som inträffa, då dragpåkänningen på en fast kropp ökas, ända från den elastiska formförändringen till brottgränsen.

Tankegången vid den här beskrivna dragprovapparatens konstruktion har varit den, att provets övre fästpunkt skall direkt förbindas med den anordning, som mäter den nedre fästpunktens läge, så att mätanordningen följer med övre fästpunktens rörelser vid belastning. Därigenom uppnås fullkomlig stabilitet hos övre fästpunkten i förhållande till mätanordningen, utan att några delar av apparaten behöva ges grova dimensioner. Vidare är det nödvändigt att kunna mäta de första små längdförändringarna med stor precision och ändå ha möjlighet att mäta längdförändringar på upp till 60—70 cm, dessa senare dock utan särskilt stora krav på noggrannhet. Apparaten (fig. 1) har därför en »ryggrad», G, i form av ett c:a 2 m långt mässingsrör. Detta utsättes ej för andra påfrestningar än den att uppbära en mikrometerskruv, I, vars ena skänkel bortsågats. I övre ändan av röret G är ett med slits försett mässingsstycke B pålött. I mässingsstycket är fastsatt en upphängningskrok. Den tråd, som skall undersökas, C, är upptill fastlödd vid mässingsbiten A och nedtill vid D. Upptill är tråden inskjuten i slitsen vid B. Nedtill är vid D fasthakad metallstången F, rörlig genom cylindern E. Stången F är försedd med en stadig visare H, med plan översida. I cylindern E är upptagen en slits, i vilken H kan röra sig, då kroken i F belastas med vikter. Även E är fäst vid

---

[1] En annan apparat, avsedd för demonstration, har angivits av G. Starck i Elementa 7, 45.

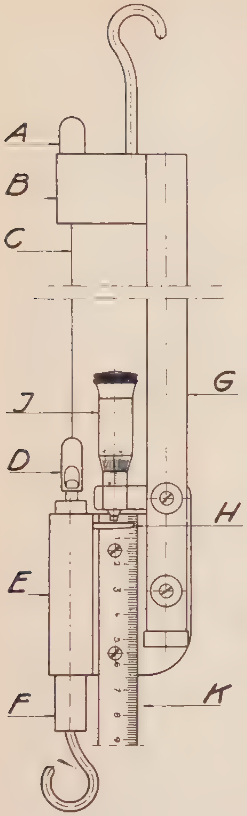


Fig. 1. Dragprovapparat.

röret G. Vid de olika belastningarna inställes mikrometerskruven mot H, så länge skruven räcker till. Därefter göras avläsningarna på ett en meters stålmåttband, K, fastsatt vid E och G. Ett speciellt problem har varit trådens fastsättning vid A och D. Jag har prövat många olika fastsättningsanordningar, men det tycks vara omöjligt att undgå en viss glidning och samtidigt även åverkan på tråden, om fasthållandet sker med en skruvanordning av något slag. En vanlig tennlödning däremot håller perfekt, och den tar ju endast några få minuter att göra. Det skadar väl för övrigt inte, att eleverna få litet övning i den konsten också.

De vid försöken använda trådarna ha varit av koppar, järn och stål (pianotråd) med omkring 0,5 mm diameter. För järn och stål är det lämpligt att öka belastningen med 0,5 kgf i taget, för koppar med 0,1 kgf upp till 1 kgf, sedan med 0,2 kgf upp till 3 kgf och därefter åter med 0,1 kgf. Om man endast har tid med ett material, bör man välja järn, som alldeles avgjort är det intressantaste.

I fig. 2 har återgivits sambandet mellan mikrometerskruvens inställning och dragkraften upp till 7 kgf. Denna kurva användes för att finna utgångsläget vid belastningen noll. Eftersom tråden ej hänger rak utan belastning, måste detta läge extrapoleras ur kurvan. De två första punkterna ligga något över den räta linjen, beroende på att tråden först vid

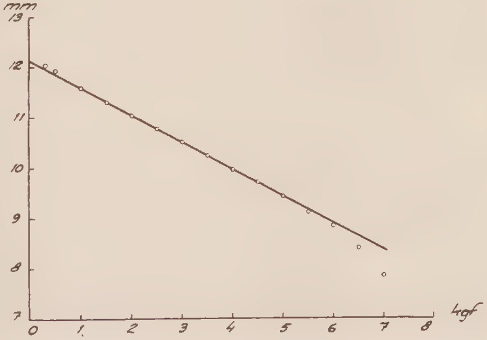


Fig. 2. Mikrometerutslaget som funktion av belastningen. Järntråd.

1 kgf belastning är fullt uträtad. (I belastningen måste inräknas tyngden av F.)

I fig. 3 och 4 har spänningen i tråden avsatts som funktion av töjningen. (Detta är det inom hållfasthetsläran vanliga framställningssättet, fastän man annars kanske skulle vara mera böjd att betrakta belastningen som oberoende variabel.) *Spänningen* utryckes i kgf/cm². Med *töjningen* menas $\frac{\triangle l}{l}$, där $\triangle l$ är längdförändringen och l trådens längd. Töjningen brukar betecknas med ε och spänningen med σ. Enligt Hookes lag gäller $\triangle l = k \cdot \frac{P \, . \, l}{F}$, där P är dragkraften, F genomskärningsytan och k en konstant, som vanligen betecknas $\frac{1}{E}$. (E är *elasticitetsmodulen.*) Med användande av begreppen spänning och töjning lyder Hookes lag: $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Det framgår av fig. 3, att Hookes lag för koppar endast

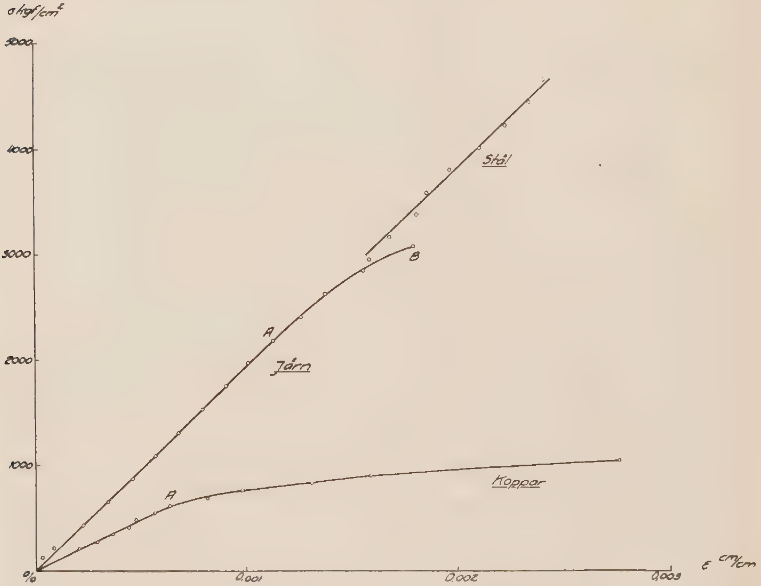


Fig. 3. Sambandet mellan spänningen och töjningen för järn, stål och koppar. För stål är endast yttersta delen dragen, emedan den i övrigt nära sammanfaller med järnets kurva. *A* är proportionalitetsgränsen, *B* flytgränsen.

gäller till en spänning av c:a 600 kgf/cm^2 (punkten A), för järn till c:a 2200 kgf/cm^2 och för stål för hela det undersökta spänningsområdet ($>$ 4600 kgf/cm^2). Spänningen i punkten A betecknas som *proportionalitetsgränsen*. Strax under A ligger en annan gräns, som här icke gjorts till föremål för närmare undersökning, *elasticitetsgränsen*. Det är ett mycket diffust begrepp, som egentligen skulle betyda den gräns, till vilken man kan driva spänningen utan att någon deformation hos tråden kvarblir, om spänningen borttages. Någon deformation blir dock alltid kvar, och man brukar därför tillåta en kvarstående deformation på 0,03 %.

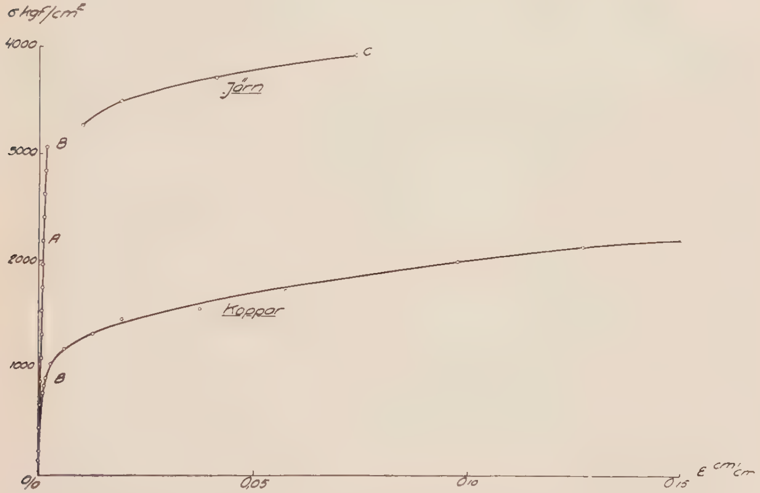


Fig. 4. Samma samband som i fig. 3, men i annan skala. Fig. 3 motsvarar ungefär området till *B*, flytgränsen. *C* är brottgränsen. För koppar har kurvan icke kunnat medtagas ända till brott. Den skulle då ha dragits ut ytterligare ett lika stort stycke efter x-axeln.

(Det vid en kongress i Brüssel 1906 fastställda 0,001 % är för litet.) För en två meters tråd skulle alltså tolereras en återstående förlängning på 0,6 mm, och då försöket med ståltrådens avslutas, konstaterar man, att icke heller elasticitetsgränsen uppnåtts vid den belastning på c:a 4600 kgf/cm^2, som här använts.

Sedan belastningen överskridit proportionalitetsgränsen, börja förlängningarna öka i snabbare takt, och vid punkten B inträffar ett egenartat fenomen. Vikten sjunker ryckvis och snabbt ett långt stycke, och sjunkandet fortsätter, även om belastningen något minskas för att sedan åter strama till. I området strax ovanför

B (se kurvan för järn fig. 4) existerar intet definierat samband mellan spänning och töjning. Materialet liksom flyter, och punkten B kallas även *flytgränsen* (ibland *sträckgränsen*). Vid ytterligare ökad spänning ökas förlängningen snabbt, tills tråden brister vid C (*brottgränsen*). Töjningen vid brott i % av ursprunglig längd kallas *tänjbarheten*. Vid koppar framträda icke alla dessa fenomen så skarpt som vid järn, men vid demonstration väcker alltid den enorma tänjbarheten stort intresse. Den här använda tråden drages ut inte mindre än 70 cm, innan den brister, motsvarande en tänjbarhet av nära 30 %. (Trådens längd 239 cm.)

Vid teknisk provning användas provkroppar av noga bestämd form (se t. ex. Svensk teknisk uppslagsbok, del I sid. 225), emedan längd och genomskärningsyta inverka på hållfasthetsstorheterna. Detta visar sig här i ett för lågt värde på järnets tänjbarhet, δ, (7,4 %) men för elasticitetsmodulen (E), proportionalitetsgränsen (A), flytgränsen (B) och brottgränsen (C) erhållas följande goda värden.

	Järn	Stål	Koppar
E	1 980 000	1 900 000	980 000
A	2 200 kgf/cm^2	—	600 kgf/cm^2
B	3 100 kgf/cm^2	—	900 kgf/cm^2
C	3 930 kgf/cm^2	—	2 420 kgf/cm^2
δ	7,4 %	—	29,4 %

Efter brottet bör man studera brottstället med en god lupp eller mikroskop för att konstatera den typiska insnörningen av brottstället. De kvarblivande förändringar, som uppstå, då elasticitetsgränsen överskrides, bero på en glidning av avgränsade skikt inom enskilda kristaller efter parallella plan (glidplan) samt en glidning av hela kristallskikt. Denna senare gör att trådens yta synes mattare efter utdragningen.

Något om atmosfärens temperaturförhållanden.

Av ALF NYBERG.

Vår kunskap om den högre atmosfärens tillstånd har först långsamt ökats. De första temperaturmätningar, som utfördes i den fria atmosfären, ägde visserligen rum redan i slutet av 1700-talet kort tid efter Montgolfiers ryktbara ballongfärd 1783. Jeffries fann då i en bemannad ballong, att temperaturen avtog med höjden i genomsnitt 5° à 6° per km. Men därefter dröjde det över hundra år, till dess nästa större framsteg gjordes inom denna forskningsgren. Man antog under hela adertonhundratalet, att temperaturfallet med höjden fortsatte, om också efterhand långsammare, till dess absoluta nollpunkten uppnåddes. År 1901 upptäckte dock Teisserenc de Bort att på en viss nivå, som numera kallas tropopausen, temperaturen upphörde att falla. Den nedre delen av atmosfären, i vilken temperaturen i genomsnitt faller med höjden kallade han troposfären och den övre delen, i vilken temperaturen till stora höjder är konstant, stratosfären. Atmosfären upp till 30 à 40 km har från och med denna tid undersökts med hjälp av ballonger, som medfört registrerande instrument. Det är denna del av atmosfären, som ur meteorologisk synpunkt är särskilt intressant.

De instrument, med vilka undersökningar (sonderingar) av atmosfärens temperatur och fuktighetsförhållanden utföras, kallas meteorografer. De uppsändas vanligen med hjälp av vätgasfyllda gummiballonger. Meteorograferna bestå i allmänhet av tre meteorologiska instrument, nämligen en aneroidbarometer, en bimetalltermometer och en hårhygrometer samt en registreringsanordning. Den äldsta meteorograftypen användes i stort sett oförändrad ännu i dag vid sonderingar med flygplan. Registreringen sker där med hjälp av pennor, fästade vid hävstänger, som utgå från barometern, termometern och hygrometern. Pennorna rita kurvor på ett sotat papper, som är fästat på en cylinder, vilken vrides runt av ett urverk. Ur registreringskurvorna beräknas lufttryck (p), temperatur (T) och relativ fuktighet (u) på de höjder (z), man vill undersöka.

Vid de meteorografer, de s. k. radiosonderna, som numera vanligen användas, sker registreringen, som namnet anger, medelst radiosignaler, så att utvärderingen av registreringen kan påbörjas, innan sonderingen ännu är avslutad. På detta sätt erhållas resultaten hastigt och bli användbara för den praktiska väderlekstjänstens prognosarbeten.

Den i Sverige använda radiosonden, efter konstruktören, professor Väisälä i Helsingfors, kallad Väisälä-radiosonden, verkar på följande sätt. De tre meteorologiska instrumenten stå i förbindelse med en rörlig platta i var sin kondensator, som fig. 2 visar. Ändras t. ex. temperaturen, ändras också bimetallens krökning och därmed plattornas avstånd i kondensatorn och dennas kapacitet. Motsvarande gäller de kondensatorer, som äro beroende av hygrometerhåren, vilka förlängas i fuktig luft, och aneroiden. En omkopplare, som drives runt av luftmotståndet, då ballongen stiger, inkopplar i svängningskretsen först *en* kondensator, varvid svängningar av en viss frekvens utsändas. Därefter kopplas denna kondensator ur kretsen och nästa kopplas in. Den nya kretsen utsänder svängningar av en annan frekvens, och så går omkopplaren vidare. På ett varv utsändes alltså svängningar på fem olika frekvenser, vilka registreras på en radiomottagare vid marken. Ur de registrerade frekvenserna kan senare tryck, temperatur och fuktighet beräknas. De fasta kondensatorerna tjäna som kontrollinstrument.

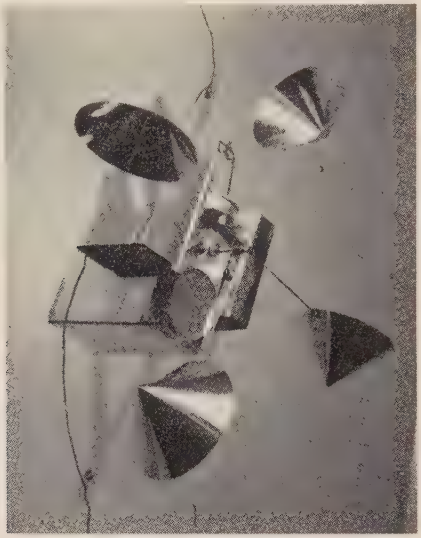


Fig. 1. Väisäläs radiosond.

Luften vid marken utövar ett tryck, vilket man förr alltid brukade kalla barometerståndet, då det angavs med höjden av den kvicksilverpelare, som under tyngdkraftens inverkan gav samma tryck som luften. Normala barometerståndet är 760 mm vid havets nivå. Numera anges lufttrycket i enheten millibar, vilken är avledd ur c. g. s. systemet. 1 millibar (*mb*) är 1 000 dyn/cm² och motsvarar i runt tal 0,75 mm kvicksilver.

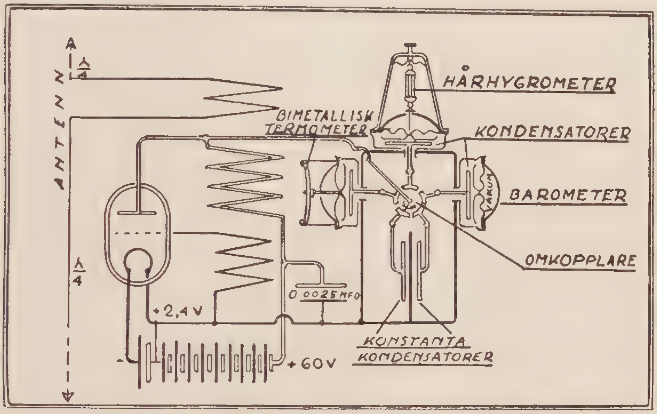

A
λ/4
ANTENN
BIMETALLISK TERMOMETER
HÅRHYGROMETER
KONDENSATORER
BAROMETER
OMKOPPLARE
λ/4
+2,4 V
0,0025 MFD
+60 V
KONSTANTA KONDENSATORER

Fig. 2. Kopplingsschema för radiosonden.

Lufttrycket avtar med höjden allt eftersom den ovanför liggande luftpelaren blir mindre och avtagandet sker enligt Laplace's formel

$$z_1 - z_0 = \frac{RT}{g} \log \frac{p_0}{p_1},$$

där p_1 (och p_0) är trycket på höjden z_1 (resp. z_0) och T är medeltemperaturen i skiktet $z_1 - z_0$. Alltså ju varmare luft desto större höjdskillnad för en och samma tryckdifferens. Formeln kan härledas så. Om ϱ är luftens täthet, gäller enligt gasernas allmänna tillståndslag

$$p = \varrho RT.$$

Trycket av en luftpelare av höjden dz är $g \cdot \varrho dz$, där g är tyngdacceleration. Man har alltså

$$-dp = g\varrho dz.$$

Ur dessa ekvationer får man

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g}{RT} \cdot dz \text{ eller } dz = -\frac{RT}{g} \cdot \frac{dp}{p}$$

och efter integration

$$z_1 - z_0 = \frac{RT}{g} \log \frac{p_0}{p}.$$

Formeln förutsätter, att T är konstant. Är så ej fallet, blir ekvationen något mer komplicerad.

Lufttrycket och därmed tätheten avtar hastigt med höjden. Vid havsytan är trycket c:a 1 000 mb, på 5 km — 500 mb, på 10 km — 270, på 20 km — 50, på 40 km — 1 mb och på 100 km — 0,001 mb o. s. v.

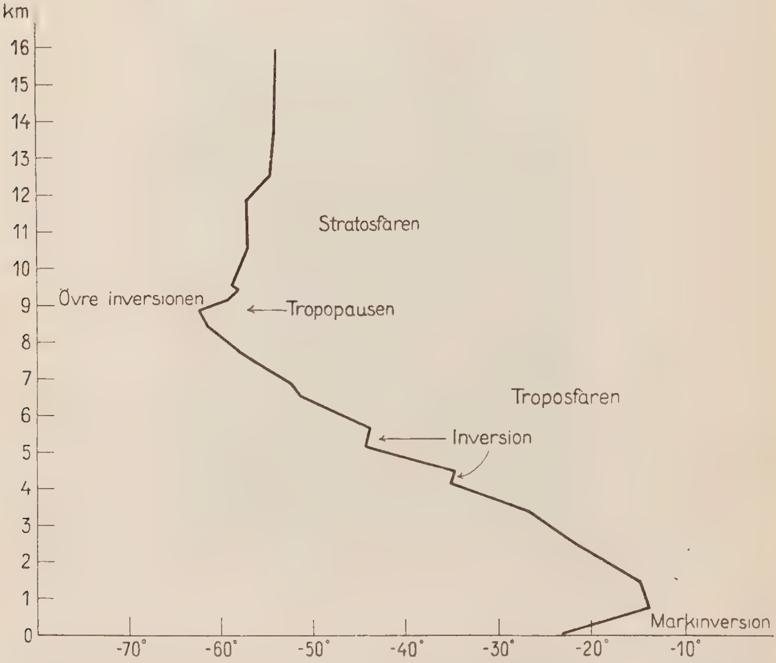


Fig. 3. Höjdtemperaturdiagram. Resultat från en radiosondering i Pajala 25. 1. 1940.

Temperaturen avtar med höjden i genomsnitt 6° per km. I vissa fall är den marknära luften kraftigt avkyld genom utstrålning, särskilt är detta vanligt vid klart och lugnt väder nattetid över snöytor. I sådana fall, som äro normala i de arktiska trakterna året runt och hos oss under vintern, kan temperaturen stiga med höjden upp till 300 à 400 m. Temperaturstegringen kan i extrema fall uppgå till 20° eller mera. Över den kalla markluften ligger alltså varmare luft. Vi kalla fenomenet temperaturinversion. Över inversionen faller temperaturen åter normalt med höjden. Temperaturfallet med höjden fortsätter sedan med ett eller annat mindre avbrott genom hela troposfären. Det är inom troposfären som nästan alla de väderleksfenomen äga rum, vilka vi kunna studera genom direkta ögoniakttagelser. Molnens bildande och upplösning, regn och åska äro fenomen, som helt och hållet tilldraga sig i troposfären.

Vid troposfärens övre gräns, den s. k. tropopausen, upphör temperaturfallet med höjden mer eller mindre plötsligt och ibland inträder där en temperaturstegring, den s. k. övre inversionen. Tropopausens höjd varierar väsentligt. Vid ekvatorn ligger den i genomsnitt på 18 km, på 45° bredd på 12 km och vid polen på c:a 8 km. På en och samma breddgrad ligger den högre i områden, där lufttrycket är högt vid marken än där det är lågt. Ju högre tropopausen är desto kallare är den. Vid ekvatorn finnes i tropopausen den lägsta temperatur, som över huvud taget observerats eller ens beräknats råda någonstädes i naturen på vår jord, nämligen −85° à −90°. Vid 45° bredd är tropopaustemperaturen c:a −60° och vid polen −40° under sommaren och −65° under vintern.

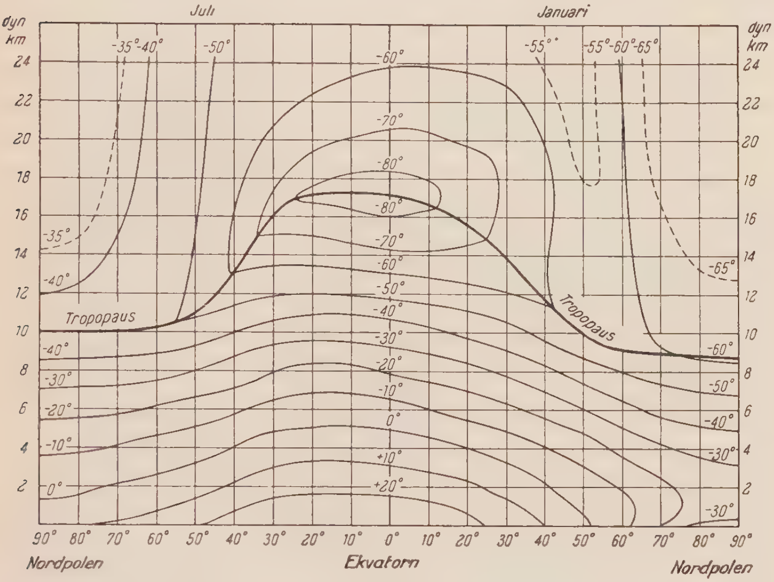


Fig. 4. **Temperaturens fördelning i höjden på olika breddgrader i januari och juli.**

Orsaken till denna egendomliga temperaturfördelning är icke säkert känd, men man vet att dess uppkomst, eller i varje fall variationen i tropopausens höjd och temperatur, i många fall står i samband med vertikala rörelser i tropopausområdet.

Från tropopausen och upp till 30—35 km höjd synes temperaturförändringarna vara små. Hur förhållandena gestalta sig på högre nivåer, kan man inte undersöka genom att uppsända instrument, då det synes vara omöjligt att framställa ballonger av sådant material, att de uppnå höjder över 35 km. Ännu högre luftlager måste därför undersökas på indirekt väg.

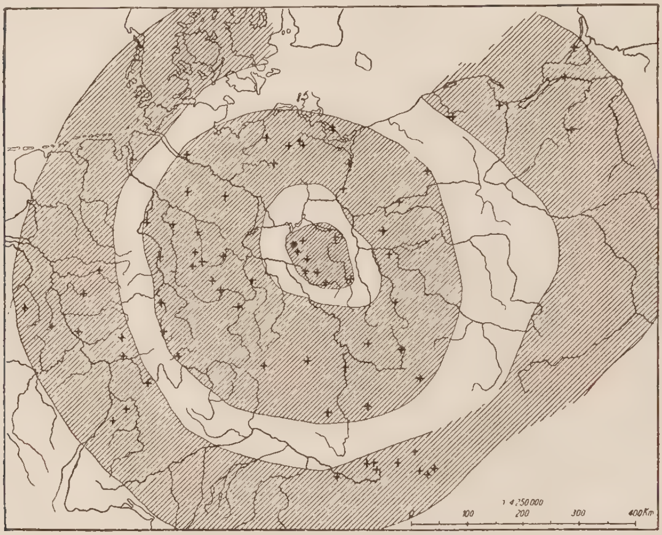


Fig. 5. Ljudzoner vid sprängningen i Jüterbog i Tyskland 1923. De områden inom vilka sprängningen hördes äro skuggade.

Genom att studera ljudvågornas gång vid sprängningar har man funnit, att ljudet kan uppfattas inom ett mindre område närmast ljudkällan. Detta område är omgivet av en zon, inom vilket ljudet icke kan höras. Utanför denna zon är ljudet åter hörbart o. s. v. Det har lyckats att teoretiskt lösa detta problem, och fenomenet förklaras genom en reflexion av ljudvågorna mot ett varmare luftskikt, vilket beräknas ligga på en höjd av 45 à 50 km och ha en temperatur av 50° à 70° C.

Till det resultatet, att temperaturen vid och något över 50 km är relativt hög, har man också kommit genom studium av meteorer. Man har observerat, att meteorerna upphöra att lysa vanligast vid två nivåer, dels vid c:a 45 km och dels vid 80 km, medan det mera sällan förekommer, att meteorerna försvinna vare sig mellan eller över eller under dessa nivåer. Härav har man dragit den slutsatsen, att det vid 80 km är kallt, så att de meteorer, som tränga ned till detta skikt, ha en tendens att avkylas så mycket att de upphöra att lysa. De meteorer, som lysande passera 80 km nivån skulle efterhand komma i varmare luft, varför de skulle kunna fortsätta att lysa till dess de efter 50 km åter råka in i kallare luftskikt och hastigt avkyles, samtidigt med att deras hastighet nedsättes allteftersom lufttätheten ökar.

Den temperaturstegring, som alltså möter mellan 40 och 50 km, förklaras genom förekomsten av ozon i skiktet mellan 50 och 10 km med maximumfördelningen vid något över 20 km. Denna fördelning har beräknats med hjälp av spektrografiska undersökningar vid marken, och de ha i viss mån bekräftats genom mätningar i bemannade och obemannade ballonger. Det är en ytterst ringa mängd ozon, som finns i atomsfären, sammanlagt skulle den endast uppfylla ett skikt av 0,3 cm om den reducerades till normalt lufttryck och 0° (N. T. P.). Men absorptionen i våglängdsområdet < 2 900 Å är så stor, att nästan all energi i solspektrum inom detta intervall absorberas av den ringa mängd ozon, c:a 1 % av totala mängden, som finnes mellan 45 och 50 km nivåerna. Temperaturerna, som ur ljudreflexionerna beräknats till 50° à 70° bli — enligt beräkning gjorda på antagande av strålningsjämvikt och med hjälp av kända absorptionskoefficienter — ungefär lika höga. Dessa värden gälla närmast förhållandena över Europa på 45° — 50° latitud, inom vilket område samtliga dessa mätningar företagits.

Beträffande temperaturförhållandena i skiktet mellan 50 och 80 km äro meningarna delade, men så mycket synes vara säkert, att någon starkare uppvärmning av detta skikt icke äger rum. Där finnes icke någon absorption av solenergi, som skulle kunna höja temperaturen till samma värden som i ozonskiktet, men genom vertikala luftströmmar måste skiktet uppvärmas nedifrån, så att temperaturen faller mindre än 1° per 100 m.

Omkring 80 km måste det ligga en diskontinuitet, och man finner på denna höjd flera fenomen, som tyda på att en kraftig temperaturstegring existerar. Vi ha redan förut omnämnt, att meteorerna försvinna utom i ozonskiktet på 45 — 50 km särskilt på höjden 80 km. På denna senare höjd observeras också de sällsynta s. k. lysande nattmolnen. Norrskensiakttagelser slutligen visa, att norrskenens undre gräns vanligen ligger vid c:a 80 km.

Ur syremolekylens absorption har man beräknat, att en absorption i våglängdsområdet 1 300 till 1 750 Å måste inträffa i intervallet

80 till 120 km. Denna absorption måste medföra en uppvärmning, och på detta sätt förklaras alltså existensen av en inversion vid 80 km nivån. På visst håll har antagits, att de lysande nattmolnen skulle utgöras av iskristaller. Om så vore fallet skulle man få en temperatur av c:a —100° C vid 80 km. Från annat håll har gjorts gällande, att molnen utgöras av fasta partiklar, meteorrester eller vulkanstoft. Bestämningen av temperaturen med hjälp av reflexioner av mycket långa elektromagnetiska vågor, varom mera nedan, har givit temperaturvärden på omkring —70° C i denna nivå, vilket innebär, att temperaturen mellan 50 och 80 km genomsnittligt faller 4° per km.

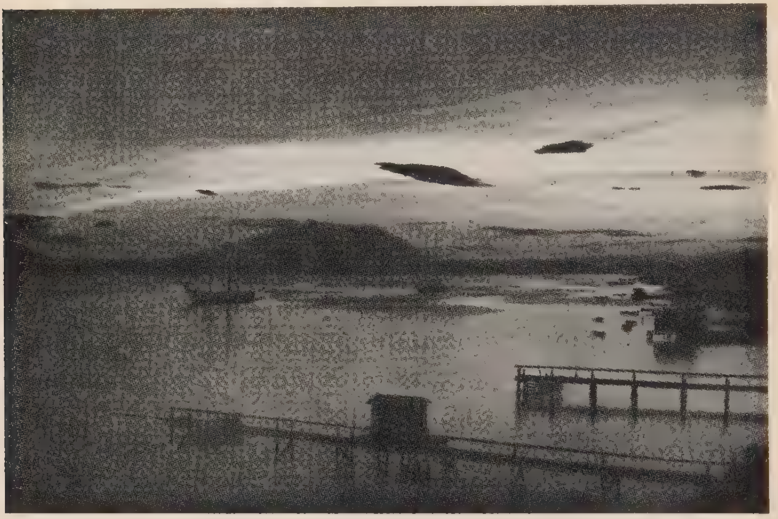


Fig. 6. Lysande nattmoln. Under dessa synas vanliga moln, ej belysta av solen. Foto kl. 24, d. 27. 7. 1909 i Drøbak (Størmer).

Om ingen vertikal blandning av luft från olika nivåer ägde rum, och om diffusionsjämvikt rådde, skulle enligt Daltons lag den relativa mängden av de lättare gaserna stiga med höjden. I troposfären, där temperaturen faller med höjden, äger en ständig vertikal luftblandning rum. I stratosfären däremot är temperaturen inom stora skikt konstant eller stiger med höjden, vilket motverkar vertikala luftrörelser, och man skulle därför kunna tänka sig, att diffusionsjämvikt skulle råda i dessa nivåer. Även om man gör olika antaganden om temperaturfördelningen i stratosfären, kommer man dock alltid till det resultatet, att atmosfären på 150 km skulle bestå huvudsakligen av helium (eller väte), medan kväve och syre mer eller mindre fullständigt skulle ha försvunnit. Vid direkta undersökningar i de nivåer, som kunna nås med ballong, har man trott sig finna, att den vid marken rådande procentuella fördelningen något ändras med höjden, men ändringen är dock betydligt mindre än som motsvarar diffusionsjämvikt. Vegard har studerat norrskenets spektrum och funnit, att där saknas fullständigt vätelinjer och sannolikt även heliumlinjer. De linjer och band som finnas ha identifierats såsom tillhörande kvävemolekylen och syreatomen. Resultatet visar alltså, att diffusionsjämvikt icke kan råda. Det kan vara av intresse att här påpeka, att den s. k. gulgröna linjen i norrskenet länge icke kunde förklaras, då enligt vad man visste en sådan linje icke utsändes av något känt ämne. Man uppställde då den hypotesen, att det fanns en gas, geocoronium, vilken var lättare än väte och vilken dominerade på de höjder 80 à 300 km, inom vilka norrskenet uppträdde. En annan förklaring till linjen var, att den härrörde från frusna kvävekristaller, vilket skulle innebära en synnerligen låg temperatur i norrskensnivån. Den gulgröna linjen har senare kunnat förklaras som uppkommen vid en s. k. förbjuden övergång i syreatomen, vilken kan komma till stånd vid den ringa lufttätheten i dessa höga nivåer.

Vegard har sökt bestämma temperaturen i norrskensregionerna genom bestämning av intensitetsfördelningen i vissa kväveband och har därur approximativt beräknat temperaturmedelvärdet —40° på en höjd av c:a 100 km. Genom mätningar av banden ur vissa linjespektra anser sig Vegard ha konstaterat, att temperaturen inom de olika norrskenshöjderna 100—250 km är konstant, och den skulle alltså vara c:a —40°. Enligt andra forskare, som mätt motsvarande linjebredd i natthimlens ljus, har temperaturer beräknats, som ligga mellan c:a 100° och 700° C. De höjder från vilka natthimlens ljus utsändas ha efter fotometermätningar beräknats till omkring 1 000 km.

Slutligen har man, som förut nämnts, genom studier av radiovågorna fått vissa hållpunkter för spekulationen angående den högsta atmosfärens temperatur. Man har funnit, att radiovågor, som uppsändas mot världsrymden, reflekteras och återkastas mot jorden. Detta förklaras av att det på vissa nivåer existerar skikt i vilka luften är starkt joniserad. Denna del av atmosfären kallas oftast jonosfären, varför stratosfären numera blir benämning på luftskiktet mellan tropopausen och c:a 80 km. Det först kända skiktet är Kennelly Heaviside-skiktet eller E-skiktet på en höjd av 100 km. På en höjd av c:a 240 km ligger vidare det s. k. Appleton-skiktet, eller F-skiktet, i vilket man ofta särskiljer flera olika skikt. Reflexionen i dessa joniserade skikt följer liknande lagar som reflexionen av ljudet. Skikthöjden kan beräknas, om man med en oscillograf uppmäter tidsdifferensen mellan den direkta markvågens och den i det joniserade skiktet reflekterade vågens registrering på mottagaren.

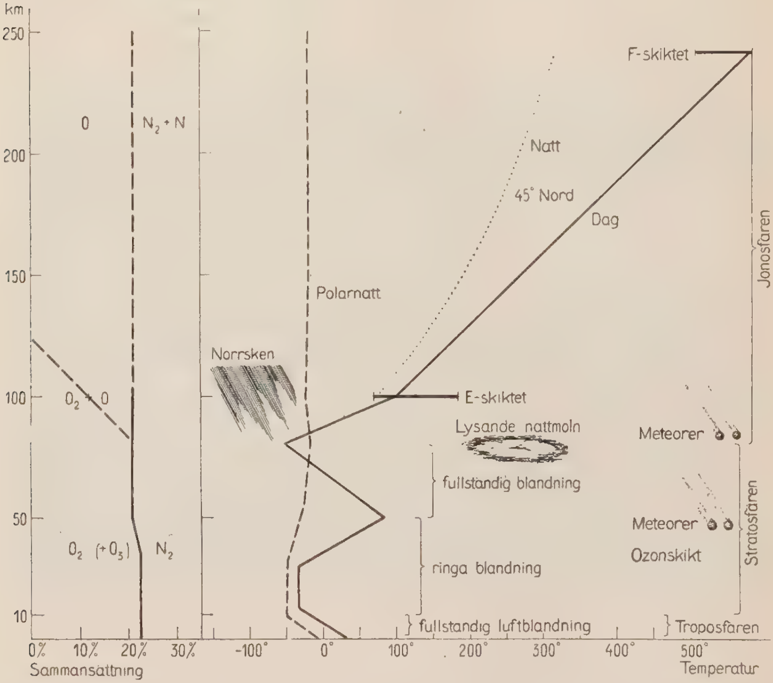


Fig. 7. Temperaturens fördelning och luftens sammansättning på större höjder.

Genom olika metoder, bl. a. genom studiet av absorptionen av radiovågorna i de joniserade skikten, har man beräknat luftens temperatur i dessa skikt. Man har beräknat, att på 100 km temperaturen är c:a 60 — 100° och på 280 km c:a 700° om dagen och 300° om natten, vilket alltså innebär en dygnsamplitud av 400°. Vid dessa beräkningar har man antagit, att gravitationsjämvikt råder i stratosfären. Vegard anser, att denna jämvikt kan väsentligt störas av elektrostatiska krafter, vilka skulle kunna höja atmosfären. Han anser, att det resultat, norrskensundersökningarna givit, nämligen att temperaturen från 100 km och uppåt till c:a 250 km är konstant omkring −40° C, är sannolikast, och att de resultat, som erhållits ur mätningarna av radiovågornas reflexion, äro felaktiga, på grund av att de elektrostatiska krafternas verkningar förbisetts. Det finns emellertid andra skäl, som tala för att temperaturen i den högsta atmosfären är mycket hög. Som förut nämnts existerar icke helium i påvisbar mängd i den högre atmosfären, trots att luften i atmosfären ständigt från radioaktiva jordlager tillföres relativt stora mängder helium, och trots att diffusionsjämvikt skulle fordra en stark ökning av helium med höjden. Den ytterst ringa heliumhalten i de högsta luftskikten förklaras genom att temperaturen och därmed heliumatomens kinetiska energi där är så stor, att de lätta heliumatomerna kunna undkomma jordens dragningskraft och slungas ut i världsrymden.

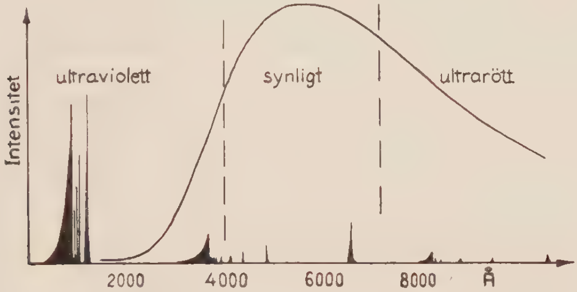


Fig. 8. Intensitetsfördelningen i solspektrum. De skuggade partierna härröra från eruptionerna i solen. Observera intensiteten i ultraviolett.

I fig. 7 har uppritats en kurva, som anger temperaturens ändring med höjden och som visar de fenomen, som äro karakteristiska för vissa nivåer. Temperaturerna bli allt osäkrare ju större höjderna äro, men de ge dock en ungefärlig bild av tillståndet i atmosfären.

Om det nu frågas, vad anledningen är till det här beskrivna atmosfäriska tillståndet med ett flertal diskontinuiteter i temperatur-höjderna, måste i svaret framhållas den betydelse solstrålningen har, samt de olika absorptionsförhållandena. Solens strålningskurva visas i fig. 8. Man observerar den oerhörda intensiteten i ultraviolett, som orsakas av emissionen från eruptionerna i solen och i vilka temperaturerna äro avsevärt högre än på själva solytan. Nu ha de i atmosfären existerande gaserna absorptionsband inom olika våglängder. Ett syreskikt har vid $\lambda = 1\,450$ Å en absorptionsförmåga, som är så stor, att om det vid normaltillstånd (760 mm och 0°) har en tjocklek av 0,005 cm, det genomsläppta ljuset blir 10 % av det infallande. Detta är en absorption, som är större än de flesta metallers vid synligt ljus. En liknande absorption äger rum i ozon. Ozon förekommer blott i en mängd av $0{,}3$ cm (reducerat till N. T. P.) men det absorberar allt ljus, vars våglängd är mindre än 2 900 Å. Absorptionskoefficienterna för vissa gaser i atmosfären äro höga blott inom små våglängdsintervall, vilket förklarar uppkomsten av flera skikt med speciella egenskaper. Så är t. ex. syrets absorption i området 1 750 till 2 050 Å mycket liten, varför energi finnes kvar i solljuset, så att ozonet kan absorbera denna på en lägre höjd. Ozonabsorptionen är mycket stark, varav följer, att den största absorptionen äger rum redan i ozonskiktets översta delar. Medan ozon existerar till mer än 95 % mellan höjderna 20 och 40 km, är absorptionen störst i nivån mellan 45—50 km, och följaktligen är temperaturstegringen där störst.

Den skillnad i temperatur, som existerar mellan Vegards resultat och andra forskares, har nyligen diskuterats av Penndorf, vilken antar, att då solstrålningen är värmekällan, följden måste bli temperaturvariationer, icke blott under dygnet utan också med latituden och årstiderna. Vegards resultat ha erhållits genom norrskensmätningar i Tromsö (71° nordlig latitud), och dessa ha utförts huvudsakligen vintertid, då strålningen varit ringa eller ingen, medan övriga mätningar, som gjorts beträffande elektromagnetiska vågor ha utförts på 45°—50° nordlig latitud. Tyvärr ställer det sig svårt att göra jämförelser, då man knappast kan utföra norrskensmätningar i mellersta Europa och det ej heller synes gå att utföra mätningar av elektromagnetiska vågors reflexion i polartrakterna, då efter vad man erfarit de joniserade skikten icke synes existera under vintern i Arktikum. Detta senare faktum är ett kraftigt stöd för Penndorfs teori. Hur man skall tänka sig att den synnerligen låga temperaturen över Arktikum på 100 à 200 km kan existera samtidigt med den höga temperaturen över ekvatorn är emellertid ännu en öppen fråga, då en sådan temperaturmotsättning borde medföra en enorm luftrörelse i dessa nivåer.

Det kan slutligen framhållas att då vi tala om temperatur i de högsta luftskikten, vi mena den molekylära kinetiska energien hos luften. Någon möjlighet att mäta denna temperatur med termometer, om man nu kunde föra upp en sådan till denna höjd, existerar inte. Luftens täthet är så ringa, att om en luftpelare mellan 100 och 150 km sammanpressades till atmosfärtryck, skulle den få en höjd av blott 1 cm. I den tunna luften bestämmes den temperatur en kropp antar praktiskt taget endast av kroppens absorptions- och emissionsförmåga, och denna temperatur kan bli en helt annan än lufttemperaturen, bestämd ur kinetiska energien. En människa skulle på denna höjd nattetid snarare förfrysa än förbrännas även om luftens temperatur skulle uppgå till flera hundra grader.

De uppgifter angående temperaturförhållandena i den högre atmosfären, som här lämnats äro givetvis tämligen osäkra, och ju högre upp man kommer, desto större måste osäkerheten bli. Medan temperaturen inom de områden, som kunna mätas direkt med instrument, kan anges med fel mindre än 5°, är temperaturen på 50 km kanske rätt på 20° när. På 300 km åter växla sifferuppgifterna inom ett intervall på flera hundra grader. Undersökningarna inom detta område ha till största delen utförts först under de sista tjugu åren, och man kan förmoda, att de undersökningar som pågå snart skola lämna sådana resultat, att även kunskapen om den högsta atmosfärens tillstånd avsevärt förbättras.

Bland utförligare beskrivningar av de högsta luftlagrens temperaturförhållanden kan framhållas: H. Köhler, »Glimtar från undersökningar av de högre luftlagren» ur Kungl. Vetenskapssocietetens årsbok, Uppsala 1938 och R. Penndorf, »Die Temperatur der Hohen Atmosphäre». Meteorologische Zeitschrift 1941 Hefte 1, sid. 1.

Bokanmälningar.

Lennart Smith, *Lärobok i oorganiska undervisningsexperiment.* Gleerups förlag, Lund 1941. 306 sidor, 114 illustrationer; pris bunden kr. 9: 75.

Det nya tillskott till vår kemiska lärobokslitteratur, som professor Smiths senaste arbete utgör, är avsett att vara dels en lärobok för bruk vid de akademiska kurserna i oorganiska undervisningsförsök, dels en handledning för dem, som redan äro ute i praktiskt lärararbete. Det är med stora förväntningar man går till studiet av detta arbete, som man väntar sig skola återspegla akademikernas syn på skolans kemiundervisning, dess tillstånd och behov. I vissa stycken bliva förväntningarna väl fyllda, i andra tyvärr svikna.

Arbetets stora och oomtvistliga förtjänst synes mig ligga i de utomordentligt noggranna beskrivningarna av allmän kemisk teknik, apparater och försök. Författaren har verkligen inte sparat sig någon möda att in i minsta detalj redogöra för hur försöksapparaturen bygges upp, hur försöket förberedes, utföres och avslutas, att göra viktiga observanda och att varna för nära till hands liggande missgrepp. Gång på gång möter man i arbetet iakttagelser och råd, som just stämma med egna erfarenheter. Det är en mycket erfaren experimentator, som står bakom orden, det är tydligt, och det länder honom till heder att till tjänst för lärarna — blivande och redan färdiga — ha sammanställt sina rika erfarenheter på detta område. Jag vill särskilt framhålla sidorna 39—44, som ge en mångfald mönstergillt framställda kloka, riktiga och fullständiga allmänna råd beträffande experimentens utförande inför ett auditorium. — Ibland kan måhända fullständigheten drivas litet för långt och lämna för litet rum åt lärarens sunda förståndsutövning, men denna anmärkning saknar vikt, och kvar står den säkra förvissningen, att den, som följer bokens föreskrifter också kan vara säker på att nå det åsyftade resultatet. — En annan formell anmärkning gäller det förhållandet, att författaren inte accepterat gängse förkortningar för gram, kubikcentimeter, kalori och kilokalori. Volymsenheten, även då det gäller lösningar, är genomgående »cc» i stället för milliliter.

Tyvärr motvägas arbetets stora förtjänster av brister, som synas mig vidlåda själva stoffvalet. Anmärkningarna kunna här sammanfattas i omdömet, att arbetet bjuder allt för mycket gammalt och allt för litet nytt. Det finnes dock en ej föraktlig nyare litteratur i fråga om undervisningsförsök av amerikanskt, engelskt, tyskt och i någon mån även svenskt ursprung, som hade förtjänat den offentliga sanktion, som en lärobok meddelar. I det stora hela äro de anförda försöken starkt traditionsbundna och det nya allt för sparsamt förekommande. Men vad kemiundervisningen i skolan just nu behöver, är en frigörelse från det allt för gamla och en förnyelse av lärostoff, synpunkter och försök. Med hänsyn till sättet för kemiundervisningens bedrivande i skolorna nu för tiden, hade det också varit lyckligt, om i boken även ingått en handledning i laborationsövningars anordning och ledning. Och slutligen vore i en lärobok av denna syftning också vederhäftiga anvisningar på uppgifter för enskilt arbete i hög grad på sin plats.

Läroboken hade kunnat bli ett standardverk, om författaren utmönstrat en del allt för traditionellt stoff och i stället givit oss de framsteg, som gjorts på detta område i samma mönstergilla och noggranna framställning, som utmärker hela arbetet. Man måste beklaga, att så ej skett, men detta förhållande får ej skymma bort, att det som ges knappast kunde ha givits på ett bättre sätt.

G. Starck.

E. H. SØRENSEN, *Fysikaliske målinger*. Demonstrasjoner og elevforsøk for realgymnasiet, lærerskolen og de tekniske skoler. Fabritius & Sønner, Oslo 1941, 166 s.

Boken innehåller ett åttiotal kvantitativa fysikaliska försök, konstantbestämningar och försök, där det gäller att bekräfta en fysikalisk lag. Försöken äro avsedda att utföras antingen som demonstrationsförsök eller som elevlaborationer. Beskrivningarna äro mycket omsorgsfullt utarbetade, inga detaljer lämnas obeaktade. Förf. bygger tydligen på en rik erfarenhet.

Försöken äro anpassade efter de vid de norska gymnasierna använda läroböckerna i fysik, till vilka hänvisningar göras i texten. Med hjälp av sin lärobok och denna handledning kan eleven på egen hand sätta sig in i försöket och hur det skall utföras. En sådan förberedelse skall föregå laborationsarbetet, vilket är nödvändigt, då förf. tänker sig detta ordnat så, att eleverna arbeta i grupper om tre laboranter, vilka göra var och en sitt försök. Förf. har gått in för detta system, då de vanliga demonstrationsapparaterna härvid kunna användas och ej särskilda laborationsapparater i stort antal behöva anskaffas, vilket ju är nödvändigt vid arbete på gemensam front. Vid svenska läroverk går man ju mest efter den senare linjen, men många torde i likhet med anmälaren inskjuta ett eller annat individuellt arbete, då så är lämpligt. Det är då bra att ha tillhands en så detaljerad handledning som den föreliggande. Men även läraren kan ha stor nytta av den, inte minst av de många anvisningarna till förebyggande av felkällor vid försöken.

En förteckning över »Litteratur for fysikklærere» upptar ett hundratal arbeten, läroböcker, speciallitteratur, tidskrifter m. m., lämpliga för referensbiblioteket.

C. E. B.

THS. SKJULSTAD og B. SOLLESNES, *Samfunnsregning*, Gyldendal, Oslo 1941, 244 s., kr. 5: 70.

Enligt den nya läsplanen för den norska realskolan skall vid sidan av undervisningen i matematik — alltså som ett fack för sig — införas »Samfunnsregning». Den ingår som ett led i en avsedd social uppfostran. I läsplanen heter det: »Samfunnsregningen skal gjennom oppgaver som er valt med dette mål for øye, foruten å gi elevene konkret orientering i forskjellige økonomiske forhold i det moderne samfunns private og offentlige liv, også i det hele venne dem til å nytte det de ha lært i regning og matematikk til slig orientering, og på det vis gi dem en fruktbar impuls som kan vare». Citatet är hämtat ur författarens förord, där det vidare heter: »Etter direktivene må samfunnsregningen representere noe vesentlig annet enn det vi tidligere kjenner som praktisk regning. Det saklige momentet må komme sterkere frem enn det før vært alminnelig» ... »De oppgaver fra næringslivet som har vært tatt med i regningen tidligere, har vesentlig hentet sitt stoff fra vareomsetningen. Vi har derimot forsøkt først og fremst å få belyst vilkår og lønnsomhet i *produksjonslivet* både fra et privat syn og fra samfunnssyn. Vi ha like ens lagt stor vekt på å føre elevene inn i en 'energetisk' tankegang gjennom problemer som behandler både biologisk og mekanisk nytteeffekt. Under dette har vi òg forsøkt å belyse energiomsetninger i samfunnshusholdet.»

Det är intressant att se, hur förff. sökt förverkliga sitt program. Efter en mycket välskriven inledning om grafisk framställning (35 sidor) följa problem omspännande hela samhällslivet, många av dem ingalunda enkla. En svensk lärare ställer omedelbart frågan: »Hur är det möjligt att få plats för detta ämne i den norska realskolan?» Hos oss är det omöjligt och även mycket diskutabelt, om det vore önskligt. Det synes höra till specialutbildningen.

Men boken saknar ingalunda intresse för en svensk läsare. Den ger en utmärkt inblick i norskt samhällsliv, och läraren ger den många goda uppslag till problem.

C. E. B.

Gradualavhandlingar.[1]

PER OHLIN, *An X-ray Determination of h/e with Counter and Bent Crystal*, Uppsala Universitets Årsskrift N:r 1 (1941). Disp. i Uppsala den 8 febr. 1941. Opponenter: Docent STEN VON FRIESEN och fil. lic. SIGVARD EKLUND.

Bland olika metoder för bestämning av Plancks konstant h är röntgenmetoden den noggrannaste. Denna metod är baserad på Einsteins fotoelektriska lag, vilken ger en relation mellan en given våglängd λ i det kontinuerliga röntgenspektrum och den lägsta spänning V vid vilken denna våglängd uppträder. Om man över ett röntgenrör har spänningen V, ha de från katoden utgående elektronerna, då de träffa antikatoden, energien eV, där $e =$ elektronladdningen. Energien hos från antikatoden utgående röntgenkvanta av våglängden λ resp. frekvensen ν är $h\nu$. Enl. Einsteins lag är då $eV = h\nu$. För bestämning av h eller h/e har man således att mäta intensiteten för en våglängd λ i det kontinuerliga spektrum som funktion av spänningen över röntgenröret och bestämma den gränsspänning V, vid vilken strålningen av våglängden λ upphör; h/e och h beräknas sedan lätt ur Einsteins lag.

---

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Flera h-bestämningar med denna metod ha under senare år utförts. Emellertid äro de därvid erhållna resultaten c:a 2 ‰ lägre än det h-värde, som med hjälp av de med relativt stor noggrannhet kända värdena på e och e/m ($m =$ elektronmassan) kan beräknas ur formeln för Rydbergskonstanten. Denna diskrepans är flera gånger större än de uppgivna felgränserna.

I förf:s avhandling beskrives en ny bestämning av h/e med röntgenmetoden. Vid detta arbete ha försök gjorts att såvitt möjligt förbättra de experimentella metoderna. Sålunda har en speciell högvacuumspektrograf konstruerats, varvid krökt kristall enl. en av H. H. Johann angiven metod använts. Med denna metod får man väsentligt högre intensitet än med plan kristall. Vidare användes Geiger-Müller-rör för mätning av intensiteten, medan man vid tidigare undersökningar använt jonisationskammare. Slutligen har ett aggregat för konstant spänning konstruerats, som håller spänningen över röntgenröret konstant inom $< 0{,}1$ ‰ av det önskade värdet. Mätningarna ha utförts för fyra olika våglängder motsvarande spänningsområdet 3—5 kV. Det därvid erhållna värdet, $h/e = (1{,}3787 \pm 0{,}0008) \cdot 10^{-17}$ erg. sek/e. s. e. överensstämmer inom felgränserna med det ur formeln för Rydbergskonstanten beräknade värdet $h/e = 1{,}3792$. Resultaten av samtliga nyare h/e bestämningar äro sammanställda i tabellen.

	År	Använd spänning	$h/e \cdot 10^{-17}$	Angivet fel
Duane m. fl.	1921	24 kV	1,3787	± 0,0008
Feder	1929	7,3—9,4 kV	1,3754	0,0008
Kirckpatrick	1934	22 kV	1,3753	0,0002
Schaitberger	1935	9,6—14,7 kV	1,3770	0,0006
Du Mond o. Dollmann	1937	10 KV, 20 kV	1,3758	0,0003
Ohlin	1940	3—5 kV	1,3787	0,0008

Som synes ge de tidigare mätningarna med undantag av Duanes 1,5—2,5 ‰ lägre värde än förf:s och det ur formeln för Rydbergskonstanten beräknade $h/e - 1{,}3792$. En orsak till denna bristande överensstämmelse har konstaterats. Det har nämligen visat sig, att gastrycket i röntgenröret inverkar på resultatet. För tryck under 10^{-5} mm Hg ger metoden reproducibla resultat, medan för högre tryck de uppmätta värdena bli avsevärt lägre. Sålunda har förf. genom att öka trycket till c:a $4 \cdot 10^{-4}$ mm fått värden, som äro 1,3 ‰ lägre än de som erhållits vid lägsta möjliga tryck. Orsaken till denna effekt är ej utredd. Emellertid visar effekten, att röntgenmetoden ej är användbar, om inte gastrycket i röntgenröret är mycket lågt. Som detta ej beaktats vid tidigare mätningar, ha dessa lett till mindre tillförlitliga resultat.

ANDERS REIZ, *A Study of External Galaxies with Special Regard to the Distribution Problem,* Lund 1941. Disp. i Lund den 24 maj 1941. Opponenter: professor KNUT LUNDMARK och professor BENGT STRÖMGREN.

Den metagalaktiska forskningen är en av astronomiens yngsta grenar. Föga mera än tjugo år ha förflutit sedan det definitivt visades, att spiralnebulosorna, eller, som den moderna termen lyder, vintergatorna icke voro medlemmar i vår egen vintergata utan tillsammans utgjorde byggnadsstenar i en större enhet, det metagalaktiska systemet. Huvuddragen av denna bildning känna vi, detaljerna däremot äro ytterst sparsamt diskuterade.

Föreliggande arbete avser främst att på grundval av de apparenta magnituderna behandla rymdfördelningen av vintergatorna i riktning mot det absorptionsfria området kring den norra galaktiska polen, i en sfärisk kalott ned till + 50° galaktisk bredd.

Materialet, som ligger till grund för denna diskussion, har insamlats vid observatoriet Königstuhl i Heidelberg. Samtliga uppmätta och skattade data äro publicerade i en till avhandlingen hörande katalog, omfattande 4666 vintergator.

Inledningskapitlet presenterar problemställningen. Vad karakteriserar det metagalaktiska systemet: isotropi, d. v. s. lika rymdtäthet i alla riktningar, eller olikformig fördelning med starkt markerade »cluster»-tendenser? Avtager eller tilltager antalet vintergator per volymsenhet när avståndet växer, eller är tätheten konstant? Besvarandet av dessa frågor göres i avhandlingens sista kapitel; de tidigare avsnitten förbereda detta.

Plåtmaterialet behandlas i andra kapitlet, och tredje kapitlet är ägnat åt en diskussion av de apparenta magnituderna. Dessa äro skattade med hjälp av stjärnräkningsmetoden, vilket förfarande visat sig vara både bekvämt och noggrant. Särskild uppmärksamhet ha ägnats åt tillfälliga och systematiska fel i de apparenta magnituderna. Genom ett grafiskt förfarande reduceras dessa till Harvard-systemet. Det yttre medelfelet i en observation beräknas till $0\overset{\mathrm{m}}{.}34$.

Kapitel 4 diskuterar de absoluta magnitudernas fördelning på grundval av avstånds-hastighets-relationen. Dispersionen i absoluta magnitudkurvan antar ett värde omkr. $0\overset{\mathrm{M}}{.}9$. Intimt sammanhängande med frågan om täthetsfunktionens utseende är frågan om existensen av en eventuell korrelation mellan absolut och apparent magnitud, vilket beroende även diskuteras.

Förekomsten av förmörkande materia i olika galaktiska zoner behandlas i det femte kapitlet. Det visar sig, att under vissa, approximativt uppfyllda antaganden, kan den absorberande materiens inflytande försummas så snart galaktiska latituden överstiger 50°.

De teoretiska fundamenten för bestämning av täthetsfunktionen äro föremål för behandling i sjätte kapitlet. Integralekvationen

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, v(y)\, dy,$$

stellarstatistikens fundamentalekvation, ger sambandet mellan fördelningsfunktionerna av de apparenta och absoluta magnituderna och av logaritmerna för avstånden. Förf. påvisar, att denna integralekvation har behandlats av T. Levi-Civita redan femton år innan K. Schwarzschild publicerade sin klassiska lösning. Vissa antaganden om funktionerna u och f diskuteras på grundval av den Schwarzschildska lösningen; bl. a. förklaras frekvensmaxima av högre ordning i stjärnornas absoluta magnituder, erhållna av G. Strömberg ur en numerisk lösning av fundamentalekvationen, såsom orsakade av periodiska variationer i funktionen u.

Sista kapitlet innehåller resultaten av beräkningarna av rymdtätheterna med användning av Malmquist-Lindblads metod.[1] Beräkningarna äro baserade på absoluta medelmagnituden $M_0 = -15\overset{\mathrm{M}}{.}0$ och på dispersionen $\sigma_M = 0\overset{\mathrm{M}}{.}9$. Täthetsfunktionens förlopp i de åtta ytlika regioner, vari det undersökta området delats, åskådliggöras genom diagram, som visa rymdtäthetens variation med avståndet. Existensen av ett metagalaktiskt moln i det inre systemet med en täthet mer än fem gånger bakgrundstätheten synes bekräftad. Utanför denna bildning, som sträcker sig till avstånd av storleksordningen åtta megaparsecs, närma sig tätheterna ett konstant värde för samtliga regioner, utgörande mellan en och två vintergator per kubikmegaparsec.

---

[1] För en redogörelse för denna metod, se doc. Å. Wallenquists artikel i Elementa, årg. 20: 4, sid. 255.

Pristävlan.

Härmed inbjudas elever vid allmänna läroverk, tekniska gymnasier och med dessa jämnställda enskilda läroanstalter till en pristävlan. Det gäller att så fullständigt och vackert som möjligt lösa minst tre av nedanstående matematiska uppgifter.

Tävlingsskrift skall insändas till Elementas red., Karlbergsvägen 16, Stockholm, före den 1 juli 1942 och innehålla uppgift om namn, ålder och bostadsadress samt det läroverk (ring, avdelning) författaren tillhör eller där avgångsexamen avlagts våren 1942.

Matematiklärarna ombedjas rikta sina elevers uppmärksamhet på denna tävlan. Tidskriften finnes ju i samtliga referensbibliotek och i flertalet lärjungebibliotek. Uppgifterna äro dessutom avtryckta i tidskriftens »Problemhäfte 1941». De äro författade av den från tidskriftens problemavdelning välkända signaturen X.

Samtliga läsare av tidskriften inbjudas att utom tävlan insända lösningar till en eller flera uppgifter.

De bästa lösningarna komma att införas i tidskriftens septemberhäfte 1942.

Första pris utgöres av årg. *1—22* (1920—1941) av Populär Astronomisk Tidskrift, skänkta av Svenska Astronomiska Sällskapet, och andra pris av årg. *15—24* (1932—1941) av Elementa, inbundna i fem klotband. Dessutom utdelas några pris, bestående av en eller flera av Elementas senare årgångar.

Uppgifter.

1. Till en parabel dragas två fasta tangenter. En rörlig tangent skär dessa i A och B. Vilket är det minsta värde sträckan AB kan antaga?

2. Den vid C rätvinkliga triangeln ABC:s yta är T. På sidan AB väljes punkten D så, att de i trianglarna ACD och BCD inskrivna cirklarna bli lika stora. Visa, att längden av CD är $\sqrt{T}$.

3. Från en rörlig punkt P på en cirkel fällas normalerna PN_1 och PN_2 mot två fixa diametrar i cirkeln. Sök geometriska orten för de in- och vidskrivna cirklarnas medelpunkter i triangeln PN_1N_2.

4. En triangels vinklar äro α, β och γ; de inre bissektriserna äro l_a, l_b och l_c. Visa att punkterna $\left(l_a;\ \frac{\alpha}{2}\right)$, $\left(l_b;\ \frac{\beta}{2}\right)$ och $\left(l_c;\ \frac{\gamma}{2}\right)$ i ett polärt koordinatsystem $(r;\ v)$ ligga på en rät linje. Jämför ytan av den triangel, som denna linje bildar med strålarna $v=0$ och $v=\frac{\pi}{2}$ med den givna triangelns yta.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1190) *Upplös* $\frac{\sin 2x}{2} - \cos^2 v \sin x - \frac{\sin^3 v}{2}$ *i två faktorer.* X.

1191) *I tetraedern ABCD är basytan ABC given. Normalen till basytan i en punkt P skär sidoytornas plan i* Q_1, Q_2 *och* Q_3. *Om* $PQ_1 + PQ_2 + PQ_3$ *bibehåller samma värde, hur P än väljes inom triangeln ABC eller på dess omkrets, var ligger då hörnet D?* X.

1192) *Genom en fix punkt på en cirkel drages en korda, som skär en fix diameter i P och periferin i Q. Bestäm maximilängden av sträckan PQ.* X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1193) Förenkla uttrycket

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2 : \left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right].$$

Svar: 1.

1194) Lös ekvationssystemet $\left.\begin{aligned}\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}&=1{,}6\\ \frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}&=0{,}6\end{aligned}\right\}.$

Svar: $x = y = \frac{1}{3}$.

1195) Förenkla uttrycket $\sqrt{(\log ab)^2 - \log a^4 \cdot \log b - 4 \log \frac{a}{10b}}$.

Svar: $\log \frac{a}{100b}$.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1193—1197, 1201 äro insända av *X.*, 1198—1200 av *P.*, 1202—1203 av *G. Printz.*

1196) I en triangel med omkretsen $2p$ är $r_a = a$. Beräkna $r_b + r_c$.

Svar: p.

1197) I triangeln ABC äro de medianer som dragas från B och C vinkelräta mot varandra. Beräkna $(b^2 + c^2) : a^2$.

Svar: 5.

1198) Lös ekvationen $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$.

Svar: $22°{,}5 + n \cdot 45°$; $\pm 60° + n \cdot 180°$.

1199) I en vid A rätvinklig triangel ABC dragas medianen AM och bissektrisen AD. Triangeln AMD befinnes utgöra 13,4 % av triangeln ABC. Beräkna dennas vinklar.

Svar: $30°{,}0$; $60°{,}0$; $90°{,}0$.

1200) Tre lika cirklar äro lagda så, att var och en går genom de två övrigas medelpunkter. Till cirklarna dragas de tre tangenter, som tangera två av cirklarna och som delvis ligga inom den tredje. Dessa tangenter bilda en triangel, vars yta sökes. Cirklarnas radier äro r.

Svar: $r^2 \left(\frac{13\sqrt{3}}{4} - 3\right)$.

1201) En kub och en regelbunden oktaeder äro omskrivna kring samma sfär med radien r. Visa, att polyedrarnas hörn alla ligga på en annan klotyta och angiv dess radie.

Svar: $r\sqrt{3}$.

1202) Tangenten i en punkt P på en ellips råkar storaxeln i M och lillaxeln i N. Storaxelns ändpunkt A förenas med P, varvid AP förlängd skär lillaxeln i B. Visa, att MN och AB delas enligt gyllene snittet i P, om trianglarna PAM och PBN äro lika stora.

1203) I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är $AB : AC = k$. Bestäm excentriciteten för en genom A gående ellips med brännpunkterna i B och C.

Svar: $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k+1}$.

Lösn. till uppg. 1161—1163.

1161) *Man hyvlar av kanterna på en regelbunden tetraeder så, att varje sidoyta minskar lika mycket runt om. Hur stor del av tetraederns volym är kvar, då av varje ursprunglig sidoyta endast medelpunkten återstår?* *X.*

Varje plan, som erhålles vid hyvlingen, är vinkelrätt mot sammanbindningslinjen mellan mittpunkten av tillhörande kantlinje och tetraederns mittpunkt O. Vinkeln mellan de linjer, som förena O med två närliggande kanters mittpunkter är rät. Efter fullbordad hyvling begränsas restkroppen endast av de sex hyvlade ytorna och måste därför vara en kub, vars volym utgör $\frac{1}{9}$ av tetraederns.

S. L.

Även löst av *F. E.* och *Arne Johansson.*

1162) *I en oändlig följd av storheter* a_1, a_2, a_3, ... *byta först* a_1 *och* a_2 *plats, därpå byta* a_2 *och* a_1 *plats med* a_3 *och* a_4, *därefter* a_3, a_4 *och* a_2 *med* a_1, a_5 *och* a_6 *o. s. v., så att den n:te operationen innebär platsbyte mellan de n då främsta storheterna och de n därpå följande med bibehållen ordningsföljd inom vardera gruppen. Komma någon gång* a_1 *och* a_2 *att samtidigt återfå första, resp. andra platsen?* *B-r.*

Den n:te operationen innebär, att ordningsnumren $1, 2, \ldots n$ ökas med n, medan $n+1, n+2, \ldots 2n$ minskas med n. Den storhet, som efter den n:te operationen står först, får då sedan successivt ordningsnumren $n+2$, $2n+4$, $n+1$, $2n+5$, n o. s. v., så att den åter kommer först efter $1 + 2(n+1)$ nya operationer eller $3n + 3$ från början räknat. Storheten a_1 står alltså först efter $0, 3, 3^2+3, 3^3+3^2+3, \ldots$ eller generellt $\frac{3^p-3}{2}$ operationer. Storheten a_2 står först efter $1, 3+3, 3^2+3^2+3, \ldots$ eller generellt $3^{r-1} + \frac{3^r - 3}{2} = \frac{5 \,.\, 3^{r-1} - 3}{2}$ operationer, samt på andra plats två steg tidigare, efter $\frac{5 \,.\, 3^{r-1} - 7}{2}$ operationer. Man skulle alltså ha $3^p = 5 \cdot 3^{r-1} - 4$, vilket tydligen ej kan gälla för positiva heltalsvärden på p och r. Den angivna placeringen återfås således aldrig.

B-r.

Även löst av *F. E.* och *S. L.* Den senare har givit följande generalisering av problemet: Två ursprungligen konsekutiva element kunna aldrig åter samtidigt intaga sina utgångslägen.

1163) *O är en fast, P en rörlig punkt på en given cirkels periferi. På tangenten i P avsättes* $PT_1 = PT_2 = PO$. *Ortkurvan för* T_1 *och* T_2 *jämte den givna cirkeln avgränsa fyra områden (ett av dem cirkeln), vilkas ytor skola beräknas.* *G. Printz.*

Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som periferivinkeln på samma båge, varför vinkelhastigheten hos PT är dubbla OP:s.

Om P' är en närliggande punkt på cirkeln, så blir ytelementet $P'PTT'P'$ dubbelt så stort som ytelementet $OPP'O$, bortsett från termer av högre ordning. *Om OP överfar en viss yta, är motsvarande yta för PT_1 dubbelt så stor.*

Härav följer lösningen sålunda. I cirkeln inskrives en liksidig triangel OAB. Dess yta är $\triangle$; de omgivande cirkelsegmenten ha vardera ytan S. Cirkelns tangenter i A och B råkas i kurvans dubbelpunkt C; $\triangle ABC \cong OAB$, OC är ortkurvans symmetriaxel. Enl. ovanstående sats ha två av de delar, vari AC och BC dela det kloliknande området närmast omkring cirkeln vardera ytan $2S$; den tredje delen ytan $\triangle - S$. »Klons» yta är alltså $\triangle + 3S =$ $=$ cirkelns yta. Medan P genomlöper cirkeln ett varv från O och tillbaka igen, överfar PT_1 en yta $=$ dubbla cirkeln. Då den överfarna ytan består av »klon» och det ena av de två skärformade områdena intill »klon», måste varje »skäras» yta vara $=$ cirkelns yta.

X. och *S. L.*

Även löst av *Arne Johansson.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1941.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x(y-1) = y^2 - 1; \\ x + x^2y - xy^2 = 1. \end{cases}$$
2. I en rätvinklig triangel förhålla sig kateterna som 1 : 3. Den inskrivna cirkelns radie är 1 cm. Beräkna triangelns yta.
3. En person insatte 100 kr i en bank vid slutet av varannan månad fr. o. m. februari 1931 t. o. m. december 1940. Räntefoten var hela tiden 3 %, och räntan lades till kapitalet vid slutet av varje år. Hur mycket hade han innestående i banken den 1 januari 1941?
4. I triangeln ABC är sidan $AB = 8$ cm och sidan $AC = 12$ cm. Medianen AD till sidan BC utdrages, varvid den skär den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln i E. Beräkna längden av sidan BC, då AE är 26 cm.
5. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Sidorna AB, BC, CD och DA äro i ordning 60 cm, 52 cm, 25 cm och 39 cm. Beräkna de delar, i vilka diagonalen AC delas av bissektrisen till vinkeln B.

6. I triangeln *ABC* är sidan $AB = 2{,}4$ cm, sidan $AC = 4{,}5$ cm och ytan $= 2{,}7$ cm². Beräkna triangelns vinklar i de båda fall, som äro möjliga.
7. Från en ort *A* observeras ett kyrktorn i en ort *B*, belägen rakt öster om *A*, och en semafor i en ort *C*, belägen rakt söder om *B*. Orterna *A*, *B* och *C* ligga i samma horisontalplan. I *A* synes kyrktornets spets under en elevationsvinkel av $7°{,}0$ och sträckan *BC* under en synvinkel av $30°{,}0$. Beräkna den elevationsvinkel, under vilken kyrktornets spets synes från mittpunkten på sammanbindningslinjen *AC*.
8. I en rätvinklig triangel *ABC*, i vilken kateterna äro 20 cm och 15 cm, drages en med hypotenusan *AB* parallell transversal, som skär kateterna i *D* och *E*. Dessa punkter sammanbindas med hypotenusans mittpunkt *M*. Det vinkelräta avståndet från *C* till transversalen *DE* är x cm och ytan av triangeln *DME* y cm². Uttryck y som funktion av x. Bestäm medelst grafisk metod eller på annat sätt det största värde, som y kan antaga.

Resultat: **1.** $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline y & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$. **2.** $\dfrac{13+4\sqrt{10}}{3} = 8{,}55$ cm². **3.** 6965 kr. **4.** $2\sqrt{88} = 18{,}76$ cm. **5.** 30 och 26 cm. **6.** Vinklarna *A*, *B* o. *C* äro i ena fallet resp. $30°$; $123°{,}64$; $26°{,}36$ i det andra $150°$; $19°{,}66$; $10°{,}34$. **7.** $12°$. **8.** $y = \dfrac{25x\,(12 \quad x)}{24}$; $y_{\max} = 37{,}5$ cm² för $x = 6$ cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. Lös ekvationen $\sin x \sin 3x + \cos 2x = 1$.
2. Höjden i en regelbunden tresidig pyramid är hälften så stor som baskanten. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor.
3. Diskutera och upprita kurvan $y = ax^4 + bx^3$, då man vet, att den har ett minimum i punkten $(1; -1)$.
1. En punkt *P* på linjen $2x + 5y = 10$ sammanbindes med punkterna $A\ (1; 0)$ och $B\ (-1; 0)$. I triangeln *ABP* är den ena av vinklarna *A* och *B* 90° större än den andra. Beräkna koordinaterna för punkten *P*.
5. Varje värdepar $(x; y)$, som satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 = 2x + 3y, \\ xy = 2x - 3y, \end{cases}$$

skall även satisfiera ekvationen

$$y^2 = ax + by.$$

Bestäm konstanterna a och b.

6. En studerande, som börjar sina universitetsstudier det år han fyller 20 år, upptar vid årets början ett lån på 2 500 kr. Vid början av vart och ett av de närmast följande åren lånar han ett lika stort belopp, tills han avlagt sin första akademiska examen. Han lyckas då få en anställning, som ger honom någon inkomst, så att han från och med det år han fyller 25 år kan minska lånebeloppet till 1 500 kr om året. Det år han fyller 29 år, disputerar han för filosofie doktorsgrad och måste då, utöver de 1 500 kr till levnadsomkostnaderna (det sista av detta slags lån han behöver upptaga), låna 1 500 kr för att gälda kostnaden för doktorsavhandlingen. Det år han fyller 30 år, får han en befattning, vilken han beräknar behålla till utgången av det år, under vilket han fyller 65 år, då han är skyldig avgå med pension. Han vill nu amortera sina studieskulder genom lika stora annuiteter, av vilka den första betalas det år han fyller 30 år, och den sista det år han fyller 65 år, då skulderna skola vara slutbetalda. Hur stor blir annuiteten, om ränta beräknas efter 4,5 % och inga avbetalningar gjorts tidigare? Alla lån tänkas upptagna vid årets början, och alla avbetalningar tänkas gjorda vid årets slut.

7. För rektangulärt papper m. m. användas i viss utsträckning de s. k. DIN-formaten. De erhållas genom successiva vikningar av ett grundformat på sådant sätt, att samtliga format bli likformiga. Grundformatet benämnes *A*0; dess yta är 1 m². Genom att vika detta mitt itu, så att rektangelns längre sidor halveras, erhåller man formatet *A*1. Dess yta blir alltså hälften av *A*0:s yta. Genom att vika *A*1 på samma sätt erhåller man formatet *A*2, o. s. v. Bevisa, att om *A*1 är likformigt med *A*0, så blir samtliga övriga format likformiga med dessa. Bestäm förhållandet mellan den större och den mindre sidan i formaten. Beräkna längden av sidorna i formatet *A*6 (brevkortsformatet), uttryckt i mm.

8. Genom en punkt *P* på kantlinjen *AB* i en regelbunden oktaeder lägges ett plan parallellt med två motstående sidoytor. Oktaederns övriga sidoytor avgränsa av planet en sexhörning. Beräkna, var *P* skall vara belägen på *AB*, för att sexhörningens yta skall bli så stor som möjligt.

Resultat: **1.** $n \cdot 180$; $\pm 30° + n \cdot 180°$. **2.** 82°,82. **3.** $a = 3$; $b = -4$. **4.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ och $\left(-\frac{25}{7}; \frac{24}{7}\right)$. **5.** $a = -2$; $b = 7$. **6.** 1583 kr. **7.** $\sqrt{2} : 1$; $125\sqrt[4]{2} = 149$ mm och $67{,}5\sqrt[4]{8} = 105$ mm. **8.** I *AB*:s mittpunkt.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Sök ekvationen för en cirkel, som går genom punkten (2; 4) och som tangerar cirkeln $(x-5)^2+y^2=9$ utantill och dessutom ordinataxeln.
2. I den ena halvan av ellipsen $x^2+3y^2=3$ är en rektangel inskriven, så att rektangelns ena sida ligger utefter ellipsens storaxel. Hur stora äro rektangelns sidor, om dess yta är hälften av den i ellipsen inskrivna kvadratens yta?
3. Genom ena ändpunkten av en parameter i en hyperbel dragas normalerna mot asymptoterna. Uttryck förhållandet mellan dessa normalers längder i konjugathyperbelns excentricitet.
4. Två parabler med olika parametrar ha sina axlar utefter samma räta linje och sina vertices i samma punkt. De äro vända åt samma eller åt motsatta håll. Till ett system parallella kordor med vinkelkoefficienten k drages diametern i vardera parabeln. Bestäm förhållandet mellan avståndet mellan parablernas brännpunkter och avståndet mellan diametrarna.
5. AB är diameter i en given cirkel. En cirkel med A till medelpunkt och godtycklig radie skär den givna cirkeln i P och Q samt AB i R. S är mittpunkten på PR, T mittpunkten på QR. Hur stor är vinkeln SAT, då omkretsen av fyrhörningen $ASRT$ är så stor som möjligt?
6. A och B äro två punkter på en rät linje L. En cirkel tangerar L i punkten B. Två tangenter till cirkeln, den ena genom A, den andra parallell med L, skära varandra i en punkt P. Sök orten för P, då cirkelns radie varierar.
7. En rät cirkulär cylinder har volymen 3 volymsenheter och höjden 1 längdenhet. Genom en punkt P på cylinderns axel eller dennas förlängning drages en rät linje till en punkt Q på omkretsen av cylinderns ena basyta B. Vid rotation kring cylinderns axel alstrar linjen PQ, obegränsat utdragen åt båda hållen, mantelytan till en dubbelkon. Studera och åskådliggör grafiskt, hur volymen (y) av den del av dubbelkonen, som faller inom cylindern, varierar, då avståndet (x) mellan punkten P och basytan B ändras.

Resultat: **1.** $(x-5)^2+(y-8)^2=25$ och $\left(x-\frac{13}{9}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{169}{81}$. **2.** 3 och $\frac{1}{2}$ eller $\sqrt{3}$ och $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{e-1}{e+1}$. **4.** $\pm\frac{k}{2}$. **5.** $19^\circ{,}47$ $\left(\sin\angle SAT=\frac{1}{3}\right)$. **6.** En parabel med fokus i A och vertex i B (den del av denna parabel, som ligger på samma sida av L som cirkeln). 7. 1. För alla neg. x-värden (P på cylinderaxelns förlängning utanför basytan B) är $y = 3$. 2. Inom området $0 \leq x \leq 0{,}5$ gäller $y = 3 - 4x$, där y alltså avtager från 3 till 1. 3. För x-värden $\geq \frac{1}{2}$ gäller $y = \frac{1 - 3x + 3x^2}{x^2}$. Inom detta område avtager y från 1 till $\frac{3}{4}\left(\text{för } x = \frac{2}{3}\right)$ och går sedan med växande x asymptotiskt mot värdet 3. Funktionen y är alltså kontinuerlig, likaså dess derivata; den senare dock ej i punkten (0; 3).

Uppgifter i fysik.

Lösningarna till uppg. 1—7 böra åtföljas av enkla figurer. Erforderliga konstanter, vilka ej äro upptagna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Ett bombplan förföljer en pansarvagn, som med en fart av 72 km/tim färdas på en rak väg över en slätt. Planet går ned på 50 m höjd och flyger horisontellt med en hastighet av 450 km/tim rakt över vägen, parallellt med denna. I vilken vinkel under horisontallinjen (depressionsvinkel) skall piloten se pansarvagnen i det ögonblick han lösgör bomben, för att denna skall träffa vagnen? Vid räkningarna lämnas luftmotståndet utan avseende.
2. Ett homogent halvklot är med en i kanten fäst tråd av klotdiameterns längd upphängd vid en vertikal, glatt vägg. Beräkna den vinkel, som tråden bildar med väggen, då halvklotets plana yta är vänd mot väggen. Ett homogent halvklots tyngdpunkt ligger på dess symmetrilinje på avståndet $\frac{3r}{8}$ från den plana ytan.
3. Vid vissa mätningar rörande elektriska urladdningar i gaser önskar man, att gastrycket i urladdningsröret skall hålla sig konstant, ehuru temperaturen hos gasen till följd av värmeutvecklingen vid strömgenomgången stiger under mätningarnas lopp. Man kan fördenskull sätta urladdningsröret i förbindelse med en större behållare, vilken hålles vid konstant temperatur och urpumpas tillsammans med röret. Vid en dylik undersökning hade urladdningsröret en volym av 300 cm³, och mätningarna skulle göras vid ett tryck av 10 mm kvicksilver. Temperaturen hos hela gasmassan var vid försökets början 18° C. Man beräknade, att temperaturen i urladdningsröret under försökets lopp skulle stiga med 50° C, medan temperaturen i behållaren skulle kunna hållas konstant vid 18° C. Huru stor bör

behållarens volym vara, om man inte vill tillåta större tryckökning än 0,05 mm?

4. Ett liksidigt glasprisma med alla sidoytorna planslipade kan med hjälp av en rotationsapparat bringas att rotera kring en lodrät axel, gående genom de triangulära ytornas tyngdpunkter. Ett smalt knippe parallellt vitt ljus faller vid försökets början in mot rotationsapparaten i riktning mot axeln och träffar vinkelrätt en lodrät vit vägg. När prismat uppställes på rotationsapparatens bord, får man ett spektrum på väggen, vilket rör sig över väggen, om prismat långsamt vrides. Sättes prismat i hastig rotation, ser man i stället på väggen två vågräta ljusstrimmor med ett mellanrum. De inre ändarna äro röda. Avståndet från prismats axel till väggen är 170 cm, prismats brytningsindex för rött ljus 1,51. Vilken längd får mellanrummet mellan de båda ljusstrimmorna?

5. Brännvidden hos en positiv lins kan bestämmas på följande sätt. Vid ena ändan av en optisk bänk placeras ett lysande föremål, vid andra ändan en skärm och mellan dem den lins, som skall undersökas. Avståndet mellan föremålet och skärmen hålles under försöket konstant. Linsen förskjutes utefter bänken, tills en skarp bild av föremålet erhålles på skärmen, vilket inträffar för två lägen hos linsen. Avståndet mellan dessa bägge lägen uppmätes, likaså det fasta avståndet mellan föremål och skärm. Huru stor är brännvidden, om det förra avståndet är 630 mm, det senare 1 000 mm?

6. Storleken av ett obekant motstånd skulle bestämmas med voltampère-metoden. Motståndet och en ampèremeter kopplades i serie i en strömkrets, och parallellt med motståndet anslöts en voltmeter med 3 600 Ω motstånd. Ampèremetern visade 0,500 A, voltmetern 45,0 V. Vid beräkningen av motståndet försummade man först den genom voltmetern gående strömmen. Beräkna det fel, som härigenom uppstod, samt det riktiga värdet på motståndet.

7. Två blyackumulatorer, en elektrolysapparat, ett motstånd och en ampèremeter äro seriekopplade, så att de bilda en sluten strömkrets. På ampèremetern avläses en strömstyrka av 310 milliampère. Om den ena ackumulatorn frånkopplas, nedgår strömstyrkan till 60 milliampère. Beräkna polarisationsspänningen i elektrolysapparaten. Ackumulatorerna ha vardera en elektromotorisk kraft om 2,0 volt. Det inre motståndet i ackumulatorerna försummas.

8. En spole av koppartråd är försedd med järnkärna. Om växelström sändes genom spolen, utvecklas värme förutom i spolens

ledningstråd även i järnkärnan, beroende bl. a. på uppkomsten av virvelströmmar i järnet. Vid ett dylikt försök befanns effektiva strömstyrkan i spolen vara 2,9 ampère och effekten 115 watt. Spolens likströmsmotstånd var 2,5 ohm. Huru många cal utvecklas i järnkärnan per minut?

Resultat: **1.** 8°,48. **2.** 7°,12. **3.** 8,54 l. **4.** 266 cm. Avståndet $= 2 \cdot 170 \cdot \operatorname{tg} \delta$, där δ är prismats minimideviation. **5.** 151 mm. **6.** Det först beräknade värdet är 2,3 ohm för litet; det rätta är 92,3 ohm. **7.** 1,52 volt. **8.** 1,35 kcal.

Realexamen H. T. 1941.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $\dfrac{3x-1}{2x-1} - \dfrac{\frac{1}{4}x + 3(2x-1)}{3x - \frac{3}{2}} + \dfrac{4}{9} = 0.$
2. En familj ämnar resa från Göteborg till Malmö och tillbaka till Göteborg. Familjen består av två vuxna och fyra barn, vilka senare alla skola betala barnbiljett. Man kan antingen köpa tur- och returbiljett för varje person, gällande för resa i båda riktningarna, eller också lösa gemensam s. k. familjebiljett, en i vardera riktningen. Biljett för vuxen person mellan Göteborg och Malmö kostar 14 kr 60 öre, barnbiljett kostar 50 % härav, och tur- och returbiljett kostar 50 % mer än enkel biljett. Familjebiljettens pris beräknas på så sätt, att familjens två äldsta medlemmar betala biljett som vid enkel resa, de övriga blott 25 % av vuxen persons biljett. Vinner familjefadern något genom att köpa familjebiljett?
3. En handlande, som köpt en vara för 174 kr 80 öre, vill sälja den, så att han för egen del erhåller 25 % vinst. För att uppnå detta måste han vid bestämmande av försäljningspriset taga hänsyn till att han av den summa, som kunden kommer att betala, måste avstå 5 % till s. k. omsättningsskatt. Till vilket belopp bör han fastställa försäljningspriset?
4. En familj har under en månads tid köpt dels ett visst antal kakor mjukt bröd av 455 g vikt vardera till ett pris av 30 öre pr st, dels ett visst antal paket hårt bröd av 250 g vikt vardera till ett pris av 25 öre per paket. Kostnaden har utgjort 14 kr 55 öre, och man har fått lämna 327 små brödkuponger. Hur många brödkakor och hur många paket ha inköpts? För en liten brödkupong erhålles antingen 65 g mjukt eller 50 g hårt bröd.

5. En person säljer den 6 februari 10 st 4 % obligationer med ett nominellt värde av 500 kr per st till 102 % kurs, varvid han också erhåller upplupen ränta. Han erlägger i mäklararvode 1 och i stämpelskatt $^1/_2$ promille av kursvärdet. Obligationernas ränteterminer äro den 30 juni och den 30 december. För den summa, som han erhåller vid försäljningen, köper han omedelbart största möjliga antal aktier för 250 kr per st. Hur många aktier får han, och hur mycket av försäljningssumman återstår efter aktieköpet, då han även i detta fall erlägger i mäklararvode 1 och i stämpelskatt $^1/_2$ promille av kursvärdet?
6. Från en punkt utanför en cirkel med 5 cm radie dragas tangenterna, som med varandra bilda 60° vinkel. Tangeringspunkterna A och B sammanbindas, och en linje drages parallellt med AB genom cirkelns medelpunkt. Linjen skär tangenterna i C och D. Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av tangenterna och linjerna AB och CD.
7. En cylindrisk nitnagel har ett halvklotformigt huvud och en konisk spets. Cylindern och konen ha gemensam basyta med 12 mm diameter. Cylinderns längd är 50,5 mm och konens sida 6,5 mm. Cylinderns andra plana yta faller utefter halvklotets plana yta. Halvklotets radie är dubbelt så stor som cylinderns. Hur många sådana nitnaglar kan man tillverka av 36,3 kg järn, om järnets specifika vikt är 7,7? $\pi = 3\,^1/_7$.
8. I triangeln ABC är vinkeln $A = 90°$, sidan $AB = 72$ cm och sidan $AC = 96$ cm. Mittpunktsnormalen till BC skär AC i D och BA:s förlängning i E. En rät linje sammanbinder C med E. Beräkna ytan av triangeln CDE.

Resultat: **1**. $x = 2$. **2**. Nej, samma kostnad, 87,60 kr, i båda fallen. **3**. 230 kr. **4**. 36 kakor och 15 paket. **5**. 20 st. aktier; återstod 104,85 kr. **6**. $\frac{175\sqrt{3}}{12} = 25{,}3$ cm². **7**. 500 st. **8**. 10,5 dm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. För att undersöka belastningen på en cykels båda hjul uppställer man två vågar på lagom avstånd från varandra och placerar cykeln i vertikal ställning med bakhjulet på den ena vågen och framhjulet på den andra. Då en person tager plats på cykeln, visar vågen under bakhjulet 49,3 kg och vågen under framhjulet 33,6 kg. Avståndet AB mellan fram- och bakaxeln är horisontellt och 115 cm långt. Var träffar lodlinjen genom den belastade cykelns tyngdpunkt sträckan AB? Ingen hänsyn be-

höver tagas till den anordning, som hindrar cykeln att falla omkull.

2. En brädstump, som är 30 cm lång, 15 cm bred och 2 cm tjock, hänger på en horisontell spik. Hålet för spiken ligger på brädans mittlinje, 5 cm från ena ändan. Det är så litet, att dess inverkan på brädans tyngd kan försummas. Träets specifika vikt är 0,5. Brädstumpen hänger först rätt ned, med tyngdpunkten rakt under spiken. Den vrides sedan så, att tyngdpunkten i stället kommer rakt över spiken. Huru stort arbete åtgår därvid? Friktionen kan lämnas utan avseende.

3. I ett hus, som ligger i närheten av en sjö, finnes på vinden en vattenbehållare på 2,1 m^3, som skall mata vattenledningen. Då vattnet pumpas dit från sjön, lyftes det 15 m med hjälp av en pump, som drives med en elmotor. Huru mycket elektrisk energi, uttryckt i kWh, åtgår, då behållaren fylles? Till följd av motståndet i rörledningen m. m. kommer endast 75 % av den av motorn avlämnade energien lyftarbetet till godo. Motorns egen verkningsgrad är 90 %. 1 watt = 0,102 kgm/sek.

4. En termosflaska innehöll 175 g vatten av 20°,8 samt en termometer. Då 40 g nollgradig is nedfördes i vattnet, blev blandningstemperaturen 4°,0 C. Huru stor värmemängd avgavs därvid av termosflaskan jämte termometern? Isens smältvärme är 80.

5. Öppningen av en glaskolv var tillsluten med en gummipropp, genom vilken löpte dels en termometer och dels den ena skänkeln av ett U-formigt böjt glasrör med rörmynningarna nedåtvända. Rörets inre skänkel slutade ett stycke under proppen, dess yttre skänkel var lodrät och ungefär meterlång. Kolven innehöll i sin nedre del vatten, som upphettades till kokning, varvid luften i kolven utdrevs genom röret. Termometerns kula befann sig i vattenångan över det kokande vattnet. Medan kokningen ännu pågick, nedfördes rörets nedre ända i en bägare med kvicksilver. Då kolven sedan fick svalna, steg kvicksilver upp i röret. Samtidigt kondenserades vatten ovanpå kvicksilvret i röret. Sedan avkylningen gått så långt, att termometern visade 20° C, uppmättes kvicksilverpelaren, som befanns vara 741 mm, och vattenpelaren, som var 140 mm. Barometerståndet var 769 mm. Huru stort är enligt detta försök vattenångans mättningstryck vid 20° C? Kvicksilvers täthet är 13,6 g/cm^3.

6. Motståndet till ett strykjärnselement skall lindas av ett kromnickelband, som är 0,75 mm brett och 0,12 mm tjockt. Huru långt bör bandet vara, för att strykjärnet skall draga 400 W

vid 220 V polspänning? Kromnickels specifika ledningsmotstånd är 1,15.

7. Ett kopparkärl väger 0,8 kg och innehåller 2 liter vatten jämte en liten doppvärmare, vilken utvecklar 100 W. Doppvärmaren har uppvärmt vattnet till 50° C men förmår icke höja temperaturen ytterligare, emedan kärlets värmeförluster till omgivningen vid denna temperatur uppväga värmetillförseln genom doppvärmaren. Huru mycket sjunker temperaturen i kärlet på 1 min, om doppvärmaren avlägsnas? Kopparns specifika värme är 0,09. 1 wattsekund = 0,24 cal.
8. Ett batteri, vars inre motstånd kan försummas, laddas från ett likströmsnät med 220 volts spänning. Batteriet har under laddningen en polspänning av i genomsnitt 48 V och måste därför seriekopplas med ett motstånd. När batteriet sedan användes, återgiver det 70 % av den energi, som det upptagit vid laddningen. Strömpriset vid laddningen är 12 öre per kWh. Huru stor blir kostnaden per kWh för den energi, som uttages ur batteriet?

Resultat: **1.** I en punkt *C*, så belägen att *AC* = 68,4 cm. **2.** 0,09 kgm. **3.** 0,127 kWh. **4.** 420 cal. **5.** 17,7 mm. **6.** 9,47 m. **7.** 0°,7. 8. 79 öre.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. En motor, som gör 1 440 varv/min. och som har en remskiva med 150 mm diameter skall driva en maskin med 600 mm remskiva, som skall göra 120 varv/min. Huru stora böra lämpligen remskivorna på den erforderliga mellanaxeln göras?
2. En hamplina med 30 mm diameter i en lintransmission skall överföra en effekt av 20 hk. Linans hastighet är 15 m/sek. Spänningen i ena parten är dubbelt så stor som i den andra. Hur stor är dragpåkänningen i den dragande linparten?
3. Lintrumman till en lyftkran skall förbindas med kugghjulet medelst 8 st. bultar. Dessa skola sitta i en cirkel med 425 mm diameter. Belastningen i linan är 4 ton och trummans diameter 500 mm. Beräkna diametern på bultarna, om den tillåtna skjuvningspåkänningen är 400 kg/cm².
4. Huru stor jämnt fördelad belastning förmår ändtappen till en axel uppbära, om tappens längd är 68 mm och diametern 48 mm? Böjningspåkänningen får ej överstiga 400 kg/cm².

5. En rem med 100 mm bredd och 5 mm tjocklek föres över en ledrulle. Dragpåkänningen i remmen är 25 kg/cm^2 och omfattningsvinkeln 90°. Beräkna diametern å tappen till ledrullen, om längden skall vara 85 mm och den tillåtna böjningspåkänningen 400 kg/cm^2. $\left(M_b = \frac{P \cdot l}{2}\right)$.
6. En stålaxel skall svarvas i en med en elektrisk motor driven svarv. Motorns effekt är 2,5 hk och svarvens verkningsgrad 85 %. Huru stort spåntvärsnitt kan svarven taga vid en skärhastighet av 15 m/min, om skärmotståndet per mm^2 av spånens tvärsnitt är 125 kgf.
7. Vad bör man med hänsyn till brandrisken iakttaga vid utförandet av en byggnad av trä?
8. En balkong uppbäres av två I-balkar NP12. Balkarna äro inmurade i ena änden och sticka ut från väggen 1,2 m. Hur stor jämnt fördelad belastning kunna de tillsammans tåla, om tillåtna böjningspåkänningen är 1 200 kg/cm^2? Huru stor blir nedböjningen i balkarnas fria ändar vid maximal belastning? Elasticitetsmodulen = 2 150 000 kg/cm^2. (Vid beräkningarna behöver ej hänsyn tagas till balkarnas egen vikt.)
9. I en takstol av trä luta sparrarna 40° mot horisontalplanet, deras fria längd är 5 m och deras avstånd från mitt till mitt är 1,2 m. Sparrarna äro i de nedre ändarna hophuggna med golvbjälkarna, vilka ha tvärsektionen 4″ × 8″. Om takets totallast är 200 kg per m^2 takyta, beräkna den dragpåkänning, som kan uppkomma i golvbjälkarna.

Resultat: 1. Exempelvis 500 mm och 170 mm. 2. 28,3 kg/cm^2. 3. 13,7 mm. 4. 1 280 kg. 5. 26,8 mm. 6. 5,1 mm^2. 8. 2 190 kg; 3,4 mm. 9. 6 kg/cm^2.

ELEMENTA

Innehållsregister till årg. 17—24, utgivna under åren 1934—1941.[1]

A. Uppsatser och avhandlingar.

1. Allmänt innehåll. Historia. Föreningsmeddelanden.

Matematik.

2. Metodiska frågor.
3. Aritmetik och algebra.
4. Talteori.
5. Serier.
6. Funktionsteori.
7. Sannolikhetsräkning.
8. Geometri.
9. Planimetri.
10. Trigonometri.
11. Analytisk geometri.
12. Rymdgeometri.

Fysik.

13. Metodiska frågor, laboratorieinredning, laborationsteknik.
14. Relativitetsteori (materiens byggnad etc. se avd. 32).
15. Fysikens enheter.
16. Statik (elasticitet, diffusion).
17. Dynamik.
18. Värmeutvidgning, ångbildning, kalorimetri, värmeledning.
19. Energiprincipen, mekanisk värmeteori, värmemotorer.
20. Vågrörelse. Akustik.
21. Ljusets reflexion och brytning, optiska instrument.
22. Ljusets natur. Strålning (radioaktivitet se avd. 32). Fotometri.
23. Elektrostatik. Magnetism, elektromagnetism.
24. Elektricitetsledning i fasta kroppar och gaser (i vätskor se avd. 31). Ohms och Joules lagar. Termoelektricitet.
25. Induktion, elektr. maskiner, växelström, elektr. svängningar, radio.
26. Astronomi, geofysik, meteorologi (geokemi se avd. 32).

---

[1] I registret anges årg. med kursiv; *18*, 15, 203 betyder 18:e årg. sid. 15 och 203. Innehållet är grupperat på samma sätt som i det tidigare registret omfattande årg. *1—16*, utgivna under åren 1917—1933. Detta är intaget i årg. *16*, 249—272 men finnes även att tillgå i särtryck à kr. 1: —.

Tidskriftens tidigare namn »Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi» utbyttes 1938 (fr. o. m. årg. *21*) mot det mer lätthanterliga Elementa med det tidigare namnet som underrubrik.

Kemi.

27. Metodiska frågor, laboratorieinredning, laborationsteknik.
28. Oorganisk kemi.
29. Organisk kemi, biokemi.
30. Atomvikt, molekylvikt, fasregeln, massverkans lag.
31. Valenslära, affinitet, elektrokemi, kolloider, adsorption.
32. Kristallografi, radioaktivitet, atomteori, geokemi, period. systemet.

B. (33) Referat av gradualavhandlingar.

C. Bokanmälningar.

34. Biografier. Minnesskrifter. Historia. Årsböcker. Tidskrifter. Kataloger. Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser.
35. Matematik: Läroböcker m. m. för realskolan.
36. Matematik: Läroböcker för gymnasiet och för tekn. läroverk.
37. Matematik: Större läroböcker, speciallitteratur.
38. Fysik (astronomi): Läroböcker m. m. för realskolan o. gymnasiet.
39. Fysik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.
40. Fysik, astronomi, meteorologi: Populärvetenskaplig litteratur.
41. Kemi: Elementära läroböcker för realskolan, gymnasiet m. fl.
42. Kemi: Större läroböcker, monografier m. m.
43. Kemi, mineralogi, geologi: Populärvetenskaplig litteratur.
44. Teknisk litteratur.

D. Matematiska och fysikaliska problem.

45. Prisuppgifter.

46 a. Matematiska och fysikaliska problem givna i studentexamen och i fyllnadsprövning efter studentexamen.

46 b. Provräkning i realexamen jämte uppgifter i fysik och uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära i praktisk realexamen.

47. Matematiska problem, kronologisk förteckning.
48. Matematiska problem ordnade efter innehåll.
49. Fysikaliska problem.

A. Uppsatser och avhandlingar.

1. *Allmänt innehåll. Historia. Föreningsmeddelanden.*

Gustaver, B. Kungl. Mynt- och Justeringsverket *22*, 5

Hjalmar, E. Fortbildningskursen i fysik, Lunds univ. aug. 1939 *22*, 179

Lundberg, J. The Royal Institution *21*, 209

— — Ur sodans historia: N. Leblanc och E. Solvay *23*, 105, 157

Torsting, E. De matematisk-naturvidenskabelige fags stilling i de danske skoler *24*, 177

Westlin, R. Finlands matematik- och fysiklärarförbund *24*, 148

Åstrand, S. Fysikundervisningen i den svenska realskolan förr och nu *22*, 81

Åttonde skandinaviska matematikerkongressen *17*, 116, *18*, 199

Red. Meddelanden om gåvor till tidskriften *17*, 115, *18*, 268

— — Tidskriften som premium till elever vid skolor i Sverige och grannländerna *20*, 212, 223

Nobelpris i fysik: E. Rudberg, Richardson, de Broglie (1928—29), *13*, 69; G. Starck, Raman (1930), *14*, 1; S. Benner, Dirac, Heisenberg, Schrödinger (1932—33), *16*, 193; G. Starck, Chadwick (1935), *18*, 217; S. Benner, Hess, Anderson (1936), *19*, 217; S. Benner, Davisson, Thomson (1937), *21*, 1; A. Westgren, Fermi (1938), *22*, 1; T. Magnusson, Lawrence (1939), *23*, 1.

Nobelpris i kemi: K. Josephson, Harden, v. Euler (1929), *13*, 77; G. Starck, Fischer (1930), *14*, 5; E. Hägglund, Bergius, Bosch (1931), *14*, 220; G. Hägg, Langmuir (1932), *15*, 193; K.-E. Fylking, Urey (1934), *17*, 193; G. Starck, Joliot, Curie (1935), *18*, 217; S. Benner, Debye (1936), *19*, 221; H. Hellström, Karrer, Haworth (1937), *21*, 5; K. Myrbäck, Kuhn, Butenandt, Ruzicka (1938—39), *23*, 8.

Föredrag inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar h. t. 1933—v. t. 1941: *16*, 235; *17*, 117, 128; *18*, 73, 139; *19*, 63, 72, 127; *20*, 69, 136; *21*, 69, 125; *22*, 80, 129; *23*, 68, 128, 134; *24*, 53, 104.

Föreläsningar (matem., fysik, kemi) för lärarkandidaterna vid provårsläroverken h. t. 1933—v. t. 1941: *17*, 187; *18*, 207; *19*, 207; *20*, 211; *21*, 208; *22*, 254; *23*, 208; *24*, 165.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Meddelanden från årsmöten och sammankomster under åren 1933—1941; styrelseberättelser, korta referat av föredrag m. m.:

Huvudföreningen i Stockholm: *16*, 226; *17*, 46; *18*, 42; *19*, 36; *20*, 42; *21*, 47; *22*, 45, 113; *23*, 41, 234; *24*, 38, 89.

Föreningen i Lund: *17*, 113; *18*, 47; *19*, 40; *20*, 50, 133; *21*, 52; *22*, 54; *23*, 52; *24*, 90.

Matematik.

2. *Metodiska frågor.*

Olson, Hj. Några reflexioner kring vårens (1937) studentuppg. i matem. *20*, 182

Sjöstedt, C. E. Rymdgeometriens plats inom realgymnasiets kursplan *18*, 184

— — De matematiska studentuppgifterna *20*, 273

Uhler, A. Några förslag till enskilt arbete i matematik å gymnasiet *18*, 237

WAHLSTRÖM, B. Anknytningen allmän kurs — specialkurs *21*, 44
ÅSTRAND, S. Rostads standardprov i räkning *18*, 247
— — Geometri för nybörjare *23*, 13

2 a. *Aritmetik och algebra.*

COMÉT, S. Något om matrisräkning *23*, 145; *24*, 1
FALCK, E. När kan summan av bråk förkortas? *19*, 79
FOGHAMMAR, E. Beräkning av tredjerötter *19*, 78
WIGERT, S. Ett aritmetiskt problem och dess lösning *18*, 81
— — Ett bevis för satsen $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$ *19*, 25
ÅKERBERG, B. Isoperimetriska produkters maxima *18*, 233

4. *Talteori.*

ANDERSSON, S. Ett bevis för Wilsons sats *24*, 121
BERGGREN, B. Pytagoreiska trianglar *17*, 129
BODLUND, C. Ett talproblem *17*, 1
— — Not angående ekvationen $x^4+ay^4=z^2$ *20*, 39
BODLUND, C. o. WAHLGREN, A. En diofantisk ekvation av 3.graden *17*, 65
LEVIN, C. A. En faktoruppdelning av binomet $x^{p-1}-1 \pmod{p}$ *20*, 81
PETRINI, H. Om ekvationen $x^3+y^3=z^3$ *19*, 73
— — Notis om ekv. $x^2+ay^2=z^2$ *19*, 77
TALLQVIST, HJ. Om Mersennes tal och liknande tal .. *23*, 209; *24*, 33
— — Om faktorer till tal av formerna $(5^p \pm 1)$ *24*, 73
TEGNÉR, H. En generalisering av Eulers pentagonaltalsats *18*, 221; *19*, 24
WAHLGREN, A. Om faktorer till talen a^p+1.......... *23*, 212; *24*, 34
WIGERT, S. Om ekvationen $x^3+y^3=z^3$ *20*, 15

5. *Serier.*

BERGGREN, B. Summering av serien $1^n+2^n+\ldots+\nu^n$ *22*, 209
BÅGMAN, S. Lösning av en amorteringsuppgift *18*, 244

6. *Funktionsteori.*

BERGSTRÖM, V. Ett existensbevis för talet *e* *20*, 189
BILLING, J. Bevis för likheten $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ och en generalisering *19*, 102
HAMMARSTRÖM, HJ. Tredjegradsfunktionens maximum och min. *20*, 22
KJELLBERG, B. Ett geometriskt bevis för Kakeyas sats........ *21*, 241
LUNDGREN, S. Bidrag till en aritmetisk fråga *22*, 155
— — *e*-kuriosum *22*, 212

Wigert, S. Den lineära homogena diff. ekv. av andra ordningen *20*, 12

Åkerberg, B. Isoperimetriska produkters maxima *18*, 233

7. *Sannolikhetsräkning.*

Berg, E. Ett geometriskt sannolikhetsproblem med praktisk tillämpning *18*, 1

Petrini, H. Om geometrisk sannolikhet *17*, 40

— — Den Bertrandska paradoxen *18*, 153

8. *Geometri.*

Comét, S. Ett geometriskt problem — två lösningar *19*, 249

Juringius, N. Reflexioner över några polygonsatser *24*, 65

Lunell, E. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel *19*, 1, 190; *20*, 41

— — Två cirkelinstrument *21*, 145

Norling, G. Ett minimiproblem *21*, 42

Nyhlén, R. Om grundbegreppen och axiomsystemen i våra geometriläroböcker *21*, 10; *22*, 38

Olson, Hj. Om geometriens grunder o. geometriundervisningen i realskolan *21*, 81, 245; *22*, 110

Olsson, H. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel *19*, 190

Petrini, H. Parallellaxiomet för en yta av oändlig utsträckning *17*, 140

Pleijel, A. En olikhet för konvexa polygoner *22*, 14

Simmons, T. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel *20*, 40

Sjöstedt, C. E. Geometriens grundbegrepp o. axiom. *21*, 165; *22*, 41

Tandberg, J. Vinkelns tredelning *18*, 85; *19*, 145

Åstrand, S. Geometri för nybörjare *23*, 13

9. *Planimetri.*

Beckman, N. Några iakttagelser om pytagoreiska trianglar *17*, 200; *20*, 90

Berggren, B. Pytagoreiska trianglar *17*, 129

Bergström, H. En elementär olikhet *21*, 187

Blom, C. E. Heiselers π-värde *17*, 42

— — Ytan av ett cirkeltrapets *20*, 270

Bodlund, C. Faktorerna i Herons formel *20*, 269

Carlson, V. Avståndet mellan medianernas o. bissektrisernas skärningspunkter *21*, 39

Kuylenstierna, N. Om figurer med rationella bestämningsdelar *17*, 205

Rolf, B. Återigen π *17*, 43

Sjöstedt, C. E. En approx. konstr. av regelb. månghörningar *17*, 176

Wahlgren, A. Om heltalstrianglar *17*, 5

— — Heltalsmånghörningar *20*, 1

— — Faktorerna i Herons formel *20*, 270

10. *Trigonometri.*

Bågman, S. Cosinussatsen i sfäriska trigonometrien *17*, 45
Nydell, S. Sfäriska trigonometriens grundformler *17*, 103
Pleijel, A. Några trigonometriska olikheter *24*, 31

11. *Analytisk geometri.*

Comét, S. Beräkning av ytor och volymer *20*, 95
— — Användning av invarianter *21*, 157
Forsström, G. Konstruktion av en hyperbels konjugataxel *20*, 39, 188
Ryde, F. Räta linjen utan normalformen *23*, 101
Sjöstedt, C. E. Om normalformen för den räta linjens ekvation och avståndet från en punkt till en rät linje *17*, 218
— — Vändutrymmet för ett åkdon *19*, 26
— — Hyperbelns asymptoter *21*, 102
Wigert, S. En sats om plana kurvor *19*, 246

12. *Rymdgeometri.*

Carlson, F. Om ett bevis för en stereometrisk sats *18*, 234
Comét, S. Beräkning av ytor och volymer *20*, 95
Nordhult, A. En härledning av pyramidens volym *24*, 72
Sjöstedt, C. E. Rymdgeometriens plats inom realgymnasiets kursplan *18*, 184

Fysik.

13. *Metodiska frågor, laborationsteknik.*

Ingelstam, E. En enkel metod att reproducera boktext *22*, 102
Lindholm, S. Projektionsmätinstrument *24*, 36
Nordhult, A. En fjädervåg *22*, 172
Petersson, H. Flaskgas contra benoidgas *21*, 235
Tandberg, J. Eterexplosioner *22*, 107
Åstrand, S. Fysikundervisningen i den svenska realskolan förr och nu *22*, 81

14. *Relativitetsteori* (materiens byggnad etc. se avd. 32).

Klein, O. Det Einsteinska additionsteoremet för parallella hastigheter *18*, 9
Löwdin, P. O. Lorentz-transformationerna och den kinematiska relativitetsprincipen *22*, 161

15. *Fysikens enheter.*

Borelius, G. De tekniska enheterna för kraft och massa *18*, 34
Ingelstam, E. Gamla och nya elektriska enheter *22*, 217; *23*, 81
Tandberg, J. Vad är ett kilogram? *17*, 13; *18*, 33, 280

16. *Statik* (elasticitet, diffusion).

Funke, G. Apparat för undersökning av fasta kroppars elasticitetsförhållanden *24,* 190
Nilsson, H. Isens spec. vikt, en laborationsuppgift *18,* 94
Nyberg, H. D. Demonstration av kraftparallellogrammen *18,* 249

17. *Dynamik.*

Knave, E. En fallapparat *22,* 174
Nilsson, H. En enkel fallmaskin *19,* 28
Nordhult, A. En Atwoods fallmaskin avsedd för tidtagning med stoppur *24,* 137
Sjöström, M. Vätskors och gasers strömning *20,* 153
Skjulstad, T. Et nytt sentrifugalapparat *24,* 122
Wahlström, B. Apparat för verifiering av formeln för centrifugalkraften *24,* 185

18. *Värmeutvidgning, ångbildning, kalorimetri, värmeledning.*

Funke, G. Apparat för bestämning av specifika värmeledningsförmågan för metaller *23,* 184
Guntsch, A. Om bestämning av metallers värmeledningsförmåga *24,* 37
Jönsson, E. Bestämning av vattnets ångbildningsvärme *17,* 36
Lundblad, R. Om termisk utvidgning *17,* 233
— — Ett tillägg till uppsats av Hj. Mandal *18,* 184
Malmborg, I. Lufts termiska tryckkoefficient *17,* 172
Mandal, Hj. Bestämning av vattnets ångtryck *18,* 182
Nilsson, A. En varmluftballong *23,* 116
Svensson, B. Vattnets maximala täthet *22,* 237

19. *Energiprincipen, mekanisk värmeteori, värmemotorer.*

Comét, S. Ett försök till elementär behandling av entropibegreppet *17,* 143
Gunneson, F. En bromskalorimeter för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten *22,* 169
Larsson, L. Om bestämning av värmets mekaniska ekvivalent medelst fallande blyhagel *19,* 256
Lundblad, R. Notis angående Whitings rör *19,* 29
Nilsson, E. Bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten *17,* 174
Wahlström, B. Bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten *24,* 143

20. *Vågrörelse. Akustik.*

Leide, A. Metod att demonstrera stående longitudinell vågrörelse *18,* 31
Lenander, K. J. Om Kundts rör *24,* 75
Nilsson, E. Anordning för mätning av ljudets hastighet i luft *19,* 29

Rendahl, C. Kundts rör *20*, 191
Wahlström, B. Demonstration av stående vågrörelse *23*, 38

21. *Ljusets reflexion och brytning, optiska instrument.*

Bergholm, C. Strålbegränsning i kikare *18*, 226
Bergström, V. Brytning i en sfärisk yta *21*, 243
Nilsson, A. Synliga strålknippen *24*, 140
Sandström, A. Bestämning av brännvidden för negativa linser *22*, 35
Sundqvist, M. Teorien för de i handeln f. n. tillgängliga glasögonen *20*, 225
Wahlström, B. En optisk universalapparat *18*, 24

22. *Ljusets natur. Strålning* (radioaktivitet se avd. 32). *Fotometri.*

Benner, S. Om bestrålningsrisker vid röntgendemonstrationer *18*, 14
Forsström, G. Ljusabsorptionsförsök med en röntgenskärm *18*, 36, 280
Friberg, S. Demonstration av natriumlinjens omvändning *17*, 37
Funke, G. Objektiv fotometri *24*, 83
Jönsson, T. Den nyaste *c*-bestämningen *24*, 124
Malmborg, I. Newtons färgringar i en roterande vätskelamell *17*, 39
Nilsson, G. Ljustekniska definitioner och enheter samt mätmetoder inom fotometrien *19*, 85
Rendahl, C. Försök med polaroider *21*, 103
Wallenquist, Å. Några nyare undersökningar över absorptionslinjerna inom stjärnspektra *18*, 110

23. *Elektrostatik. Magnetism, elektromagnetism.*

Edqvist, T. Elektriska rullgardinen *23*, 185
Forsström, G. Hur man kan göra en inklinationsnål och bestämma inklinationen *21*, 181
Malmborg, I. Verifikation av Biot-Savarts lag *18*, 38
Nilsson, A. Några elektrostatiska försök och ett enkelt elektroskop *21*, 112
— — En influensmaskin enligt van de Graaff *22*, 176

24. *Elektricitetsledning i fasta kroppar och gaser* (i vätskor se avd. 20). *Ohms och Joules lagar. Termoelektricitet.*

Blom, C. E. Om en generalisering av Wheatstones brygga .. *20*, 192
Norling, G. Några försök med termoelement *17*, 173

25. *Induktion, elektriska maskiner, växelström, elektriska svängningar, radio.*

Forsman, S. Cykeldynamon i fysikundervisningens tjänst *24*, 132
Forsström, G. En not till Moll-Rudbergs elektricitetslära *18*, 245
Lindholm, S. En enkel televisionssändare och mottagare *20*, 104
Nilsson, A. En vridspoleoscillograf *21*, 184

Nilsson, A. En apparat för virvelströmmar	*23*, 24
Nordhult, A. De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna	*19*, 225; *20*, 23
Rendahl, C. En enkel trefasgenerator och några försök med växelström	*18*, 187
Tandberg, J. Svenska kondensatorer	*19*, 35
Wetterblad, T. Självinduktion	*17*, 239
Ödberg, G. Ringankare och trumankare	*18*, 19
— — Om en härledning i den elementära el-läran	*21*, IV o. 35

26. *Astronomi, geofysik, meteorologi* (geokemi se avd. 32).

Beckman, N. Isländsk och medeltida skandinavisk tideräkning	*18*, 129
Gertz, H. Ett nytt solur	*17*, 31
Jenvall, A. Astronomisk åskådningsmateriel	*17*, 168, 230
Nilsson, E. Approx. metod för bestämning av luftens medeltemp.	*17*, 225
Nyberg, A. Något om atmosfärens temperaturförhållanden	*24*, 195
Wallenquist, Å. Några nyare undersökningar över absorptionslinjerna inom stjärnspektra	*18*, 110
— — Problemet att bestämma stjärnornas fördelning i rymden	*20*, 255
Wingårdh, K. A. o. Karlberg, P. Ett planetarium för skolbruk	*21*, 98

Kemi.

27. *Metodiska frågor, laboratorieinredning, laborationsteknik.*

Erdtman, H. och Starck, G. Fyller läroverkens kemikurs de krav, som andra skolämnen, vetenskap och teknik ställa på den?	*20*, 46, 48
Nilsson, E. Varför är filtrertrattens toppvinkel 60°?	*21*, 233
Nordefeldt, E. Några förslag till uppgifter vid de kemiska laborationerna i gymnasiet	*23*, 25
— — Förslag till enskilda arbeten i kemi	*23*, 169
Petersson, H. Flaskgas contra benoidgas	*21*, 235

28. *Oorganisk kemi.*

Bäckström, H. Om toning av fotografiska silverbilder	*17*, 95
Ekman, W. och Starck, G. Framställning av ammoniaksoda	*20*, 109
Forsman, S. Luftens syrehalt	*22*, 238
Gustaver, B. Om bildningen av underklorsyrlighet	*20*, 194
— — Kemiska notiser	*22*, 153
Lenander, K.-J. Vattnets volymsammansättning	*23*, 229
Lundberg, J. I. G. — ett blad ur den kemiska industriens historia	*19*, 176
— — Ur sodans historia: N. Leblanc och E. Solvay	*23*, 105, 157

Löfgren, N. En metod för kvalitativ analys av andra gruppens metaller … *19*, 258
Nilsson, A. Framställning av svavelkoppar … *23*, 36
Starck, G. En metod för syrgasframställning … *17*, 222
— — Bestämning av vattnets viktsammansättning … *19*, 108
— — Klorvätets volymsammansättning … *20*, 111
— — Laborationsförsök med klor i realskolan … *20*, 272

29. *Organisk kemi, biokemi.*

Englund, B. Isomera föreningars egenskaper … *22*, 34
Lundberg, J. I. G. — ett blad ur den kemiska industriens historia … *19*, 176
Nilsson, A. Framställning av viskossilke … *22*, 240
Nylén, P. Synteser på basis av acetylen … *21*, 221
Tandberg, J. Eterexplosioner … *22*, 107

30. *Atomvikt, molekylvikt, fasregeln, massverkans lag.*

Holm, T. Kvantitativt laborationsförsök till massverkningslagen *20*, 264
Nilsson, A. Ett par enkla bestämningar av ekvivalentvikter … *23*, 186
Sandström, B. Experimentell belysning av Avogadros lag … *17*, 177
Starck, G. Demonstration av jämviktsförskjutning i ett homogent system … *18*, 119
— — Lösningars kokpunktsförhöjning … *18*, 250

31. *Valenslära, affinitet, elektrokemi, kolloider, adsorption.*

Englund, B. Studium av syrors och basers dissociation med användning av färgindikatorer … *18*, 159
— — Till frågan om begreppen syra och bas … *23*, 233
Gustaver, B. Några demonstrationsförsök till kapitlet »Stridsgaser och gasskydd.» … *22*, 108
— — 1. Jonvandringen vid elektrolys. 2. En osmotisk cell … *23*, 167
Ljunggren, G. Gasskyddets kemi … *22*, 17
— — m. fl. Demonstrationsförsök belysande gasskydd … *22*, 145
Lövgren, N. Om beräkning av ph … *22*, 95
Nilsson, A. Stora elektrodytor vid elektrolys och i enkla element *21*, 45
— — Elektrolys av glas … *24*, 35
Nyberg, H. Etylacetatets hydrolys … *23*, 37
Starck, G. Två stökiometriska försök … *19*, 31

32. *Kristallografi, radioaktivitet, atomteori, geokemi, periodiska systemet.*

Englund, B. Experimentell behandling av grundämnenas periodiska system vid kemiundervisningen … *23*, 223

Hilsch, R. och Leide, A. En enkel Wilson-kammare för projektion *22*, 213, 216

Leide, A. Den positiva elektronen *17*, 153

Lundquist, O. Neutronen *17*, 77

— — Om inducerad radioaktivitet *18*, 95, 280

— — Objektiv demonstration av radioaktivt sönderfall med Geigers spetskammare *20*, 113

Ramstedt, E. Skolförsök med Geigers spetskammare *19*, 104

— — Atomomvandlingar *24*, 13

Ryde, N. Ur den nyare isotopforskningen *19*, 160

— — Ett kärnomvandlingsförsök med på konstgjord väg accelererade projektiler *23*, 215

Tabell (efter O. Hahn) över de kemiska grundämnena och de naturliga atomslagen enligt isotopforskningens nuvarande ståndpunkt *18*, 123

Atomvikter 1935 .... *18*, 196

B. (33) **Referat av gradualavhandlingar.**

Adell, B. Über die elektrolytische Dissoziation von Dicarbonsäuren in Alkalichloridlösungen *22*, 65

Alfvén, H. Investigations on the Ultra-short Electromagnetic Waves *17*, 112

Andersson, B. Studien über die Co-Zymase als Aktivator bei enzymatischen Dehydrierungen *22*, 64

Arrhenius, S. Eine dielektrische Untersuchung von Kohlenoxyd-Hämoglobin *24*, 99

Assarsson, G. Die Entstehungsbedingungen der hydratischen Verbindungen im System $CaO-Al_2O_3-H_2O$ etc. *19*, 273

Beckman, Anna. Bidrag till kännedomen om Skandiums spektrum i yttersta ultraviolett *20*, 210

Bergström, H. Zur Theorie der biquadratischen Zahlkörper *21*, 255

Billing, G. Beiträge zur arithmetischen Theorie der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins *22*, 195

Brohult, S. Investigations of Helix Pomatia Haemocyanin *24*, 101

Brunius, E. Chemical Studies on the true Forssman Hapten, the corresponding Antibody and their Interaction *20*, 205

Dahr, K. Bidrag till kännedomen om elektroteknikens operatorräkning jämte tillämpningar *22*, 249

Edlén, B. Wellenlängen und Termsysteme zu den Atomspektren der Elemente Li, Be, B, C, N, O *17*, 184

Eftring, E. Förbränningsvärmen för några alifatiska klorkolväten *21*, 253

Ehrnst, F. Sur quelques propriétées des congruences de cercles dans la géométrie conforme *21*, 256

af Ekenstam, A. Über die Celluloselösungen in Mineralsäuren *20*, 127

Erdtman, H. Studies on the Formation of Complex Oxidation and Condensation Products of Phenols *17*, 110

Eriksson, A. An Investigation of the P-Terms for Helium *23*, 245

Fredga, A. Studien über Selen-di-karbonsäuren und Diselendikarbonsäuren *18*, 203

Fredholm, H. Die Ultraviolettabsorption einiger Glieder der Barbitursäuregruppe in wässriger Lösung *21*, 122

v. Friesen, S. Precision Measurements of Electron Wave Spectra *19*, 59

Frostman, O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions .. *19*, 203

Funke, G. Untersuchungen über die Spektren von NH und C_2H_2 .... *20*, 282

Gellerstedt, S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre etc. *19*, 55

Grundström, B. Spektroskopische Untersuchungen über die Erdalkalihydride *19*, 204

Guntsch, A. Das Bandenspektrum des Magnesiumhydrides.... *22*, 251

Heimer, A. Die Bandenspektren des Wismuthydrids und -Deutrids und der Kobalt- und Nickelhydride *21*, 121

Heimer, T. Die Bandenspektren der Hydride und Deutride des Kupfers und Goldes.................................. *20*, 208

Hellström, H. Spektrophotometrische Ergebnisse an biochemisch wichtigen Stoffgruppen *22*, 126

Hellström, N. Halogenättiksyror och tioglykolsyra *19*, 123

Holmqvist, A. Undersökningar av antimons och vismuts elektromotoriska förhållanden i vattenlösningar............ *20*, 207

Holst, G. Zur Photochemie der reversiblen Redoxprozesse .. *21*, 256

Hulthén, L. Über das Austauschproblem eines Kristalles *22*, 67

Ingelstam, E. Die K-Spektren der schweren Elemente........ *20*, 130

Johnson, N. G. Effect of Chemical Combination on X-Ray Emission Spectrum *22*, 252

Junell, R. Über die gegenseitige Umlagerung der aci- und nitro-Formen aliphatischer Nitroverbindungen.......... *19*, 56

Karlsson, K. J. Zur Thermochemie einiger chlor- und jodhaltiger Benzolderivate.............................. *24*, 162

Kuusinen, J. Wahrscheinlichkeitsberechnungen in der Kraft- und Wärmetechnik *19*, 274

Lamm, O. Measurements of Concentration Gradients in Sedimentation and Diffusion by Refraction Methods........ *21*, 65

Larsén, T. Zur Kenntnis der Refraktion und Dispersion von Edelgasen und edelgasähnlichen Hydriden und Deutriden *23*, 66
Lind, C.-E. Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins *23*, 194
Linde, J. O. Elektrische Widerstandseigenschaften der verdünnten Legierungen des Kupfers, Silbers und Goldes .. *23*, 124
Lindstrand, F. Über Eisenperchlorate *22*, 250
Lundberg, O. On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics *24*, 103
Lunell, E. Liniengeometrische Studien mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen etc. *23*, 197
Magnusson, T. Investigations into Absorption Spectra in the Extremely Soft X-Ray region. etc. *21*, 196
Mellander, A. Studien an α-Alkylsulfid- und α-Alkylsulfonpropionsäuren *22*, 197
Ohlin, P. An X-ray- Determination of h/e with Counter and Bent Chrystal *24*, 210
Olsson, E. The Band Spectra of Sulphur, Selenium and Tellurium *22*, 127
Persson, K. Sur une classe de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues *21*, 195
Pettersson, E. L. Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome *20*, 65
Pleijel, Å. Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations *23*, 247
Reiz, A. A Study of External Galaxies with Regard to the Distribution Problem *24*, 212
Reuterskiöld, J. A. Studien über 1—2-Disulfid-di-karbonsäuren, die entsprechenden Di-sulfone und deren Spaltungsprodukte *23*, 64
Rydberg, R. Über Neubildung und Zerfall zweiatomiger Moleküle, von spektroskopischem Standpunkte aus *18*, 137
Ryde, N. Zur Kenntnis des Einflusses elektrischer Felder auf die Lichtemission der Edelgasatome *18*, 69
Sandström, A. An Investigation into X-Ray Absorption Spectra *18*, 204
Sanner, V. H. Die K-Emissions- und Absorptionsspektren der Elemente Kalium bis Kupfer und einiger ihrer Oxyde .. *24*, 164
Schjånberg, E. Die Verbrennungswärmen einiger chlorsubstituierter Fettsäuren und Ester *18*, 67
Sillén, L. G. X-Ray Studies on Oxides and Oxyhalides of Trivalent Bismuth *24*, 51
Sjöberg, B. Über Thioglycerine und einige verwandte Schwefelverbindungen *24*, 161

Sjögren, K. Experimentelle Untersuchungen des Starkeffekts bei Wasserstoff und Helium *18*, 70
Slätis, H. Om Hertz'ska vågors ifrågasatta dispersion i fasta kroppar etc. *19*, 124
Stenvinkel, G. Das Bandenspektrum des Zinkhydrides. Störungen in den Bandenspektren zweiatomiger Moleküle .. *20*, 63
Söderman, M. Beitrag zur Festlegung der Skala der Röntgenwellenlängen in absolutem Mass *18*, 136
Söderqvist, J. Vakuumfunkenspektren der Elemente Na, Mg, Al, Si *17*, 185
Tandberg, J. The Absorption of hard γ-rays as studied by Means of nuclear Reactions and artificial Radioactivity *20*, 280
Thomé, K.-E. Alkalisk hydrolys av acylerade oxisyror........ *23*, 61
Troell, E. Om molybdenoctocyanider *21*, 67
Tyrén, F. Precision Measurements of Soft X-Rays with Concave Grating *24*, 49
Törnqvist, L. Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen, aritmetische Ketten und diophantische Approximationen *20*, 67
Vanäs, E. A Spectrophotometric Study of Stars in Cygnus .. *23*, 195
Wigren, N. Zur Kenntnis der organischen Arsenverbindungen *18*, 266
Wode, G. Några etylenoxiders hydrolyshastighet *20*, 124

C. **Bokanmälningar.**

34. *Biografier. Minnesskrifter. Historia. Årsböcker. Tidskrifter. Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser.*

Bell, Matematikens män *22*, 59, *24*, 48; Curie, Min mor *21*, 56; Heckscher, De svenska penning-, vikt- o. måttsystemen *24*, 99; Kowalewski, Grosse Mathematiker o. Neugebauer, Geschichte d. antiken math. Wissenschaften *22*, 59; Nordenmark, Anders Celsius *20*, 275; Tallqvist, Marconi o. den trådlösa telegrafien *22*, 195; Vinding, Kemien i Danmark *23*, 190; Liljeholmens stearinljusfabrik 1839—1939 *22*, 247; Sandvikens järnverk 1862—1937, *21*, 65; Svenska gasteknikens historia *23*, 122; »Nordisk kultur», Mått o. vikt *19*, 264; »Svenskt Inköpsregister» *20*, 279; Bonniers Konversationslexikon *22*, 194, *23*, 123, *24*, 161; »Medd. om ny materiel», Norstedt & Söner, nr 10 o. 11, *19*, 54, *20*, 62.

Tidskrifter: Fra Fysikkens Verden *23*, 56, Nature och Science Progress *18*, 202; *22*, 242; Några engelskspråkiga tidskrifter *18*, 263; Praktische Schulphysik *17*, 52.

Årsböcker: Kosmos bd 11—18, *17*, 48, *18*, 53, *19*, 191; *20*, 55, *21*, 115, *22*, 120, *23*, 187, *24*, 155; Lychnos *20*, 54, *21*, 194, *22*, 241.

Avhandlingar o. uppsatser i läroverkens årsredogörelser: *19*, 207, *20*, 211, *21*, 208, *22*, 254.

Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift; Svensk kemisk tidskrift; Matem. Tidsskrift, København; Norsk Matem. Tidsskrift, Oslo; Nordisk Astron. Tidsskrift, København; Fysisk Tidsskrift, København; Himmel og jord, Oslo; Fra Fysikkens Verden, Oslo; Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja (Tidskrift för matem. ämnen), Helsingfors.

Översikt av uppsatser av matem.-naturv. innehåll i följande tidskrifter: ERA; IVA (Ingenjörsvetenskapsakademien); Ljuskultur; Flygning; Populär radio; Industritidningen Norden; Teknik för alla; Tidn. f. Sveriges lärov.; Pedagogisk tidskrift; Skola o. samhälle; Tidskrift f. prakt. ungdomsskolor; Skola och Hem, Helsingfors; Tidskrift utg. av Pedag. Föreningen i Finland; Naturens Verden, København; Naturen, Bergen; Den Høgre Skolen, Oslo; Syn og Segn, Oslo.

Översikterna införas i regel i varje nummer av tidskriften.

35. *Matematik: Läroböcker m. m. för realskolan.*

Berg-Hagström, Räknelära *17*, 183; *20*, 122; Bokelid, Geometri *19*, 119; Hedström-Öije, Arbetsuppg. i ekv.-lära f. realsk. *17*, 255; *19*, 121; Olson, Plan geometri *19*, 54; Rendahl-Wahlström-Frank, Räknelära II, III, *17*, 50; Setterberg, Hur jag blir styv i matem. *17*, 106; Skjulstad-Sollesnes, Samfunnsregning *24*, 209; Österholm, Matem. f. alla *19*, 49.

36. *Matematik: Läroböcker för gymnasiet och för tekniska läroverk.*

Evermark, Anal. geom., funktionslära *21*, 191; Foghammar, Uppg. f. latin- o. realgymn. *19*, 53; *21*, 57; Hedström-Rendahl, Algebra, geom. f. lating. *21*, 251; Nyström-Olson, Likformighetslära *17*, 182, Funktionslära *18*, 66, Repet. uppg. i geom. *21*, 252, Trigon. f. realg. *23*, 119; Olson, Algebra f. lating. *19*, 199; Tambs Lyche, Diff. o. integ. regn. *17*, 246; Wingårdh, Diff. o. integ. kalkyl *22*, 185; Zero, 60 trig. ekv. *20*, 203.

37. *Matematik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.*

Andrews, New Numbers *20*, 52; Arley-Buch, Sandsynlighedsregning *24*, 45; Bohr-Mollerup, Matem. Analyse I, II, *22*, 184; *24*, 93; Fremberg, Diff. o. integ. kalkyl *24*, 94; Godeaux, Les Géométries *22*, 55; Heegaard, Trideling av vinkelen *18*, 253; Hogben, Matem. f. miljoner *22*, 117; Hubendick, Diff. o. integ. räkning *20*, 116; Jahnke-Emde, Funktionentafeln *24*, 94; Leitzmann, Der Pythag. Lehrsatz och Wo steckt d. Fehler? *20*, 278; Lorentz m. fl., Höhere Mathem. f. d. Praktiker *21*, 54; Luckey, Nomographie *21*, 189; Lundahl, Ekv. teori *18*, 197; Oxenstierna, Sannolikhetens filosofi *20*, 199; Rademacher, Von Zahlen u. Figuren *19*, 261; Tambs Lyche, Matem. analyse I, II, *24*, 92; Wigfors, Matem. statistik *22*, 187; Zacharias, Das Parallellenproblem *20*, 279; Örne, Förtrollade siffror *23*, 53; Problemsamling för 1- o. 2-betygskurserna vid Lunds univ. *23*, 187, 244.

38. *Fysik (astronomi): Elementära läroböcker m. m. för realskolan m. fl. och gymnasiet.*

Beckman-Wetterblad, Lärob. f. realsk. *20*, 276; *21*, 58; *23*, 118; Bergholm, Lärob. i fysik: Allm. fysik *19*, 196, värmelära *20*, 60, ellära *22*, 121, strålning o. mekanik *22*, 190, 243; Bjerke-Glimme, Fysikk for realg. *18*, 258; Bohlin, Ellära o. elteknik *21*, 248; Bruun-Devik, Fysikk for realg.: Varme *18*, 259, Mekanikk *19*, 271; Duckworth, The Labor. Workshop *19*, 117; Eriksen, Astronomi *20*, 201, Fysik f. Mellemsk. *21*, 62, Fysik f. realkl. *23*, 189; Friberg-Norgren, Folkskolans naturlära *19*, 50; Jepsen-Sundorph, Fysiske Øvelser f. Mellemsk. *21*, 62; Katz, Psykologiska laborationer, *24*, 156; Kobberø, Fysik f. Mellemsk. *21*, 62; Lehmann, Shop Projects in Electricity *18*, 257; Moll-Rudberg, Magn. o. el. *17*, 250, Statik, dynamik *18*, 59, 62; Nygaard-Christiansen, Fysiske Øvelser f. Gymn. *21*, 61; Roller-Pricks, Schulversuche zur El-Lehre *17*, 52; Sørensen, Fysikaliske målinger *24*, 209; Thorup, Fysik med Fysiksløjd *18*, 64; Wetterblad, Labor. uppg. f. realsk. *18*, 66.

39. *Fysik: Större läroböcker, speciallitteratur m. m.*

Angerer, Techn. Kunstgriffe bei phys. Untersuchungen *20*, 123; Arvidson-Hiljding, Log. navigeringstabeller *18*, 135; Darrow, Quantenmechanik *17*, 181; Ehringhaus, Das Mikroskop *22*, 58; Geelmuyden-Strömgren, Lærebog i Astronomi *17*, 105; Johansson, Färg *21*, 57; Jordan, Quantenmechanik *19*, 260; Kallmann, Kernphysik *20*, 277; Kohlrausch, Prakt. Phys. *19*, 44; Liljeström, Teknikens naturv. grunder *19*, 266; Malmer, Aerodynamik *18*, 254; Millican, Electrons, Protons etc. *18*, 132: Picht, Elektronenoptik *23*, 118; Rast, Atomtheorie u. Atombau *17*, 104; Regler, Aufgabensammlung *23*, 57; Sikjær, Einsteins Relativitetsteori *22*, 56; Strömgren, Lehrb. d. Astronomie *19*, 259; Tallqvist, Kärnfysiken o. dess utveckling *21*, 194; Wegener, Die Physik d. Erde *18*, 255; Ångström, Meteorologi *19*, 45.

40. *Fysik, astronomi, meteorologi: Populärvetenskaplig litteratur.*

Aitken-Crowther, Den stora planen *19*, 42; Andrade, Naturens mekanism *21*, 247; Asplind, Våra grannar i världsrymden *17*, 246; Bergeron, Hur vädret blir till etc *21*, 63; Born, Vår rastlösa värld *22*, 118; Bragg, Elektriciteten *21*, 55, Ljusets världsallt *23*, 117; Darwin, De nya materiebegreppen *18*, 51; Debye, Struktur d. Materie *17*, 104; Einstein, Min världsbild *17*, 248; Einstein-Infeld. Fysikens utveckling *22*, 57; Harrison, Atomerna i arbete *24*, 96; Haslett, Vetenskapens olösta problem *21*, 117; Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Die moderne Atomtheorie *17*, 104; Ilin, Vad är klockan? m. m. *23*, 123; Janssen, Stjernehimlen og dens Vidundere *24*, 46; Jeans, Genom tid o. rum *19*, 111; Karlson, Från atom till universum *20*, 53; Klein, Orsak o. verkan *19*, 196; Lundmark, Från kaos till kosmos *18*, 57, Livets välde I, *19*, 46; Nielsen, Elektriciteten etc. *23*, 120; Nilsson, Tideräkningen *22*, 189; Osborn, Physics of the Home *19*, 117; Ramberg, Jorden *21*, 118; Rowland-Smith, Maskinerna, människan o. djuren *22*, 248; Serviss, Stjärnhimmeln *21*, 190; Spencer Jones, Tallösa världar *23*, 55; Strömberg, Universums själ *22*, 62; Strömgren, Universets Udforskning *24*, 152; Sullivan, Naturforskningens gränser *18*, 52; Wallengren, Världen o. människan *20*, 58; Wallenquist, På väg mot oändligheten *22*, 61, Mörk materie i världsalltet *24*, 154; Zimmer, Umsturz im Weltbild. d. Physik *18*, 50; »Alte Probleme etc.» *17*, 245; *23*, 117; »Olösta gåtor etc.» *20*, 196. Angående materieforskning se även avd. 43.

41. *Kemi: Elementära läroböcker för realskolan, gymnasiet m. fl.*

Bolin-Gustaver, Kemi f. gymn. *17*, 107, Handledn. i kem. analys *19*, 201, Kemi f. folkskolesem. m. fl. *23*, 243; Böös-Lundberg, Kemi f. gymn. *17*, 253; Friberg-Norgren, Folkskolans naturlära *19*, 50; Hole, Elevøvelser i kjemi *24*, 98; Knöös, Elem. lärob. i kemi *20*, 120; Lizell, Lärob. i kemi *22*, 192; Lund-Rasmussen, Kemi f. Gymn. *20*, 201; Moll-Starck, Kemi f. realg. *21*, 192; Petersson-Ring, Uorg. Kemi f. Mellemsk. *19*, 200; Rasmussen m. fl., Hverdagslivets Kemi *23*, 121; Ring, Kemi o. Øvelser f. Gymn. *21*, 193; Thorup, Den første Kemi *23*, 61; Vuorinen-Nordgren, Kemi f. sjuksköterskor *24*, 160.

42. *Kemi: Större läroböcker, monografier m. m.*

Angel, Die Alkalichloridelektrolyse in Diaphragmazellen *17*, 180; Briscoe, The Structure and Properties of Matter *18*, 255; Biilmann, Org. kemi f. Fabrikking. *22*, 247; Cleve-Euler, Kvant. kem. analys *19*, 118; De Broglie, Atomes etc. *23*, 60; Debye, Kernphysik o. Meitner-Delbrück, Die Aufbau d. Atomkerne *19*, 112; Du Rietz, Handbok i pH-bestämning etc. *18*, 57; Farkas, Ortohydrogen etc. *18*, 256; Freuchen, Kemisk Potential etc. *20*, 120; Gleditsch-Jensen, Uorg. kjemi *24*, 97; Hassel, Kristallchemie *17*, 106; Hogness-Johnson, Qual. Analysis *23*, 193; Hunter, The Electronic Theory of Chemistry *17*, 244; Hägg, Kemisk reaktionslära *23*, 239; Kruse, Prakt. Übungen z. Chemie d. Nahrungsmittel *24*, 159; Madsen, Anal. Kemi o. Hagen, Kval. Analyse *23*, 240; Mann-Saunders, Practical Org. Chem., Staudinger, Anleitung z. org. qual. Analyse o. Schmidt-Allen, Biochemistry etc. *23*, 192; Myrbeck, Alkoholjäsningen *21*, 120; Reinboldt, Chem. Unterrichtsversuche *17*, 179; Schmidt, Handl. i org. syntes o. reaktionslära *18*, 132, Lärob. i org. kemi *22*, 124, Lärob.

i oorg. undervisningsexp. *24*, 207; Weeks, The Discovery of the Elements *17*, 241; *24*, 158; Willstaedt, Om naturfärgämnen etc. *22*, 191; »Actualitetes scientifiques et industrielles» *18*, 259; »Kemistens uppslagsbok» *22*, 246.

43. *Kemi, mineralogi, geologi: Populärvetenskaplig litteratur.*

Andrade, Den nya kemien *22*, 245; Cyrén, Syntetiska färgämnen o. läkemedel *23*, 121; Fletchner, Materiens underbara värld *23*, 57; Greiling, Kemien erövrar världen *23*, 59; Møller-Rasmussen, Atomer og andre Smaating, *22*, 248; Pettersson, Jorden o. radium *24*, 95; Pilgrim, Chemie etc. *24*, 47. Angående materieforskning se även avd. 40.

44. *Teknisk litteratur.*

Bengtsson, Varunamn inom textilbranscherna *24*, 160; Bergmann, Ultraschalltechnik *21*, 55; Elfman, Mekanik f. tekn. skolor *17*, 255, Mek. teknologi *18*, 200; Hellgren, Grafostatik *17*, 47; Holmqvist, Flygning *24*, 44; Hultzenius, Kylteknik *22*, 193; Lagerhjelm, Metallframställning *23*, 242; Lindström, Teoretiska grunder f. elektrotekniken *19*, 115; Löfgren, Teknisk varukännedom *24*, 98; Mosely m. fl., Televisionen av i dag *19*, 43; Nydell, Elektroteknik för sjökaptensklasser *17*, 182; *18*, 260; Scharf, Unsere Kleidung *24*, 159; Stockman, Televisionsteknik *24*, 48; Strand, Gummi *21*, 119; Tauchmann m. fl., Elektroteknik *18*, 201; Welter, Populär el-teknik *19*, 47; Zischka, Bomullen *20*, 119; Åkerblom, Elektromaskinlärans grunder *18*, 134; Svensk teknisk uppslagsbok *21*, 118; Uppfinningarnas bok VIII, *22*, 244.

D. Matematiska och fysikaliska problem.

45. *Prisuppgifter: 24,* 214.

46 a. *Matematiska och fysikaliska uppgifter givna i studentexamen och i fyllnadsprövningar efter studentexamen v. t. 1934—h. t. 1941:* 1934, *17*, 122, 260; 1935, *18*, 144, 212, 274; 1936, *19*, 68, 135, 140, 213, 281; 1937, *20*, 77, 143, 218, 288; 1938, *21*, 75, 134, 202, 264; 1939, *22*, 75, 134, 204, 262; 1940, *23*, 75, 135, 203, 254; 1941, *24*, 59, 109, 171, 218.

Uppgifterna äro försedda med svar, ett stort antal även med anvisningar. Några specialkursuppgifter ha diskuterats i särskilda artiklar: a) nov. 1937, nr 5, *21*, 131. b) april 1938, nr 7, *21*, 133. c) aug. 1939, nr 3, 5 och nov. 1939, 6, 7, *22*, 271.

Uppgifter fr. o. m. 1928 (då införandet i tidskriften påbörjades) t. o. m. 1933 återfinnas i årg. *11—16*.

46 b. *Proväkning i realexamen jämte uppgifter i fysik och uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära i praktisk realexamen v. t. 1934—h. t. 1941:* 1934, *17*, 127, 264; 1935, *18*, 148, 278; 1936, *19*, 141, 285; 1937, *20*, 149, 294; 1938, *21*, 140, 269; 1939, *22*, 140, 267; 1940, *23*, 141, 259; 1941, *24*, 115, 224. Uppgifterna äro åtföljda av svar.

47. *Kronologisk förteckning över de matematiska problemen.*

Problemen utgöras dels av svårare problem, dels av enklare lämpade för skolstadiet. Till de förra finnas lösningar införda c:a ett halvt år efter uppgiftens publicering; till de senare äro endast resultat angivna. Ur innehållsförteckningen (se efterföljande avd. nr 48) erhålles problemets *nummer* och därefter ur den kronologiska *årgång* och *sida*.

Problemens nummer:				Årgång och sida:				
654— 671,	672— 686,	687— 706,	707— 724..	*17*,	55,	118,	189,	256
725— 747,	748 — 765,	766— 784,	785— 808..	*18*,	76,	141,	209,	270
809— 826,	827— 845,	846— 863,	864— 881..	*19*,	64,	129,	208,	276
882— 900,	901— 921,	922— 939,	940— 956..	*20*,	73,	138,	213,	284
957— 974,	975— 990,	991—1004,	1005—1021..	*21*,	71,	126,	198,	260
1022—1038,	1039—1056,	1057—1071,	1072—1084..	*22*,	70,	130,	200,	257
1085 —1100,	1101—1115,	1116—1132,	1133 —1146..	*23*,	71,	129,	199,	251
1147—1160,	1161—1174,	1175—1189,	1190—1203..	*24*,	55,	105,	167,	215

48. *Matematiska problem ordnade efter innehåll.*

Uppgifter av större svårighetsgrad, till vilka lösningar finnas, äro angivna med kursivstil.

I. Talteori: 691, *707*, *749*, *786*, *810*, 826, *864*, 869, 881, 956, *1118*, *1162*, 1178.

II. Algebraiska ekvationer, algebra, ekvationssystem: *655*, 659—662, *674*, 676, 677, *687*, 690, 710, 711, 728, *750*, 751, 752, *785*, 788, 789, 812, 868, *884*, 885—889, *903*, 904, 905, 925, 927, 943—946, *960*, 961, 974, *1005*, 1008, 1026, 1042, 1075, *1087*, 1088, 1104, 1105, 1120, 1129, 1136, 1137, 1164—1166, 1179, 1180, 1193, 1194.

III. Sannolikhetskalkyl: *866*, 932, 933, *940*, *1059*, 1132.

IV. Indeterminerade uppgifter: 840—844, *923*, *1041*, 1139—1141, 1145.

V. Logaritmer och exponentialekvationer: *847*, 898, 963, *1022*, 1027, 1028, 1046, 1150, 1195.

VI. Serier: 692, 729, 730, *767*, 830, 831, 851, 872, 962, 983, *992*, 1025, 1033, 1034, 1080, 1151, 1167, 1181.

VII. Trigonometriska ekvationer och teorem: *654*, 663, *673*, 698—700, 712—715, 732, 736, 737, 754, *767*, 769, 770, 775, 776, 798, 813, *827*, 832, 833, 849, 850, 853, 854, 871, *883*, 890, 891, 906—908, 928, 949, 965, 966, 978, 994, 1009, 1010, 1032, 1043—1045, 1049, 1060, 1061. 1078, *1086*, 1091, 1108, 1138, 1183, *1190*, 1198.

VIII. Planimetri: 658, 664—666, 675, 678, 679, 693—697, *708*, 716—719, 731, 733—735, 738, *748*, 753, 755—758, 771—774, *787*, 790—797, 814—816, 834—837, 845, *848*, 852, 855, 867, 870, *882*, 891, 909, 910, 926, 929, *941*, 947, 948, 955, 964, *975*, *977*, 979—982, 995—1000, 1011—1015, 1029—1031, 1047, 1062—1064, *1074*, 1076, 1077, 1079, 1089, 1090, 1092, 1106, 1107, 1119, 1121—1124, *1133*, *1134*, 1142, *1147*, 1152—1154, *1163*, 1170—1172, 1182, 1196, 1197, 1199—1200.

IX. Stereometri: 667, 680, 701, 702, 721, *725*, 739—744, 759, *768*, 777, 778, *809*, 817—822, 839, 862, 863, 878—880, 894—896, 911—914, *924*, 930, 931, 934, 950, *958*, 967, 968, *976*, 989, 990, *991*, *1007*, *1024*, 1035, 1048, 1065, *1073*, 1081, *1085*, 1093, *1101*, *1102*, 1110, *1116*, 1146, 1155—1159, *1161*, 1173, 1174, *1175*, 1184—1186, *1191*, 1201.

X. Funktionslära: *656*, 668, 683, 684, 703, 704, 720, *726*, 745, 746, 760—765, *766*, 783, 784, 799—802, 825, *828*, *846*, 856—861, 873—875, 877, 897, 899, *901*, *902*, 915, 918—921, 935, 938, 954, 969—972, 988, 989, 1003, 1004, 1016—1018, 1020, 1021, 1023, 1036, 1037, *1040*, 1049—1051, 1056, *1057*, 1066, 1067, 1082, 1083, 1092, 1099, 1100, *1103*, 1109, 1112, 1115, *1117*, 1130, 1131, 1143, 1144, 1189, *1192*.

XI. Analytisk geometri.

Räta linjen: 681, 685, 686, 705, 747, 779, 780, 804, 823, 824, 838, *865*, 876, 877, 900, 916, 936, 937, 939, 951, 984, 985, 1001, 1002, 1068, 1094, 1111, 1125—1127, 1187, 1188.

Cirkeln: 669, *672*, 682, 808, 892, 893, 917, 986, 987, 1052, 1053, *1176*.

Ellipsen: 670, 671. *709*, *811*, *922*, 952, 1037, 1038, 1054, *1058*, 1069, 1202, 1203.

Hyperbeln: *689*, 806, 807, *829*, *942*, 953, *959*, 973, *1072*, 1097—1099, 1113, 1114, 1128.

Parabeln: *727*, 781, 782, 803, 805, *993*, *1006*, 1019, *1022*, 1055, 1095, 1096, *1116*, 1160.

XII. Geometri.

Konstruktionsuppgiter: 657, *688*, 706, *957*, *1039*, *1074*, *1135*, *1148*, *1149*, *1177*.

Teorem: 722—724, 1070, 1071, 1168, 1169.

XIII. Rättelser: nr 342 (årg. *13*), i svaret saknas lösningen $270° + n . 360°$; nr 345 (årg. *13*), se *19*, 277; nr 519 a (årg. *15*) och nr 649 (årg. *16*), se *17*, 55; nr 698, se *17*, 256, nr 760, se *18*, 209; nr 788 och nr 791, se *19*, 64; nr 933 a, se *20*, 284.

Red. är mycket tacksam för påpekanden angående felaktiga eller ofullständiga svar.

49. *Fysikaliska problem.*

Den serie fysikuppgifter, som påbörjades i årg. *12* (se årg. *12—16*), fortsattes i årg. *17*, 59 med en avd. statik (nr 160—169, 185—189) och en avd. dynamik (nr 170—184). Serien har tyvärr ej kunnat fortsättas under de senare åren, dels på grund av otillräcklig redaktionell arbetskraft, dels emedan de införda fyllnadsprövningarna kommit problemavd. att svälla, så att utrymme näppeligen kunnat beredas.

4W

3 8198 313 596 494
THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO